Лекция 2

1. Комплексные числа

1.1. **Числовое поле.** Числовое поле — множество чисел, в котором корректны арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление на ненулевое число.

Примеры числовых полей: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Не являются числовыми полями: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Нетривиальный пример: числа вида $a+b\sqrt{2}$, где $a,b\in\mathbb{Q}$, образуют числовое поле:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2},$$

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c-d\sqrt{2}\right)}{\left(c+d\sqrt{2}\right)\left(c-d\sqrt{2}\right)}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}\sqrt{2},$$

причем знаменатель $\neq 0$, а все коэффициенты $\in\mathbb{Q}$.

1.2. **Многочлены.** Пусть $\mathbb{K}$ — некоторое числовое поле.

Одночлен (от одной переменной x) над полем $\mathbb{K}$ — выражение вида ax^k, где $a\in\mathbb{K}$ — коэффициент одночлена, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ — степень одночлена; $\deg(ax^k)=k$.

Многочлен степени n (от одной переменной x) над полем $\mathbb{K}$ — сумма одночленов:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n,$$

где $a_0\neq 0$.

Множество всех многочленов от переменной x над полем $\mathbb{K}$ обозначается $\mathbb{K}[x]$.

Можно рассматривать одночлены и многочлены от нескольких переменных.

Значение многочлена $f(x)$ можно вычислять как при $x\in\mathbb{K}$, так и при $x\notin\mathbb{K}$.

Корень многочлена $f(x)$ — значение x, при котором $f(x)=0$.

Алгебраически замкнутое поле $\mathbb{K}$ — это такое поле, что любой многочлен из $\mathbb{K}[x]$ имеет корень $x\in\mathbb{K}$.

Поле $\mathbb{Q}$ не является алгебраически замкнутым:

$$(x^2-2)\in\mathbb{Q}[x],\qquad x^2-2=0\quad\Longleftrightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}.$$

Поле $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым: многочлен x^2+1 корней не имеет.

Формальное решение проблемы — ввести «новое число» i, обладающее свойством $i^2=-1$; тогда

$$x^2+1=0\quad\Longleftrightarrow\quad x=\pm i.$$

Пример.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2+4x+5=0.$$

Имеем:

$$D=4^2-4\cdot1\cdot5=-4=(-1)\cdot4,$$

$$\sqrt{D}=2i,\quad x_{1,2}=\frac{-4\pm 2i}{2}=-2\pm i.$$

Теорема Виета также справедлива:

$$x_1 + x_2 = (-2 - i) + (-2 + i) = -4,$$
$$x_1 x_2 = (-2 - i)(-2 + i) = (-2)^2 - i^2 = 5.$$

Отметим, что мы рассматривали уравнение с вещественными коэффициентами. Числа вида $a + bi$ называются комплексными числами.

1.3. **Определение комплексных чисел.**

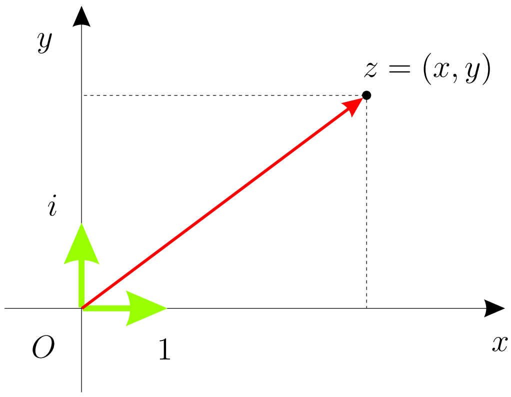
Комплексное число z — упорядоченная пара вещественных чисел (x, y):

$$z = (x, y).$$

$x = \operatorname{Re} z$ — вещественная часть z.
$y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть z.
Равенство комплексных чисел:

$$z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re} z_1 &= \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 &= \operatorname{Im} z_2. \end{aligned} \right\}$$

Комплексное число $z = (x, y)$ можно изобразить точкой координатной плоскости Oxy либо радиус-вектором этой точки. Координатная плоскость называется при такой интерпретации плоскостью комплексных чисел, ось Ox — вещественной осью, ось Oy — мнимой осью.



