Лекция 1

1. О содержании курса

(1) Элементарные представления о координатном методе.
(2) Комплексные числа.
(3) Алгебра матриц. Теория систем линейных уравнений.
(4) Теория линейных пространств.
(5) Аффинное пространство и аффинная геометрия в размерностях 2 и 3.
(6) Евклидово пространство и евклидова геометрия в размерностях 2 и 3.
(7) Теория кривых и поверхностей 2 порядка.
(8) Теория определителей.

2. Обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.
$\forall x$ — квантор всеобщности («для любых x»).
$\exists x$ — квантор существования («существует такой x, что...»).
$\exists! x$ — квантор единственности («существует единственный x, такой что...»).
$\Longrightarrow$ — импликация («следовательно»).
$\Longleftrightarrow$ — эквивалентность.
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$ — факториал натурального числа n.
Двойной факториал:

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1) \cdot (2n+1),$$
$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-2) \cdot (2n).$$

Суммы и произведения:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i,$$

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

3. О построении геометрии

Система аксиом Евклида—Гильберта.
Основные понятия: точка, прямая, [плоскость].
Отношения между понятиями:

(1) инцидентность («точка лежит на прямой», «прямая проходит через точку» и т. п.; 8 аксиом);
(2) порядок (понятие «лежать между»; 4 аксиомы);
(3) конгруэнтность (движение, равенство; 5 аксиом);
(4) параллельность (1 аксиома);

(5) непрерывность (2 аксиомы).

Недостатки системы аксиом Гильберта

(1) содержит большое число аксиом;
(2) трудно обобщается на многомерный случай (при попытке обобщения происходит добавление новых исходных понятий и аксиом);
(3) нигде в математике не используется, кроме элементарной геометрии.

План действий

(1) На основе наглядных представлений сформулировать алгебраические принципы решения геометрических задач, пытаясь ограничиться возможно меньшим числом исходных (неопределяемых) понятий и отношений между ними.
(2) Полученные принципы объявить аксиомами.
(3) На основе полученной системы аксиом построить геометрическую теорию, легко допускающую обобщения.

4. Системы координат

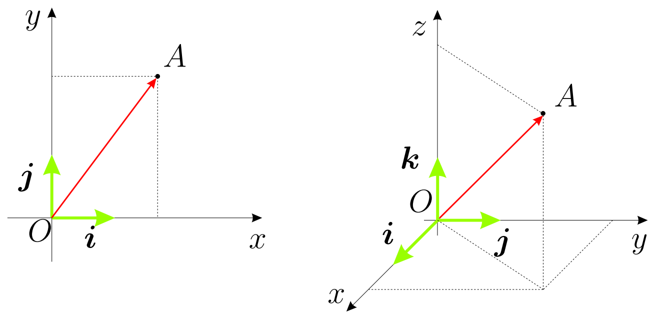
Система координат — объект, позволяющий описывать геометрический объект алгебраическими средствами.

4.1. **Декартова прямоугольная система координат.**

O — начало координат, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные направляющие векторы координатных осей (орты); другое обозначение $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

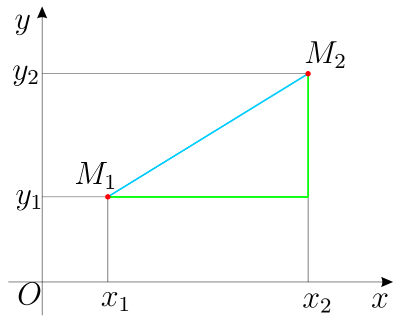
x — абсцисса, y — ордината, z — аппликата.

$\overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор точки A. Другое обозначение координат x_1, x_2, x_3.



Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости:

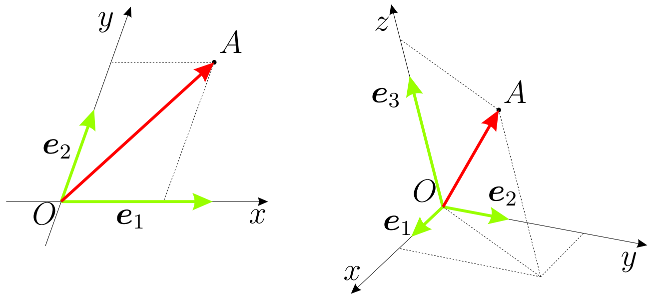
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



В пространственном случае аналогично: для точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

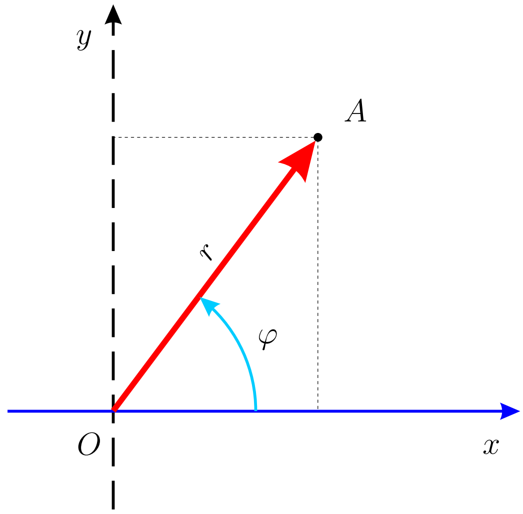
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

4.2. **Декартова косоугольная система координат.**



Углы между векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ могут быть не прямыми, длины векторов могут быть $\neq 1$.

4.3. **Полярная система координат на плоскости.**



(r, φ) — полярные координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

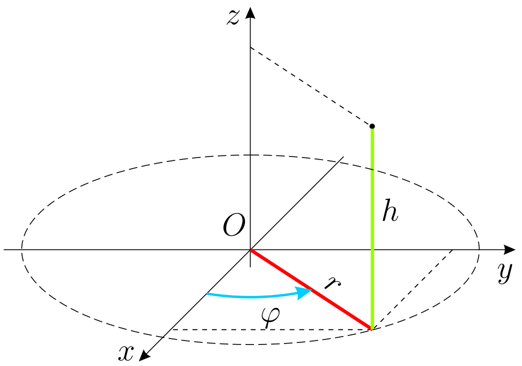
Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Удобно считать, что φ определено с точностью до добавления $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; тогда пишем

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

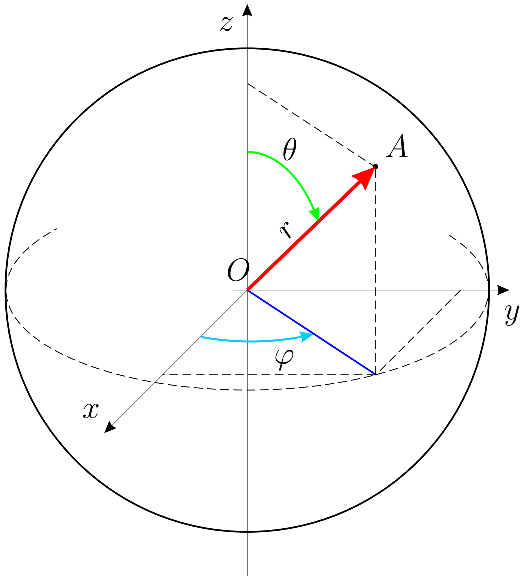
4.4. **Цилиндрическая система координат в пространстве.**



(r, φ, h) — цилиндрические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = h, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ h = z. \end{cases}$$

