Вопросы и задачи
к экзамену по аналитической геометрии
2007/2008 учебный год

1. Вводные понятия

1. **(a).** Системы координат на плоскости и в пространстве: декартова прямоугольная, декартова косоугольная, полярная, цилиндрическая, сферическая.

2. **(a).** Уравнения линий и поверхностей. Параметрическое задание линий и поверхностей. Пересечение линий и поверхностей. Проекции точек на координатные оси и плоскости в декартовой прямоугольной системе координат.

3. **(b).** Метод математической индукции. Доказать по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

4. **(b).** Метод математической индукции. Доказать по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

5. **(b).** Метод математической индукции. Доказать по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

6. **(c).** Основы комбинаторики. Объединение, пересечение, декартово произведение множеств. Выборки. Число размещений и сочетаний.

7. **(a).** Биномиальные коэффициенты и их свойства. Треугольник Паскаля.

8. **(b).** Формула бинома Ньютона.

2. Комплексные числа

9. **(a).** Понятие числового поля. Алгебраически замкнутое поле. Примеры.

10. **(a).** Определение комплексных чисел. Арифметические операции над комплексными числами; примеры. Сопряжение. Алгебраическая форма записи комплексных чисел.

11. **(a).** Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Муавра. Возведение комплексных чисел в степень с целым показателем. Вычислить $(1+i)^n$, $n\in\mathbb{Z}$.

12. **(a).** Показательная форма записи комплексных чисел. Формула Эйлера. Возведение комплексных чисел в степень с целым показателем. Вычислить $(i-1)^n$, $n\in\mathbb{Z}$.

13. **(b).** Используя формулу Муавра, получить формулы, выражающие $\cos 4x$ и $\sin 4x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

14. **(b).** Используя формулу Муавра, получить формулы, выражающие $\cos 5x$ и $\sin 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

15. **(c).** Используя формулу Муавра, получить выражение для сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos kx$.

16. **(a).** Извлечение корней из комплексных чисел. Вычислить $\sqrt[3]{i}$.

17. **(a).** Извлечение корней из комплексных чисел. Вычислить $\sqrt[3]{-1}$.

18. **(a).** Извлечение корней из комплексных чисел. Вычислить $\sqrt[3]{-i}$.

19. **(b).** Гиперболические функции и их связь с тригонометрическими функциями. Вывести формулы, выражающие $\operatorname{sh} 2x$ и $\operatorname{ch} 2x$ через $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

20. **(b).** Гиперболические функции и их связь с тригонометрическими функциями. Вывести формулу преобразования $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y$ в произведение.

21. **(b).** Гиперболические функции и их связь с тригонометрическими функциями. Вывести формулу преобразования $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y$ в произведение.

22. **(a).** Многочлены, арифметические операции над ними. Деление многочленов с остатком. Корень многочлена. Теорема Безу.

23. **(a).** Кратные корни многочлена. Основная теорема алгебры (без доказательства). Разложение многочлена на множители.

24. **(a).** Свойства корней многочленов с вещественными коэффициентами.

3. Векторы

25. **(a).** Понятие (геометрического свободного) вектора. Линейные операции над векторами, их свойства.

26. **(a).** Коллинеарные и компланарные векторы на плоскости и в пространстве. Необходимые и достаточные условия коллинеарности (компланарности) векторов.

27. **(a).** Базис на плоскости и в пространстве. Координаты векторов. Единственность разложения вектора по базису. Ортонормированный базис.

28. **(a).** Столбцы и линейные операции над ними. Свойства линейных операций.

29. **(a).** Линейная комбинация столбцов. Линейная зависимость и независимость столбцов. Линейная оболочка.

30. **(a).** Базис в пространстве столбцов. Координаты столбца относительно базиса. Единственность разложения столбца по базису.

31. **(a).** Изоморфизм пространств (геометрических свободных) векторов и пространств столбцов.

32. **(b).** Используя методы векторной алгебры, доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.

33. **(b).** Используя методы векторной алгебры, найти координаты центра масс однородной пластинки, имеющей форму четырехугольника $ABCD$ с вершинами в точках $A(3,1)$, $B(7,3)$, $C(0,4)$, $D(-1,2)$.