Арифметические операции над комплексными числами $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$:

(a) сложение:

$$z := z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2);$$

(b) умножение:

$$z := z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Свойства арифметических операций:

1.	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	(коммутативность сложения);
2.	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	(ассоциативность сложения);
3.	$z_1 z_2 = z_2 z_1$	(коммутативность умножения);
4.	$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$	(ассоциативность умножения);
5.	$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	(дистрибутивность).

Для чисел вида $z = (x, 0)$ имеем:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2,\ 0),$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2 - 0 \cdot 0,\ x_1 \cdot 0 + 0 \cdot x_2) = (x_1 x_2, 0).$$

Такие комплексные числа при арифметических операциях ведут себя как вещественные числа. Поэтому можно отождествить комплексное число $z = (x, 0)$ с вещественным числом x и считать множество вещественных чисел подмножеством множества комплексных чисел.

Рассмотрим мнимые числа, $z = (0, y)$. Имеем:

$$(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2).$$

Произведение вещественного и мнимого числа:

$$x \cdot (0, y) = (x, 0) \cdot (0, y) = (x \cdot 0 - 0 \cdot y,\ x \cdot y + 0 \cdot 0) = (0, xy);$$

поэтому можно считать, что мнимое число есть произведение вещественного числа и мнимой единицы:

$$(0, y) = y \cdot (0, 1).$$

Произведение двух мнимых чисел:

$$(0, y_1) \cdot (0, y_2) = (0 \cdot 0 - y_1 \cdot y_2,\ 0 \cdot y_2 + y_1 \cdot 0) = (-y_1 y_2, 0).$$

Отсюда вытекает, что квадрат мнимой единицы представляет собой вещественное число, равное -1:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Мнимую единицу обозначим символом i:

$$i = (0, 1).$$

Тогда для любого $z = (x, y)$ имеем

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y \cdot (0, 1) = x + iy.$$

Это — алгебраическая форма записи комплексного числа.

Пусть $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1$ и $z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$.

Разность $z = z_1 - z_2$ определяется как решение уравнения $z + z_2 = z_1$.

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2),$$
$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Частное $z = z_1/z_2$ определяется решение уравнения $z \cdot z_2 = z_1$.

Для вычисления частного заметим, что

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.$$

Теперь запишем

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$
$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\ \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом, деление возможно на любое ненулевое комплексное число.

В множестве комплексных чисел выполняются операции сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевое число. Таким образом, множество комплексных чисел является полем, которое обозначается $\mathbb{C}$.

Пример.

$$
\begin{gathered}
(3+4i)(7-2i) = 3\cdot 7 - 3\cdot 2i + 4i\cdot 7 - 4i\cdot 2i = 29+22i,\\
\frac{29+22i}{7-2i} = \frac{(29+22i)(7+2i)}{(7-2i)(7+2i)} =\\
= \frac{29\cdot 7 + 29\cdot 2i + 22i\cdot 7 + 22i\cdot 2i}{7^2-(2i)^2} = \frac{159+212i}{53} = 3+4i.
\end{gathered}
$$

1.4. **Сопряжение.** Пусть $z = x+iy$.

Сопряженное к z число: $\bar z = x - iy$.

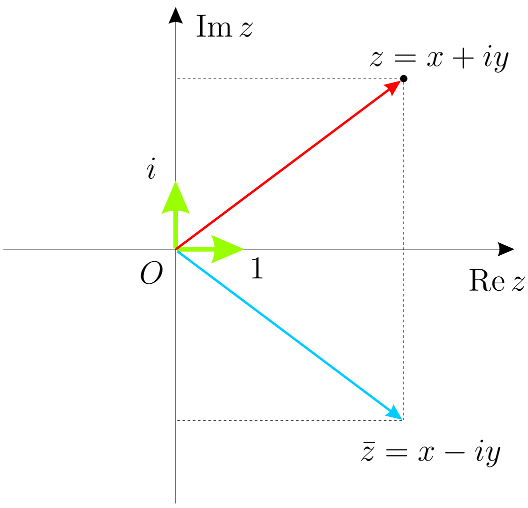
Свойства операции сопряжения:

1. $\bar{\bar z} = z$;
2. $\overline{z_1+z_2} = \bar z_1 + \bar z_2$;
3. $\overline{z_1\cdot z_2} = \bar z_1\cdot \bar z_2$;
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar z_1}{\bar z_2}$.