4.5. **Сферическая система координат в пространстве.**



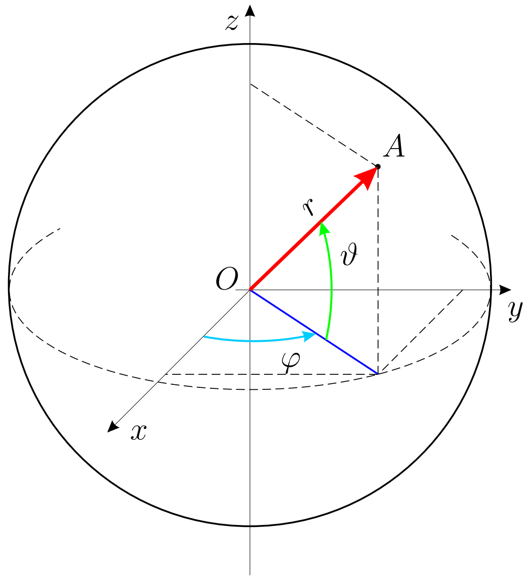
(r, θ, φ) — сферические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

Географические координаты — вариант сферических.



(r, ϑ, φ) — географические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z = r\sin\vartheta. \end{cases}$$

Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

5. Уравнения линий и поверхностей

Уравнение линии на плоскости — уравнение вида

$$F(x, y) = 0,$$

каждое решение (x, y) которого представляет собой координаты некоторой точки линии, причем для каждой точки линии найдется некоторое решение данного уравнения.

Уравнение поверхности в пространстве содержит 3 переменные:

$$G(x, y, z) = 0.$$

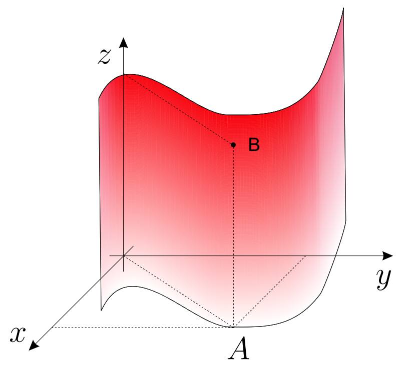
Вместо прямоугольных декартовых координат можно использовать любые другие.

Вместо уравнений можно рассматривать неравенства.

Цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oz, описывается уравнением вида

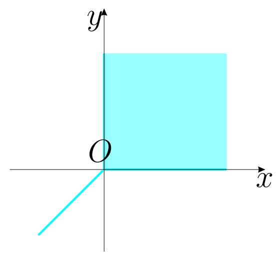
$$G(x, y) = 0.$$

Это же уравнение является одновременно уравнением направляющей.



Уравнение может описывать геометрический объект, не соответствующий интуитивному представлению о линии (поверхности):

$$x - |x| - y + |y| = 0.$$



5.1. **Уравнения прямых на плоскости.**

Уравнение прямой — линейное уравнение:

$$Ax + By = C.$$

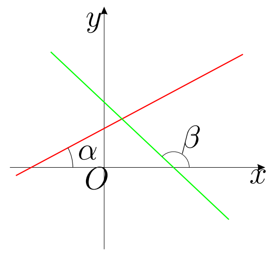
Уравнение можно умножить на любое ненулевое число.

1. Уравнение с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b.$$

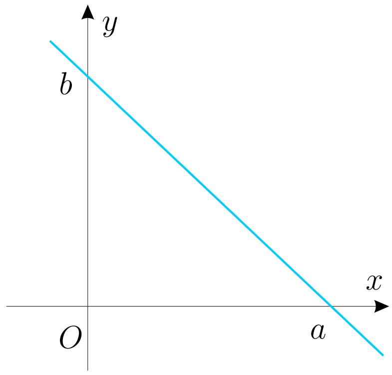
k — угловой коэффициент прямой:

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$



2. Уравнение прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

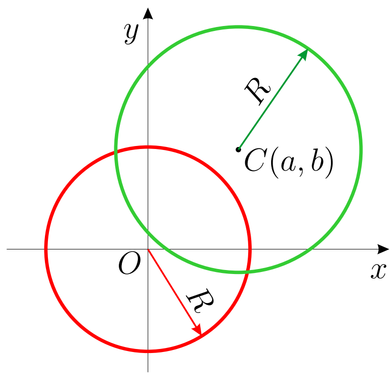


5.2. **Окружность.** Окружность радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