34. **(b).** На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $|AM| : |BM| = m_1 : n_1$, $|AN| : |CN| = m_2 : n_2$, O — точка пересечения отрезков BN и CM. Найти отношения $|BO| : |ON|$ и $|CO| : |OM|$. Решить задачу, используя методы векторной алгебры.

35. **(b).** Используя методы векторной алгебры, доказать, что четыре отрезка, соединяющие вершины произвольного тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

36. **(b).** Используя методы векторной алгебры, доказать, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер произвольного тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

37. **(a).** Преобразование базисов. Матрица перехода. Ориентация плоскости и пространства. Одноименные и разноименные базисы. Правые и левые базисы на плоскости и в пространстве.

38. **(a).** Скалярное произведение векторов, его свойства. Выражение скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе. Проекция вектора на ось.

39. **(b).** Векторное произведение векторов, его свойства. Выражение векторного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе.

40. **(b).** Двойное векторное произведение. Тождество Якоби.

41. **(a).** Смешанное произведение векторов, его свойства. Выражение смешанного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе.

42. **(b).** Доказать тождество $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) \end{vmatrix}$.

43. **(b).** Доказать тождество $[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

44. **(b).** Доказать тождество $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 + \big|[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}]\big|^2 = \big|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big|^2 \cdot |\boldsymbol{c}|^2$.

45. **(c).** Доказать тождество $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2$.

46. **(c).** Доказать тождество $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \end{vmatrix}$.

47. **(c).** Доказать тождество $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{z}) \end{vmatrix}$.

48. **(b).** Доказать, что если векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ компланарны, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны.

49. **(b).** Доказать, что если векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

50. **(a).** Даны плоские углы α, β, γ трехгранного угла. Найти его двугранные углы.

51. **(b).** Известно, что $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Найти длины векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и углы между ними.

52. **(b).** Три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ отложены из одной точки. Найти объем треугольной призмы, основание которой построено на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а боковое ребро совпадает с вектором $\boldsymbol{c}$.

53. **(b).** Три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ отложены из одной точки. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

4. Определители второго и третьего порядка

54. **(a).** Определение и свойства определителя второго порядка. Формулы Крамера для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя второго порядка.

55. **(a).** Определение определителя третьего порядка, основанное на аналогии с определителем второго порядка. Формулы Крамера для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя третьего порядка.

56. **(a).** Формула разложения определителя третьего порядка по элементам первого столбца. Алгебраические дополнения и миноры. Полное разложение определителя третьего порядка. Равноправность строк и столбцов определителя третьего порядка. Разложение определителя третьего порядка по элементам произвольного столбца (строки).

5. Матрицы

57. **(a).** Понятие матрицы. Линейные операции над матрицами, их свойства. Специальные виды матриц: квадратные, треугольные, диагональные, симметричные, кососимметричные.

58. **(a).** Умножение матриц, его свойства. Единичная матрица, символ Кронекера. Доказать, что k-й столбец матрицы AB равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам k-го столбца матрицы B.

59. **(a).** Умножение матриц, его свойства. Единичная матрица, символ Кронекера. Доказать, что k-я строка матрицы AB равна линейной комбинации строк матрицы B с коэффициентами, равными элементам k-й строки матрицы A.

60. **(a).** Умножение матриц, его свойства. Единичная матрица, символ Кронекера. Доказать, что k-й столбец матрицы AB равен произведению матрицы A на k-й столбец матрицы B.

61. **(a).** Умножение матриц, его свойства. Единичная матрица, символ Кронекера. Доказать, что k-я строка матрицы AB равна произведению k-й строки матрицы A на матрицу B.

62. **(a).** Транспонирование матриц, его свойства. Доказать соотношение $(AB)^T = B^T A^T$.

63. **(a).** Теорема об определителе произведения матриц. Доказать теорему для определителей второго порядка.

64. **(b).** Теорема об определителе произведения матриц. Доказать теорему для определителей третьего порядка.

65. **(a).** Обратная матрица. Единственность обратной матрицы. Необходимое и достаточное условие обратимости матрицы второго порядка. Формула обращения матрицы второго порядка.

66. **(b).** Обратная матрица. Единственность обратной матрицы. Необходимое и достаточное условие обратимости матрицы третьего порядка. Вычисление обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений элементов исходной матрицы. Вычислить
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

67. **(b).** Матрица A такова, что $A^2 + A + E = 0$. Доказать, что матрица A обратима и выразить A^{-1} через A.