Легко получить следующие соотношения:

$$
\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar z}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar z}{2i}.
$$

Число $\bar z$, сопряженное к z, геометрически изображается точкой, симметричной точке z относительно вещественной оси.

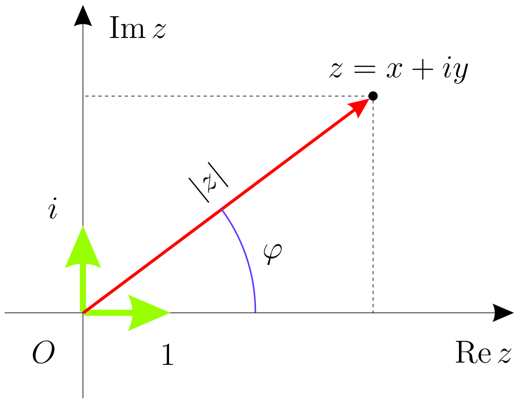


1.5. **Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.** Точка $z=(x,y)$ на плоскости может быть задана не только декартовыми, но и полярными координатами (r,φ):

$$
x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0\leqslant r < +\infty, \quad 0\leqslant \varphi < 2\pi.
$$

Число r называется модулем числа z, φ — аргументом:

$$
r = |z|, \quad \varphi = \arg z.
$$



Аргумент определен неоднозначно (с точностью до слагаемого $2\pi n$), поэтому различают

(1) главное значение аргумента $\arg z \in [0, 2\pi)$ или $\arg z \in (-\pi, \pi]$;

(2) (многозначный) аргумент $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; используются также записи

$$\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}, \quad \operatorname{Arg} z = \varphi \pmod{2\pi}.$$

Комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy = r\cos\varphi + i\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Это — тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Перемножим два числа:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2\Big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2\Big) =$$
$$= r_1r\Big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big).$$

Таким образом,

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

1.6. **Формула Эйлера.** Рассмотрим функцию

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Она обладает свойством

$$f(\varphi_1)\cdot f(\varphi_2) = f(\varphi_1+\varphi_2).$$

Эта функция обозначается $e^{i\varphi}$:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi;$$

это — формула Эйлера.

Средствами анализа можно доказать, что функция $f(\varphi)$ действительно является показательной функцией.

Показательная форма записи комплексных чисел:

$$z = re^{i\varphi},$$

где

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Из формулы Эйлера получаем:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi;$$

складывая/вычитая эти равенства, находим

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

1.7. **Возведение в степень.** Тригонометрическая и показательная формы записи полезны при возведении комплексных чисел в степень:

$$\Big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Эта формула доказана при $n\in\mathbb{N}$, но легко убедиться, что она справедлива и при $n\in\mathbb{Z}$. Действительно, поскольку

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

получаем

$$\Big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^{-n} = \left(\frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right)^n =$$
$$= r^{-n}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = r^{-n}(\cos n\varphi - \sin n\varphi) =$$
$$= r^{-n}\big(\cos(-n\varphi) + \sin(-n\varphi)\big).$$

Те же выкладки в показательной форме намного короче:

$$\frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}} = e^{-i\varphi},$$
$$\left(re^{i\varphi}\right)^{-n} = r^{-n}\left(e^{-i\varphi}\right)^n = r^{-n}e^{-in\varphi}.$$