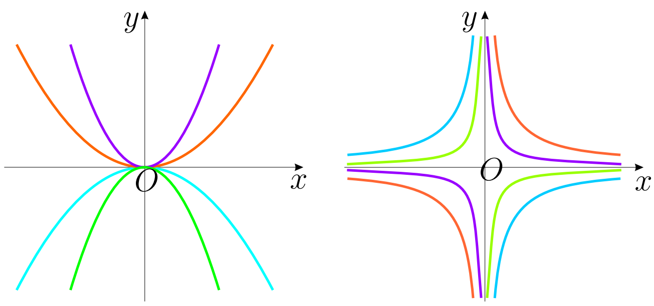
Окружность радиуса R с центром в точке $C(a, b)$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$



5.3. **Парабола и гипербола.**

$$y = ax^2, \qquad y = \frac{a}{x}.$$



5.4. **Эллипс.** Эллипс — это множество точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек плоскости (фокусов) постоянна.

Фокусы $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c > 0$.

Произвольная точка эллипса $M(x, y)$.

Расстояния от M до фокусов:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тогда уравнение эллипса имеет вид

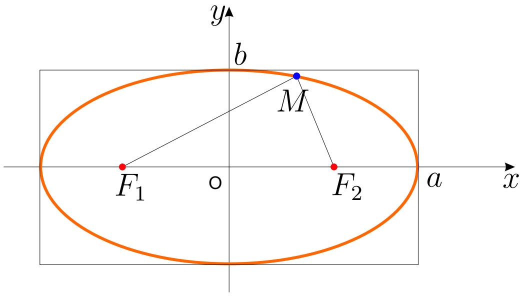
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

После уничтожения радикалов получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

или, введя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$



a, b — полуоси эллипса.
F_1M, F_2M — фокальные радиусы.
$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ — эксцентриситет.

Мы получили, что координаты каждой точки эллипса удовлетворяют уравнению (1). Проверим, что любое решение уравнения (1) представляет точку эллипса.

Пусть (x, y) — решение (1); ясно, что $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. Тогда

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$
$$= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{x^2\varepsilon^2 + 2x\varepsilon a + a^2} =$$
$$= \sqrt{(x\varepsilon + a)^2} = |x\varepsilon + a| = a + x\varepsilon.$$

Аналогично получаем

$$F_2M = a - x\varepsilon.$$

Поэтому

$$F_1M + F_2M = 2a,$$

т.е. точка с координатами (x, y) лежит на эллипсе.

6. Параметрические уравнения

6.1. **Параметрические уравнения линий.** Линия на плоскости может быть задана как множество точек, координаты которых вычисляются по формулам

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Этот способ пригоден и для задания линий в пространстве:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

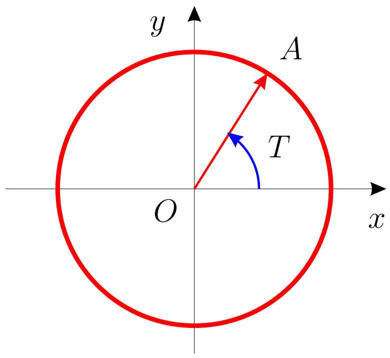
С точки зрения механики параметрические уравнения линии — это закон движения материальной точки, параметр t — время.

Пример.

Параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

Параметр t представляет собой угол между осью Ox и радиус-вектором точки окружности.



Пример.

Параметрические уравнения эллипса с полуосями a, b:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

Здесь параметр t не является углом между осью Ox и радиус-вектором точки окружности!

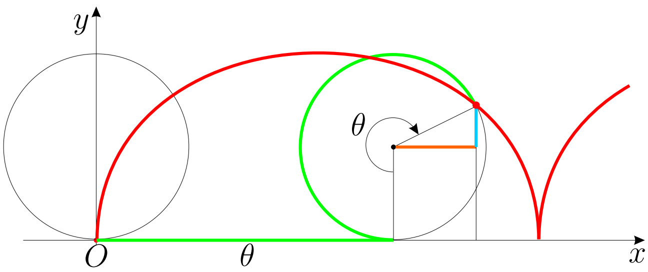
Пример.