68. **(b).** Пусть $A^m = 0$. Доказать, что $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{m-1}$.

69. **(b).** Пусть $f(t)$ — многочлен. Доказать, что $f(S^{-1}AS) = S^{-1}f(A)S$.

70. **(b).** Доказать, что если A — невырожденная симметрическая матрица, то A^{-1} — также симметрическая матрица.

71. **(b).** Доказать, что если A — невырожденная кососимметрическая матрица, то A^{-1} — также кососимметрическая матрица.

72. **(b).** Пусть A, B — симметрические матрицы. Доказать, что AB является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

73. **(b).** Пусть A, B — кососимметрические матрицы. Доказать, что AB является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

74. **(b).** Пусть A, B — кососимметрические матрицы. Доказать, что AB является кососимметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = -BA$.

6. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса

75. **(a).** Системы линейных уравнений, основные определения. Совместные и несовместные системы. Базисные и свободные неизвестные. Общее решение системы линейных уравнений.

76. **(a).** Свойства решений системы линейных однородных уравнений. Множество решений однородной системы как линейное подпространство. Размерность и базис пространства решений однородной системы. Фундаментальная совокупность решений. Нормальная фундаментальная совокупность решений. Фундаментальная матрица однородной системы.

77. **(a).** Свойства решений системы линейных неоднородных уравнений. Множество решений неоднородной системы как плоскость в аффинном пространстве.

78. **(a).** Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Системы упрощенного вида. Алгоритм Гаусса приведения системы (матрицы) к упрощенному виду.

79. **(a).** Связь элементарных преобразований строк и умножения матриц. Доказать, что выполнение элементарного преобразования строк матрицы эквивалентно ее умножению слева на невырожденную матрицу.

80. **(a).** Связь элементарных преобразований столбцов и умножения матриц. Доказать, что выполнение элементарного преобразования столбцов матрицы эквивалентно ее умножению справа на невырожденную матрицу.

81. **(a).** Вычисление обратной матрицы с помощью метода Гаусса. Вычисление произведений AB^{-1} и $A^{-1}B$. Вычислить с помощью метода Гаусса $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

82. **(b).** Вычисление обратной матрицы с помощью метода Гаусса. Вычисление произведений AB^{-1} и $A^{-1}B$. Вычислить с помощью метода Гаусса $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

83. **(b).** Вычисление обратной матрицы с помощью метода Гаусса. Вычисление произведений AB^{-1} и $A^{-1}B$. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 9 & -6 & -16 \\ -12 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

84. **(b).** Вычисление обратной матрицы с помощью метода Гаусса. Вычисление произведений AB^{-1} и $A^{-1}B$. Вычислить $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 9 & -6 & -16 \\ -12 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

7. Линейное пространство

85. **(a).** Определение линейного пространства. Простейшие следствия из аксиом линейного пространства. Примеры линейных пространств.

86. **(a).** Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства. Линейная оболочка.

87. **(a).** Базис и размерность линейного пространства. Координаты элемента относительно базиса. Основные примеры линейных пространств и стандартных базисов в этих пространствах.

88. **(b).** Гомоморфизм и изоморфизм линейных пространств, их основные свойства. Изоморфность пространств одинаковой размерности.

89. **(a).** Определение линейного подпространства. Примеры. Линейное подпространство как линейная оболочка. Линейное подпространство как множество решений линейной однородной системы.

90. **(a).** Доказать, что подмножество в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$, состоящее из столбцов, сумма элементов которых равна нулю, является линейным подпространством в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

91. **(a).** Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество симметричных матриц является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

92. **(a).** Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество кососимметричных матриц является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

93. **(a).** Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество матриц с нулевым следом является линейным подпространством. (След матрицы — это сумма ее диагональных элементов.) Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

94. **(a).** Теорема о пополнении базиса.

95. **(a).** Сумма и пересечение подпространств. Примеры. Размерность суммы подпространств.

96. **(a).** Прямая сумма подпространств. Докажите, что $\mathbb{K}^{n\times n} = S\mathbb{K}^{n\times n} \oplus A\mathbb{K}^{n\times n}$.

97. **(b).** Ядро и образ гомоморфизма линейных пространств как линейные подпространства. Сумма размерностей ядра и образа гомоморфизма.