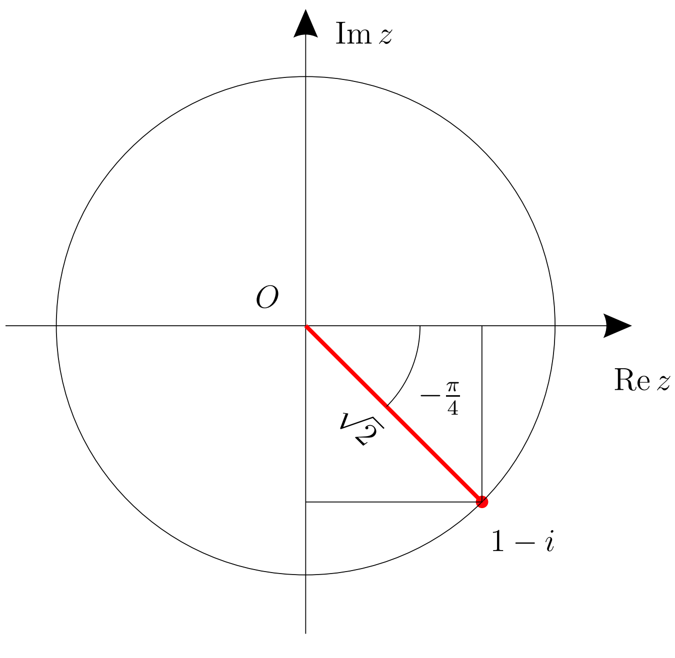
Пример.

Вычислим $(1-i)^{35}$.

Представим число $1-i$ в тригонометрической (показательной) форме:

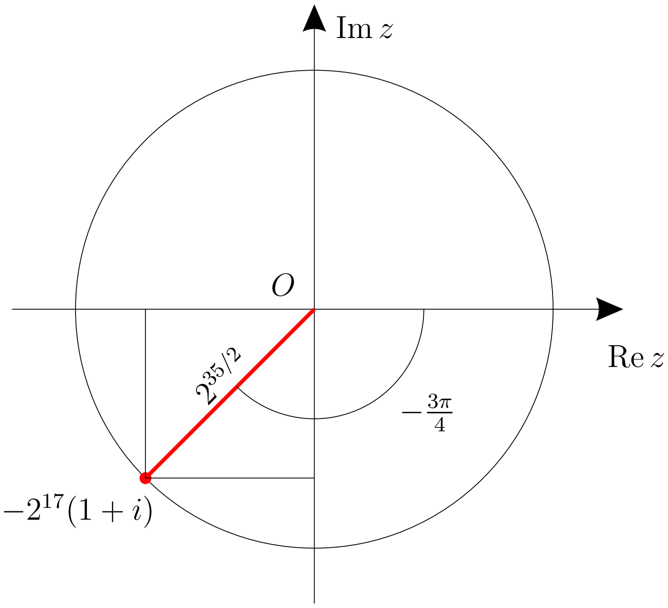
$$\mathrm{Re}(1-i) = 1, \quad \mathrm{Im}(1-i) = -1, \quad |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2},$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4};$$

здесь мы выбрали диапазон значений $\arg z$ в виде $(-\pi,\pi]$.



Имеем:

$$
\begin{aligned}
(1-i)^{35} = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{35} = 2^{\frac{35}{2}} e^{-i\pi\frac{35}{4}} = 2^{\frac{35}{2}} e^{-i\pi\left(8+\frac{3}{4}\right)} = \\
= 2^{\frac{35}{2}} e^{-i\pi\frac{3}{4}} = 2^{\frac{35}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2^{17}(1+i).
\end{aligned}
$$



1.8. **Формула Муавра.** При $r = 1$ получаем формулу Муавра:

$$
(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.
$$

Формула Муавра полезна при тригонометрических преобразованиях.
Пример.

$$
\begin{gathered}
(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi, \\
\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi\cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi\cdot i^2\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi, \\
\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.
\end{gathered}
$$

Пример.
Преобразуем в произведения следующие суммы:

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{k=0}^{n}\cos kt = 1 + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt, \\
S &= \sum_{k=0}^{n}\sin kt = \sin t + \sin 2t + \dots + \sin nt.
\end{aligned}
$$

Запишем

$$
C + iS = \sum_{k=0}^{n}\cos kt + i\sum_{k=0}^{n}\sin kt = \sum_{k=0}^{n}(\cos kt + i\sin kt) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}.
$$