Циклоида — это траектория точки обода катящегося по прямой колеса.

Радиус колеса R, параметр — угол θ поворота колеса.

Параметрические уравнения циклоиды

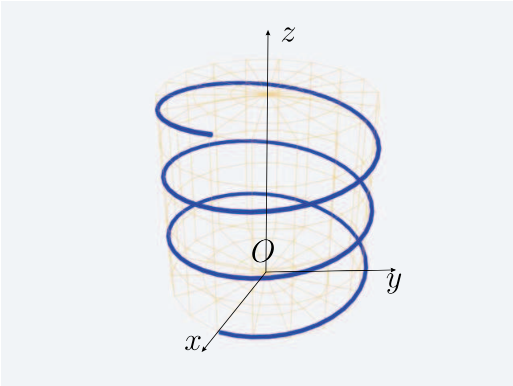
$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta).$$



Пример.

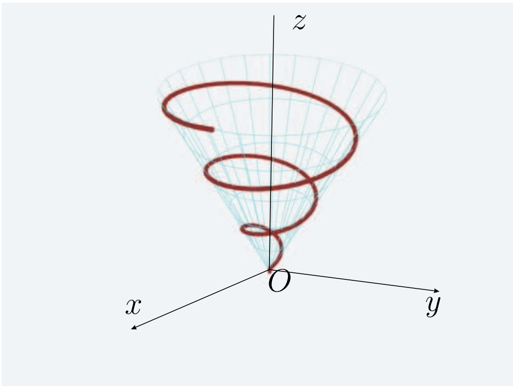
Винтовая линия. Точка совершает два одновременных движения: равномерное вращение с угловой скоростью ω в плоскости Oxy по окружности радиуса R и равномерное поступательное движение вдоль оси Oz со скоростью c:

$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t, \quad z = ct.$$



Пример.
Коническая винтовая линия.

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t.$$



6.2. **Параметрическое задание поверхностей.** Поверхности задаются:

(1) уравнениями вида $F(x, y, z) = 0$;
(2) параметрическими уравнениями вида

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2;$$

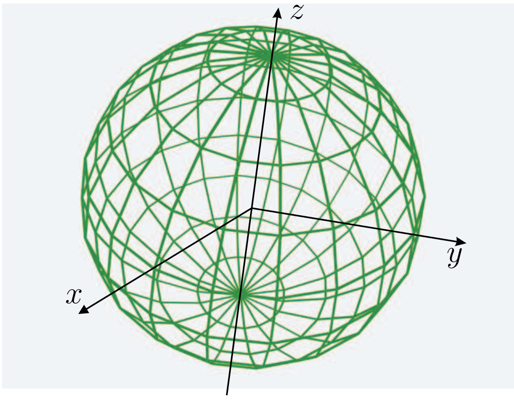
параметры u, v — внутренние координаты поверхности;
(3) как графики функции двух переменных: $z = f(x, y)$.

Пример.
Сфера радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Параметрическое представление:

$$\begin{cases} x = R\cos u \sin v, \\ y = R\sin u \sin v, \\ z = R\cos v, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant u < 2\pi, \\ 0 \leqslant v \leqslant \pi. \end{cases}$$



Представить сферу как график функции невозможно, но это удается сделать отдельно для нижней и верхней полусфер:

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

7. Пересечения и проекции

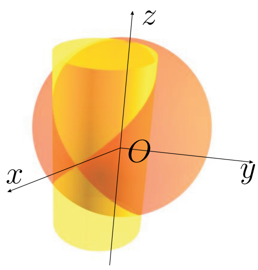
7.1. **Пересечения поверхностей.**

Линии (кривые) в пространстве можно задавать как пересечение двух поверхностей:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Пример.