98. **(b).** Гомоморфизм пространств столбцов, задаваемый при помощи матрицы. Ядро и образ матрицы, методы их нахождения.

99. **(a).** Линейные оболочки строк и столбцов матрицы, их размерности. Сохранение размерности линейной оболочки строк матрицы при элементарных преобразованиях строк. Сохранение размерности линейной оболочки столбцов матрицы при элементарных преобразованиях строк. Ранг матрицы.

100. **(a).** Теоремы о ранге произведения матриц.

101. **(a).** Теорема Кронекера—Капелли.

8. Аффинное пространство

102. **(a).** Определение аффинного пространства. Простейшие следствия из аксиом аффинного пространства. Примеры. Изоморфизм аффинных пространств. Аффинная система координат.

103. **(a).** Плоскости в аффинном пространстве. Направление плоскости. Гиперплоскости и их задание линейным уравнением. Параллельные и скрещивающиеся плоскости.

104. **(a).** Двумерное аффинное пространство: плоскость. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

105. **(a).** Трехмерное аффинное пространство. Способы задания плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

106. **(a).** Трехмерное аффинное пространство. Способы задания прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

107. **(a).** Трехмерное аффинное пространство. Взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве.

108. **(a).** Записать уравнение плоскости, проходящей через три заданные неколлинеарные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

109. **(a).** Записать уравнение плоскости, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}_1(a_1, b_1, c_1)$.

110. **(a).** Записать уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ параллельно векторам $\boldsymbol{a}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\boldsymbol{a}_2(a_2, b_2, c_2)$.

111. **(a).** Записать уравнение плоскости, проходящей параллельно вектору $\boldsymbol{a}(a, b, c)$ через заданную прямую $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$.

9. Евклидово пространство

112. **(a).** Аксиомы скалярного произведения. Определения евклидова линейного пространства и евклидова точечного пространства. Примеры евклидовых пространств. Неравенство Коши—Буняковского. Длина вектора, угол между векторами в евклидовом пространстве. Расстояние между точками. Неравенства треугольника. Изоморфизм евклидовых пространств.

113. **(a).** Ортогональные векторы и их свойства. Линейная независимость попарно ортогональных векторов. Ортонормированные системы векторов. Ортонормированный базис, его построение. Вычисление координат векторов в ортонормированном базисе.

114. **(a).** Двумерное евклидово точечное пространство: евклидова плоскость. Различные типы уравнений прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

115. **(b).** Найти ортогональную проекцию точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ и точку, симметричную точке M_1 относительно этой прямой.

116. **(a).** Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$.

117. **(a).** Найти угол между прямыми на плоскости, заданными уравнениями $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$.

118. **(b).** Найти необходимое и достаточное условие, при котором прямые на плоскости $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$: (a) пересекаются в единственной точке; (b) параллельны, но не совпадают; (c) совпадают.

119. **(a).** Найти условие, при котором прямые на плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ пересекаются (в единственной точке), и радиус-вектор точки пересечения этих прямых.

120. **(a).** Трехмерное евклидово точечное пространство. Различные типы уравнений плоскости в пространстве. Расстояние от точки до плоскости.

121. **(b).** Найти ортогональную проекцию точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ и точку, симметричную точке M_1 относительно этой плоскости.

122. **(a).** Записать уравнение плоскости $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ в виде $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

123. **(b).** Найти необходимое и достаточное условие, при котором плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$: (a) пересекаются по прямой; (b) параллельны, но не совпадают; (c) совпадают.

124. **(a).** Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_2$.

125. **(b).** Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$.

126. **(a).** Различные типы уравнений прямой в пространстве: векторное параметрическое, каноническое, система параметрических уравнений в координатах. Прямая как пересечение двух плоскостей.

127. **(a).** Записать уравнение прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ в виде $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

128. **(b).** Записать уравнение прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

129. **(b).** В трехмерном евклидовом пространстве найти ортогональную проекцию точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ и точку, симметричную точке M_1 относительно этой прямой.

130. **(c).** В трехмерном евклидовом пространстве найти расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

131. **(c).** Найти расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

132. **(c).** Прямая задана как пересечение двух плоскостей $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$. Записать уравнение этой прямой в виде $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

133. **(c).** Прямая задана как пересечение двух плоскостей $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$. Записать уравнение этой прямой в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

134. **(b).** Найти необходимое и достаточное условие, при котором прямые в пространстве $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$: (a) пересекаются (т.е. имеют одну общую точку); (b) скрещиваются; (c) параллельны, но не совпадают; (d) совпадают.