Вычислим сумму получившейся геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{ikt}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}t}-e^{i\frac{n+1}{2}t}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}\right)} =$$

$$= e^{i\frac{nt}{2}}\frac{\left(e^{i\frac{n+1}{2}t}-e^{-i\frac{n+1}{2}t}\right)/2i}{\left(e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}\right)/2i} = e^{i\frac{nt}{2}}\ \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}.$$

В полученных выражениях отделим вещественную и мнимую части:

$$C = \mathrm{Re}\ e^{i\frac{nt}{2}}\ \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}} = \frac{\cos\frac{nt}{2}\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}},$$

$$S = \mathrm{Im}\ e^{i\frac{nt}{2}}\ \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}} = \frac{\sin\frac{nt}{2}\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}.$$

Пример.

Выразим $\cos^5 t$ через кратные углы.

$$\cos^5 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^5 =$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(e^{5it}+5e^{4it}e^{-it}+10e^{3it}e^{-2it}+10e^{2it}e^{-3it}+5e^{it}e^{-4it}+e^{-5it}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5it}+e^{-5it}}{2}+5\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}+10\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\cos 5t + \frac{5}{16}\cos 3t + \frac{5}{8}\cos t.$$

1.9. **Извлечение корней.** Число w называется корнем n-й степени из числа z, если $w^n = z$:

$$w = \sqrt[n]{z} \quad\Longleftrightarrow\quad w^n = z.$$

Представим числа w, z в показательной форме:

$$w = Re^{i\Phi}, \quad z = re^{i\varphi}.$$

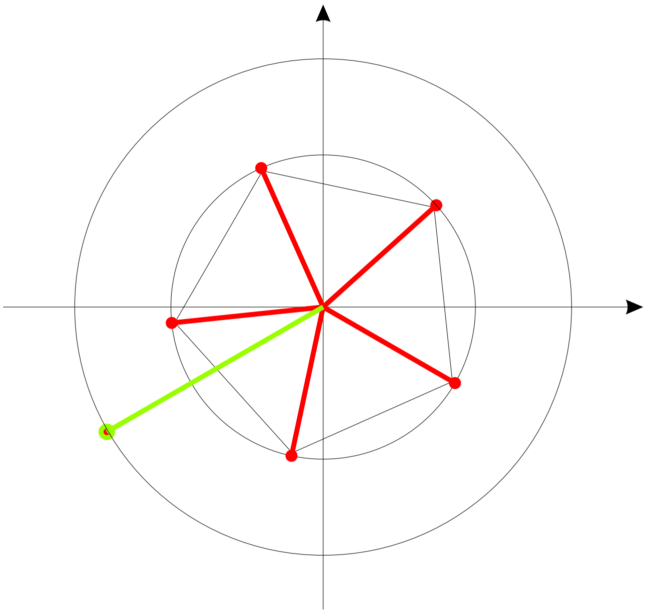
Наша задача — по данным r, φ найти R, Φ.

$$\left(Re^{i\Phi}\right)^n = re^{i\varphi} \quad\Longleftrightarrow\quad R^n e^{in\Phi} = re^{i\varphi} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} R^n = r, \\ n\Phi = \varphi + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} R = r^{1/n}, \\ \Phi = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}, \quad k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