Кривая Вивиани — пересечение цилиндра радиуса R и сферы радиуса $2R$, центр которой лежит на поверхности цилиндра.



Получим уравнения кривой Вивиани.

Уравнения сферы и цилиндра:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2, \qquad (x - R)^2 + y^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 = 2Rx.$$

Отсюда

$$z^2 = 4R^2 - 2Rx.$$

Положим

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t.$$

Тогда

$$x^2 + y^2 = 2Rx \iff r^2 = 2Rr\cos t \iff r = 2R\cos t.$$

Можно записать выражения для x и y:

$$x = r\cos t = 2R\cos^2 t = R(1+\cos 2t),$$
$$y = r\sin t = 2R\sin t\cos t = R\sin 2t.$$

Параметр t изменяется в диапазоне

$$0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Теперь можно найти выражение для z:

$$z^2 = 4R^2 - 2Rx = 4R^2\sin^2 t \iff z = \pm 2R\sin t.$$

Можно убрать $\pm$, если разрешить параметру t изменяться в диапазоне

$$0 \leqslant t < 2\pi.$$

Итак, окончательный результат:

$$\begin{cases} x = R(1+\cos 2t), \\ y = R\sin 2t, \\ z = 2R\sin t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

Пример.

Кривая получена как пересечение сферы и плоскости:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 1.$$

Найти параметрическое представление этой линии.

Подставим параметрическое представление сферы

$$x = \cos u\sin v, \quad y = \sin u\sin v, \quad z = \cos v$$

в уравнение плоскости:

$$(\cos u + \sin u)\sin v = 1 - \cos v \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \cos u + \sin u.$$

Теперь находим

$$\cos v = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}} = -\frac{2\sin 2u}{2+\sin 2u},$$
$$\sin v = \frac{2\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}} = \frac{2\,(\cos u + \sin u)}{2+\sin 2u}$$

и окончательно

$$x = \cos u\sin v = \frac{2\,(\cos u + \sin u)\cos u}{2+\sin 2u},$$
$$y = \sin u\sin v = \frac{2\,(\cos u + \sin u)\sin u}{2+\sin 2u},$$
$$z = \cos v = -\frac{2\sin 2u}{2+\sin 2u}.$$

7.2. **Проекции.** Проекцией точки $M(x,y,z)$ на плоскость Oxy является точка $N(x,y)$. Таким образом, проектирование — это игнорирование одной из координат.

Если линия задана как пересечение двух поверхностей $F(x,y,z)=0$ и $G(x,y,z)=0$, то уравнение ее проекции на плоскость Oxy получается исключением z из этих уравнений.

Пример.

Проекция кривой Вивиани на плоскость Oxy — это кривая с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R(1+\cos 2t), \\ y = R\sin 2t. \end{cases}$$

Исключая параметр t, получаем уравнение окружности

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2.$$

Пример.

Проекция линии пересечения сферы и плоскости,

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad x+y+z=1,$$

имеет уравнение

$$x^2+y^2+(1-(x+y))^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+xy+y^2-x-y=0.$$

8. Метод математической индукции

Утверждение $P(n)$, зависящее от натурального параметра n, считается доказанным, если:

(1) доказано утверждение $P(1)$;
(2) для любого $n \in \mathbb{N}$ из предположения, что верно $P(n)$, выведено, что верно также $P(n+1)$.

$P(n)$ — предикат, n — параметр индукции.

Доказательство $P(1)$ — базис индукции.

Предположение, что $P(n)$ верно, — индуктивное предположение.

Доказательство $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ — индукционный шаг.

Пример.

Докажем методом индукции формулу

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(2n+1)(n+1).$$

Базис индукции:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot(2\cdot 1+1)(1+1)$$

— верное соотношение.

Предположение индукции состоит в том, что подлежащая доказательству формула верна при некотором значении n.