135. **(c).** Найти расстояние между параллельными прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}$.

136. **(c).** Найти расстояние между параллельными прямыми $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}_2$.

137. **(b).** Даны прямая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ и плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$. Найти необходимое и достаточное условие того, что: (a) прямая и плоскость пересекаются (имеют единственную общую точку); (b) прямая и плоскость параллельны (не имеют общих точек); (c) прямая лежит в плоскости.

138. **(a).** Найти радиус-вектор точки пересечения прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ с плоскостью $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

139. **(c).** Найти радиус-вектор точки пересечения прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ с плоскостью $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

140. **(a).** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

141. **(a).** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

142. **(a).** Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ и точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, не лежащую на этой прямой.

143. **(b).** Составить уравнение проекции прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ на плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ при условии, что прямая не перпендикулярна плоскости.

144. **(b).** Составить уравнение прямой, пересекающей прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ под прямым углом и проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, не лежащую на данной прямой (перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую).

145. **(b).** Составить уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$ и проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$, не лежащую ни на одной из этих прямых.

146. **(b).** Составить уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$ под прямыми углами (общего перпендикуляра к этим прямым).

147. **(b).** Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$.

148. **(c).** Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{b}_2$.

10. Конические сечения

149. **(b).** Парабола, эллипс, гипербола как конические сечения. Уравнения конических сечений, отнесенные к вершине.

150. **(b).** Каноническое уравнение параболы. Директориальное свойство параболы. Касательная к параболе. Оптическое свойство параболы.

151. **(b).** Каноническое уравнение эллипса. Фокусы, эксцентриситет, директрисы эллипса. Фокальное свойство эллипса. Директориальное свойство эллипса. Касательная к эллипсу. Оптическое свойство параболы.

152. **(b).** Каноническое уравнение гиперболы. Фокусы, эксцентриситет, директрисы, асимптоты гиперболы. Фокальное свойство гиперболы. Директориальное свойство гиперболы. Касательная к гиперболе. Оптическое свойство гиперболы.

153. **(a).** Полярные уравнения конических сечений.

154. **(b).** Пусть O — центр эллипса, a, b — его полуоси, A, B — такие точки эллипса, что прямые OA и OB взаимно перпендикулярны. Доказать, что величина $1/|OA|^2 + 1/|OB|^2$ постоянна для всех возможных пар точек A и B.

155. **(b).** Пусть O — центр эллипса, a, b — его полуоси, A, B — такие точки эллипса, что прямые OA и OB взаимно перпендикулярны. Найти наибольшее и наименьшее значения длины отрезка AB.

156. **(b).** Вычислить эксцентриситет равносторонней гиперболы (т.е. гиперболы, полуоси которой равны).

157. **(b).** Доказать, что для данной гиперболы произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная.

158. **(b).** Доказать, что для данной гиперболы площадь параллелограмма, одна из вершин которого лежит на гиперболе, а две стороны лежат на асимптотах, есть величина постоянная.

159. **(b).** Доказать, что вершины гиперболы и четыре точки пересечения ее директрис с асимптотами лежат на одной окружности. Выразить радиус этой окружности через длину действительной полуоси гиперболы.

160. **(b).** Две параболы, оси которых взаимно перпендикулярны, имеют четыре точки пересечения. Доказать, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

161. **(b).** Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам.

162. **(b).** Доказать, что все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь.

163. **(b).** Доказать, что касательные в точках пересечения эллипса и гиперболы, имеющих общие фокусы, взаимно перпендикулярны.

164. **(b).** Доказать, что касательные в точках пересечения двух парабол с общим фокусом и противоположно направленными осями взаимно перпендикулярны.

11. Поверхности второго порядка

165. **(a).** Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $\lambda x^2+y^2+z^2=1$, содержащим параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных значениях λ.

166. **(a).** Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $\lambda x^2+y^2+z^2=\lambda$, содержащим параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных значениях λ.

167. **(a).** Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $x^2+y^2-z^2=\lambda$, содержащим параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных значениях λ.