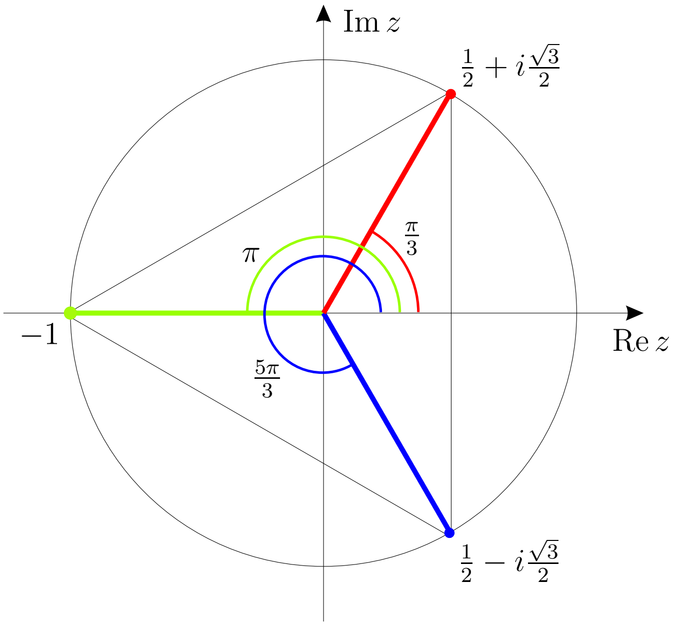
Таким образом, получается не один, а множество корней, однако различными будут только те, которые отвечают значениям $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Геометрически эти корни изображаются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r^{1/n}$.



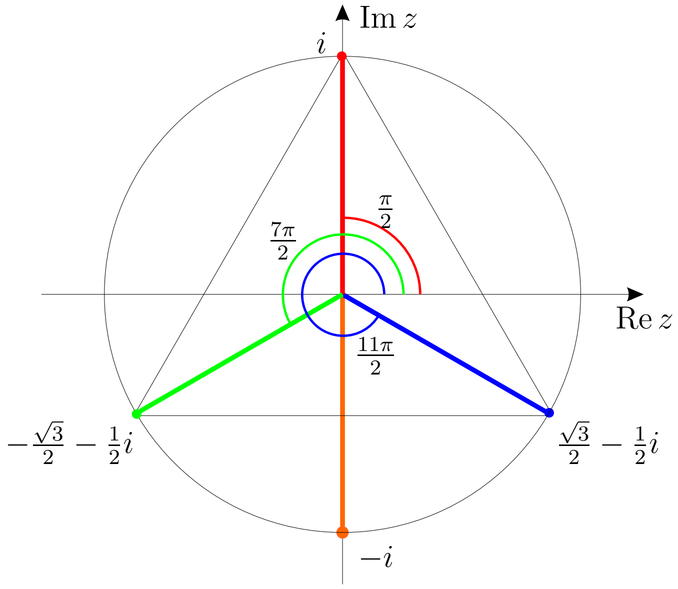
Пример.
$\sqrt[3]{-1}$.

$$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{e^{i\pi}}=e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}}=\begin{cases} e^{i\pi/3} & =\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & k=0,\\ e^{i\pi} & =-1, & k=1,\\ e^{5i\pi/3} & =\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & k=2. \end{cases}$$



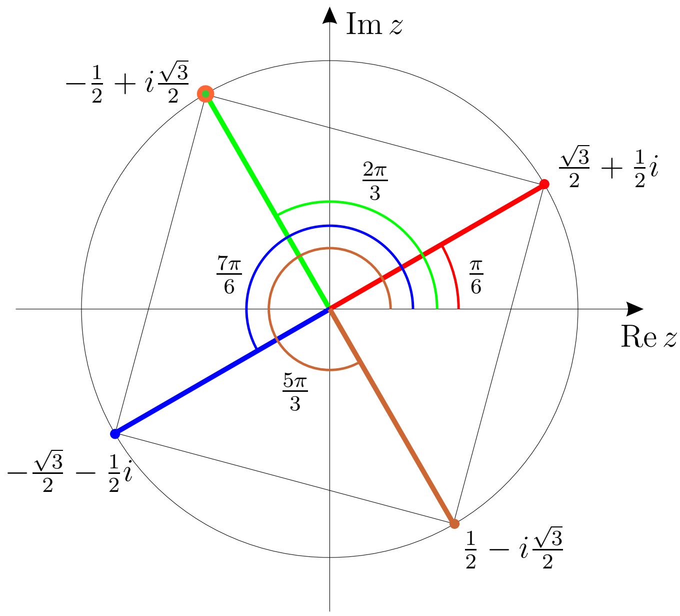
Пример.
$\sqrt[3]{-i}$.