Индукционный шаг сводится к проверке того, что при $n+1$ формула также верна, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)\Big(2(n+1)+1\Big)\Big((n+1)+1\Big) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2).$$

Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(2n+1)(n+1) + (n+1)^2 =$$
$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+n}{6} + n + 1\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) =$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2).$$

Таким образом, формула доказана.

9. Комбинаторика

Комбинаторика изучает конечные множества и связанные с ними операции.

Пусть N — конечное множество, состоящее из n элементов; число n называется мощностью множества N, $\operatorname{card} N = n$.

$x \in N$ — x является элементом множества N.

$x \notin N$ — x не является элементом множества N.

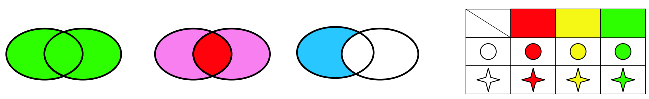
$N \subset M$ — множество N является подмножеством множества M, т.е.

$$\forall x \in N \Longrightarrow x \in M.$$

$\varnothing$ — пустое множество; $\operatorname{card} \varnothing = 0$.

Основные операции над множествами:

(1) объединение $N \cup M = \{x : x \in N \text{ и } x \in M\}$,
(2) пересечение $N \cap M = \{x : x \in N \text{ или } x \in M\}$,
(3) разность $N \setminus M = \{x : x \in N \text{ и } x \notin M\}$,
(4) декартово произведение $N \times M = \{(x, y) : x \in N,\ x \in M\}$.



9.1. **Принцип произведения.**

$$\operatorname{card}(N \times M) = (\operatorname{card} N) \cdot (\operatorname{card} M).$$

Пример.

Найдем количество различных трехзначных чисел, не содержащих одинаковых цифр:

$$\underbrace{\quad A \quad}_{\text{9 способов}} \qquad \underbrace{\quad B \quad}_{\text{9 способов}} \qquad \underbrace{\quad C \quad}_{\text{8 способов}}$$

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

9.2. **Принцип суммы.** Если N и M — непересекающиеся конечные множества, $N \cap M = \varnothing$, то

$$\operatorname{card}(N \cup M) = \operatorname{card} N + \operatorname{card} M.$$

В случае непустого пересечения

$$\operatorname{card}(N \cup M) = \operatorname{card} N + \operatorname{card} M - \operatorname{card}(N \cap M).$$

Пример.

Найдем количество различных трехзначных чисел, содержащих хотя бы две одинаковые цифры.

Всего имеется 900 трехзначных чисел. Каждое из них либо имеет одинаковые цифры, либо нет. Поэтому чисел, содержащих одинаковые цифры, имеется

$$900 - 648 = 252.$$

9.3. **Упорядоченная выборка без повторений: размещения.** Имеется множество N, $\operatorname{card} N = n$. Требуется выбрать из него k элементов с учетом порядка; выбранный элемент в множество не возвращается. Количество различных выборок равно

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В частности, количество различных перестановок множества N

$$P_n = n!.$$

Пример.

Сколькими способами можно из группы в 20 студентов выбрать старосту и профорга?

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380.$$

9.4. **Упорядоченная выборка с повторениями: размещения с повторениями.** Имеется множество N, $\operatorname{card} N = n$. Требуется выбрать из него k элементов с учетом порядка; выбранный элемент возвращается в множество. Количество различных выборок равно

$$\bar{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \dots n}_{k \text{ сомножителей}} = n^k.$$

Пример.

Сколькими способами можно из группы в 20 студентов выбрать «дежурного по мелу» и «дежурного по тряпке»?

$$\bar{A}_{20}^2 = 20^2 = 400.$$

9.5. **Неупорядоченная выборка без повторений: сочетания.** Имеется множество N, $\operatorname{card} N = n$. Требуется выбрать из него k элементов без учета порядка; выбранный элемент в множество не возвращается. Обозначим количество всех таких выборок C_n^k.