168. **(a).** Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $x^2+\lambda(y^2+z^2)=1$, содержащим параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных значениях λ.

169. **(a).** Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $x^2+\lambda(y^2+z^2)=\lambda$, содержащим параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных значениях λ.

170. **(a).** Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $\lambda x^2 + y^2 = z$, содержащим параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных значениях λ.

171. **(a).** Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $\lambda(x^2 + y^2) = z$, содержащим параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных значениях λ.

172. **(a).** Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $x^2 + y^2 = \lambda$, содержащим параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных значениях λ.

173. **(a).** Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $x^2 - y^2 = \lambda$, содержащим параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных значениях λ.

174. **(a).** Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz. Как называется поверхность? Изобразить поверхность и указанные проекции.

175. **(a).** Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz. Как называется поверхность? Изобразить поверхность и указанные проекции.

176. **(a).** Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz. Как называется поверхность? Изобразить поверхность и указанные проекции.

177. **(a).** Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ спроектированы на плоскость Oxz. Как называется поверхность? Изобразить поверхность и указанные проекции.

178. **(a).** Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ спроектированы на плоскость Oxy. Как называется поверхность? Изобразить поверхность и указанные проекции.

179. **(a).** Найти уравнения проекций линии пересечения поверхностей $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 36$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия?

180. **(a).** Найти уравнения проекций линии пересечения поверхностей $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ и $3x^2 + 5y^2 + 6^2 = 10$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия?

181. **(a).** Найти уравнения проекций линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ и $x^2 - y^2 = 2z$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия? Найти ее параметрические уравнения.

182. **(b).** Найти уравнение семейства прямолинейных образующих поверхности $x^2 - y^2 = 1$.

183. **(b).** Найти уравнение семейства прямолинейных образующих поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

184. **(b).** Найти прямолинейные образующие поверхности $4x^2 - y^2 = 16z$, пересекающиеся в точке $M(2, 0, 1)$.

185. **(c).** Две прямолинейные образующие поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ пересекаются в точке, принадлежащей плоскости $z = h$. Найти угол между ними.

186. **(c).** Доказать, что проекции прямолинейных образующих поверхности $x^2 - y^2 = 2z$ на плоскость Oxz касаются линии $x^2 = 2z$.

187. **(c).** Доказать, что проекции прямолинейных образующих поверхности $x^2+y^2-z^2 = 1$ на плоскость Oxy касаются линии $x^2 + y^2 = 1$.

12. Определители

188. **(a).** С какими знаками входят в формулу полного разложения определителя матрицы пятого порядка слагаемые $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}$, $a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}$?

189. **(c).** Вычислить определитель порядка n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

190. **(c).** Вычислить определитель порядка n:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

191. **(c).** Вычислить определитель порядка n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

192. **(c).** Вычислить определитель порядка n:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

193. **(c).** Вычислить определитель порядка n (определитель Вандермонда):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

194. **(c).** Пусть все элементы матрица A являются дифференцируемыми функциями переменной t. Доказать формулу дифференцирования определителя этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \dots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots a_{2n}(t) \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}(t) & \dots a_{nn}(t) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & \dots a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots a_{2n}(t) \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}(t) & \dots a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \dots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots a_{2n}(t) \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ a'_{n1}(t) & \dots a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

195. **(c).** Пусть A — квадратная матрица порядка n, b_{ij} — минор ее элемента a_{ij}, $B = (b_{ij})$. Доказать, что $\det B = (\det A)^{n-1}$.

196. **(c).** Пусть A — квадратная матрица порядка n, c_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, $C = (c_{ij})$. Доказать, что $\det C = (\det A)^{n-1}$.

197. **(b).** Матрица называется эрмитовой, если $A = \bar{A}^T$. Доказать, что определитель эрмитовой матрицы — вещественное число.

198. **(b).** Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.

199. **(c).** Обзор теории определителей, построенной на основе аксиоматического определения. Доказать формулу разложения определителя по первому столбцу и теорему об определителе произведения матриц.

200. **(c).** Обзор теории определителей, построенной на основе формулы разложения по первому столбцу. Доказать формулу полного разложения определителя и теорему об определителе произведения матриц.

201. **(c).** Обзор теории определителей, построенной на основе формулы полного разложения. Доказать линейность и кососимметричность определителя и теорему об определителе произведения матриц.