$$\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{e^{3i\pi/2}}=e^{i\frac{3\pi/2+2\pi k}{3}}=e^{i\frac{3\pi+4\pi k}{6}}=\begin{cases} e^{i\pi/2} & =i, & k=0,\\ e^{7i\pi/6} & =-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i, & k=1,\\ e^{11i\pi/6} & =\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i, & k=2. \end{cases}$$



Пример.
$\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt[4]{e^{2i\pi/3}}$.

$$\sqrt[4]{e^{2i\pi/3}}=e^{i\frac{2\pi/3+2\pi k}{4}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)}=\begin{cases} e^{i\pi/6} & =\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i, & k=0,\\ e^{2i\pi/3} & =-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & k=1,\\ e^{7i\pi/6} & =-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}i, & k=2,\\ e^{5i\pi/3} & =\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\sqrt{3}, & k=3.\end{cases}$$



1.10. **Гиперболические функции.** Ранее мы получили соотношения

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Определим гиперболические функции

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\cos ix = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} x = \cos x,$$
$$\sin ix = i \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{sh} ix = i \sin x.$$

Все соотношения для гиперболических функций могут быть получены из соответствующих соотношений для тригонометрических функций:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \cos^2 ix - \left(\frac{1}{i} \sin ix\right)^2 = \cos^2 ix + \sin^2 ix = 1,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 2x = \cos 2ix = \cos^2 ix - \sin^2 ix = \\ = \operatorname{ch}^2 x - (i \sin x)^2 = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y &= \frac{1}{i}(\sin ix + \sin iy) = \\ &= \frac{1}{i} \cdot 2 \sin \frac{i(x+y)}{2} \cos \frac{i(x-y)}{2} = \\ &= \frac{2}{i} \cdot i \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2} = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

2. Многочлены

2.1. **Деление многочленов.**

$$Q(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad A(x) = B(x) Q(x).$$

Будем обозначать степень многочлена нижним индексом: запись $A_n(x)$ означает, что $A(x)$ — многочлен степени n. Тогда

$$\frac{A_n(x)}{B_m(x)} = Q_{n-m}(x).$$

Деление многочленов осуществляется алгоритмом «деления уголком».

$$\begin{array}{l|l}
2x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 13x + 3 & x^2 + 3x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^5 + 6x^4 - 2x^3} & 2x^3 - 2x^2 + 4x - 3 \\
\quad -2x^4 - 2x^3 + 11x^2 & \\
\quad \underline{-2x^4 - 6x^3 + 2x^2} & \\
\qquad\quad 4x^3 + 9x^2 - 13x & \\
\qquad\quad \underline{4x^3 + 12x^2 - 4x} & \\
\qquad\qquad -3x^2 - 9x + 3 & \\
\qquad\qquad \underline{-3x^2 - 9x + 3} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

2.2. **Деление с остатком.** Деление многочленов нацело выполнимо не всегда, однако всегда возможно «деление с остатком».

Пусть требуется разделить многочлен $A_n(x)$ на многочлен $B_m(x)$. Формула деления с остатком имеет вид

$$A_n(x) = \underbrace{B_m(x)}_{\text{делитель}} \cdot \underbrace{Q_{n-m}(x)}_{\text{частное}} + \underbrace{R_k(x)}_{\text{остаток}}, \quad 0 \leqslant k < m.$$

Отметим, что степень остатка строго меньше степени делителя.

Если делить многочлен $A_n(x)$ на многочлен первой степени $B_1(x) = x - c$, то остаток будет многочленом нулевой степени, т.е. числом:

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x) + R.$$

Теорема.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $A_n(x)$ на $x - c$ равен $A_n(c)$.

◀ По формуле деления с остатком

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x) + R.$$

Подставляя сюда $x = c$, получим

$$A_n(c) = \underbrace{(c - c)B_{n-1}(c)}_{=0} + R \quad \Longleftrightarrow \quad R = A_n(c). \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Многочлен $A_n(x)$ делится на $x - c$ без остатка тогда и только тогда, когда c — корень многочлена $A_n(x)$, т.е. $A_n(c) = 0$.