Выборка объема k может быть упорядочена $k!$ способами. Согласно принципу произведения

$$C_n^k \cdot k! = A_n^k,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Числа C_n^k называются также биномиальными коэффициентами; другое обозначение:

$$\binom{n}{k} = C_n^k.$$

Пример.

Сколькими способами можно из группы в 20 студентов выбрать двух дежурных?

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$$

9.6. **Свойства биномиальных коэффициентов.**

$$1. \qquad C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$$

$$2. \qquad C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{k \text{ сомножителей}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}_{k \text{ сомножителей}}}.$$

$$3. \qquad C_n^{n-k} = C_n^k.$$

◀ $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$. ▶

$$4. \qquad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

$$◀ \quad C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!(n-k) + n!(k+1)}{k!(n-k-1)!(k+1)(n-k)} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}. \quad ▶$$

9.7. **Треугольник Паскаля.**

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&& C_0^0 \\
&&&&&&& \swarrow && \searrow \\
&&&&&& C_1^0 &&&& C_1^1 \\
&&&&& \swarrow && \searrow && \swarrow && \searrow \\
&&&& C_2^0 &&&& C_2^1 &&&& C_2^2 \\
&&& \swarrow && \searrow && \swarrow && \searrow && \swarrow && \searrow \\
&& C_3^0 &&&& C_3^1 &&&& C_3^2 &&&& C_3^3 \\
& \swarrow && \searrow && \swarrow && \searrow && \swarrow && \searrow && \swarrow && \searrow \\
C_4^0 &&&& C_4^1 &&&& C_4^2 &&&& C_4^3 &&&& C_4^4
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccccccccccccccccc}
n=0 &&&&&&&&& 1 \\
n=1 &&&&&&&& 1 && 1 \\
n=2 &&&&&&& 1 && 2 && 1 \\
n=3 &&&&&& 1 && 3 && 3 && 1 \\
n=4 &&&&& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 \\
n=5 &&&& 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \\
n=6 &&& 1 && 6 && 15 && 20 && 15 && 6 && 1 \\
n=7 && 1 && 7 && 21 && 35 && 35 && 21 && 7 && 1 \\
n=8 & 1 && 8 && 28 && 56 && 70 && 56 && 28 && 8 && 1
\end{array}$$

9.8. **Бином Ньютона.**

Теорема.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k +$$

$$+ \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n. \qquad (2)$$

◀ Доказательство проведем методом индукции.

База индукции:

$$(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b.$$

Предположение индукции состоит в том, что формула (2) справедлива при некотором значении n. Наша задача — пользуясь формулой (2), вывести ее справедливость для показателя степени $n+1$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right) =$$

$$= a\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k+1}\ b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^{k+1} =$$

$$= a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_n^k\ a^{n-k+1}\ b^k}_{\substack{k=p+1,\\ k=1\ldots n,\\ p=0\ldots n-1}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\ a^{n-k}\ b^{k+1}}_{k=p} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=0}^{n-1} C_n^{p+1}\ \underline{a^{n-p}\ b^{p+1}} + \sum_{p=0}^{n-1} C_n^p\ \underline{a^{n-p}\ b^{p+1}} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \underbrace{\left(C_n^{p+1} + C_n^p\right)}_{=C_{n+1}^{p+1}}\ a^{n-p}\ b^{p+1} + b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0\ a^{n+1} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} C_{n+1}^{p+1}\ a^{(n+1)-(p+1)}\ b^{p+1}}_{\substack{k=p+1,\\ p=0\ldots n-1,\\ k=1\ldots n}} + C_{n+1}^{n+1}\ b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0\ a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k\ a^{(n+1)-k}\ b^k + C_{n+1}^{n+1}\ b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k\ a^{(n+1)-k}\ b^k. \qquad \blacktriangleright$$

9.9. **Дальнейшие свойства биномиальных коэффициентов.** Взяв в формуле (2) $a = b = 1$, получим

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ 1^{n-k}\ 1^k,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Аналогично, взяв $a = 1$, $b = -1$, находим

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$