◀ 1. Пусть $A_n(x)$ делится без остатка на $x - c$, т.е.

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x).$$

Подставляя сюда $x = c$, получаем $A_n(c) = 0$.

2. Пусть $A_n(c) = 0$. Разделим $A_n(x)$ на $x - c$. По формуле деления с остатком

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x) + R, \quad \text{где} \quad R = A_n(c) = 0. \qquad \blacktriangleright$$

2.3. **Кратные корни многочлена.** Если $x = c$ — корень многочлена $A_n(x)$, т.е. $A_n(c) = 0$, то многочлен $A_n(x)$ может быть записан в виде

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x).$$

Если число c не является корнем многочлена $B_{n-1}(x)$, то говорят, что $x = c$ — простой корень многочлена $A_n(x)$.

В противном случае можно записать

$$A_n(x) = (x - c)^p B_{n-p}(x),$$

где многочлен $B_{n-p}(x)$ не имеет число c своим корнем. В этом случае говорят, что число $x = c$ является корнем кратности p многочлена $A_n(x)$.

2.4. **Основная теорема алгебры.**

Любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Эквивалентная формулировка: *поле комплексных чисел алгебраически замкнуто.*

Легко доказать, что каждый многочлен степени n в поле $\mathbb{C}$ имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Действительно, рассмотрим многочлен $A_n(z)$. Согласно основной теореме алгебры он имеет корень $z = c_1$ и может быть представлен в виде

$$A_n(z) = (z - c_1)B_{n-1}(z).$$

Многочлен $B_{n-1}(x)$ также имеет корень $x = c_2$, так что

$$A_n(z) = (z - c_1)(z - c_2)D_{n-2}(z).$$

Продолжая процедуру, получаем, что многочлен $A_n(z)$ допускает разложение вида

$$A_n(z) = a(z - c_1)(z - c_2)\cdots(z - c_n),$$

причем среди корней $c_1, \ldots, c_n$ могут быть и совпадающие.

2.5. **Многочлены с вещественными коэффициентами.**

Многочлен степени n с вещественными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.

Теорема.

Пусть $A(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$A(\bar{z}) = \overline{A(z)}.$$

◀ Пусть

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n.$$

Так как коэффициенты вещественны, то

$$\bar{a}_0 = a_0, \quad \bar{a}_1 = a_1, \quad \ldots, \quad \bar{a}_n = a_n.$$

Поэтому

$$\overline{A(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} =$$
$$= \bar{a}_0 \bar{z}^n + \bar{a}_1 \bar{z}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1} \bar{z} + \bar{a}_n =$$
$$= a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \bar{z} + a_n = A(\bar{z}). \qquad ▶$$

Теорема.

Если $A(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, $z = c$ — его корень, то сопряженное число $\bar{z}$ также является корнем многочлена $A(z)$.

◀ $A(\bar{c}) = \overline{A(c)} = \bar{0} = 0$ ▶

Таким образом, у многочлена с вещественными коэффициентами комплексные корни могут появляться только сопряженными парами.

Пусть $c, \bar{c}$ — пара сопряженных корней (с ненулевыми мнимыми частями). В разложение многочлена на множители входит произведение

$$(z - c)(z - \bar{c}) = z^2 - (c + \bar{c})z + c\bar{c} = z^2 - 2(\operatorname{Re} c)z + |c|^2,$$

являющееся квадратным трехчленом; отметим, что дискриминант этого трехчлена отрицателен:

$$D = 4(\operatorname{Re} c)^2 - 4|c|^2 < 0, \quad \text{так как} \quad |c|^2 = (\operatorname{Re} c)^2 + (\operatorname{Im} c)^2 > (\operatorname{Re} c)^2.$$

Такие квадратные трехчлены называются неприводимыми.

Таким образом, каждый многочлен с вещественными коэффициентами может быть разложен в произведение линейных множителей и неприводимых квадратных трехчленов:

$$A(x) = a(x - c_1)^{\alpha_1} \cdots (x - c_s)^{\alpha_s} (x + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x + p_r x + q_r)^{\beta_r}.$$