Лекция 3

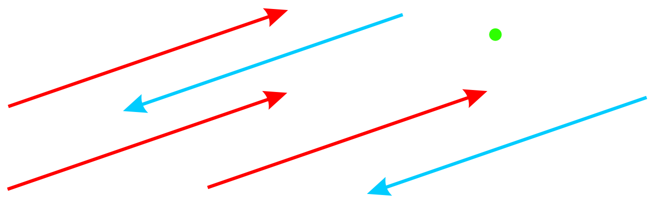
1. Векторы

Вектор — направленный отрезок.

Равные векторы: имеют одинаковые длины и совпадающие направления (параллельны и направлены в одну стороны)

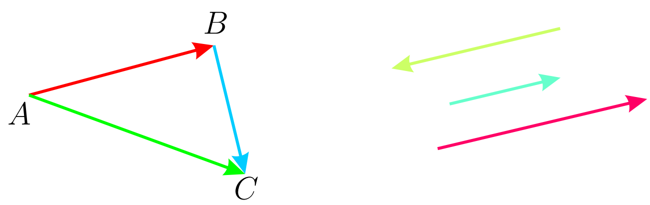
Противоположные векторы: имеют одинаковые длины и противоположные направления (параллельны и направлены в разные стороны).

Нулевой вектор: имеет нулевую длину, направление не определено, начало и конец совпадают.



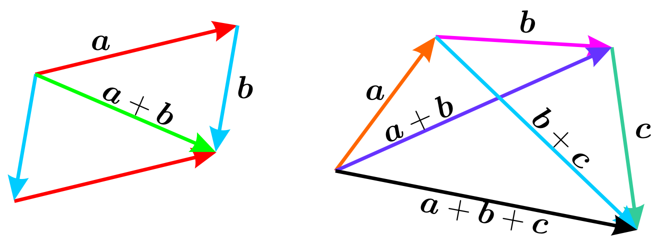
Операции над векторами: сложение и умножение на число.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$



Сложение векторов коммутативно и ассоциативно:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$



1.1. **Свойства операций над векторами.**

Теорема.

Сложение векторов и умножение векторов на числа обладают следующими свойствами:

(1) *коммутативность сложения:* $\forall\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a};$$

(2) *ассоциативность сложения:* $\forall\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c});$$

(3) *свойство нулевого вектора*: $\exists\ \mathbf{0}$:

$$\forall \boldsymbol{a} : \boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a};$$

(4) *существование противоположного вектора*:

$$\forall \boldsymbol{a} \quad \exists \boldsymbol{a}' : \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \mathbf{0};$$

(5) *свойство единицы*: $\forall \boldsymbol{a}$:

$$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a};$$

(6) *ассоциативность умножения на число*: $\forall \boldsymbol{a}$, $\forall \alpha, \beta$

$$(\alpha\beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\,(\beta\boldsymbol{a})\,;$$

(7) *дистрибутивность*-1: $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, $\forall \alpha$

$$\alpha\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b};$$

(8) *дистрибутивность*-3: $\forall \boldsymbol{a}$, $\forall \alpha, \beta$

$$(\alpha + \beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}.$$

1.2. **Коллинеарные и компланарные векторы.** Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых. Если коллинеарные векторы привести к общему началу, то они окажутся лежащими на одной прямой.

Два вектора называются компланарными, если они лежат в параллельных плоскостях. Если компланарные векторы привести к общему началу, то они окажутся лежащими в одной плоскости.

Теорема.

(1) *Для того, чтобы два вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа α, β, не равные одновременно нулю, что*

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \mathbf{0}.$$

(2) *Для того, чтобы три вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа α, β, γ не равные одновременно нулю, что*

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \mathbf{0}.$$

◄ 1. Пусть векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарны; тогда один из них можно выразить через два остальных, например,

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c}.$$

Мы можем положить

$$\alpha = 1, \quad \beta = -x, \quad \gamma = -y.$$

2. Пусть в равенстве

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \mathbf{0}.$$

один из коэффициентов отличен от нуля, например, $\alpha \neq 0$. Тогда можно записать

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{c},$$

и векторы оказываются компланарными. ►

Теорема.

(1) *Для того, чтобы два вектора* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *были неколлинеарны, необходимо и достаточно, чтобы равенство*

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

было возможно лишь при $\alpha = \beta = 0$.

(2) *Для того, чтобы три вектора* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *были некомпланарны, необходимо и достаточно, чтобы равенство*

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

было возможно лишь при $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

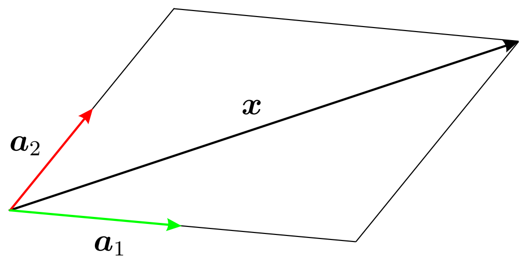
1.3. **Базис и координаты вектора.**

Базис на плоскости — упорядоченный набор двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$.

Любой вектор на плоскости можно представить в виде комбинации

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2;$$

это соотношение называется разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$, а числа x_1, x_2 — координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$. Координаты вектора записываем в виде столбца $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

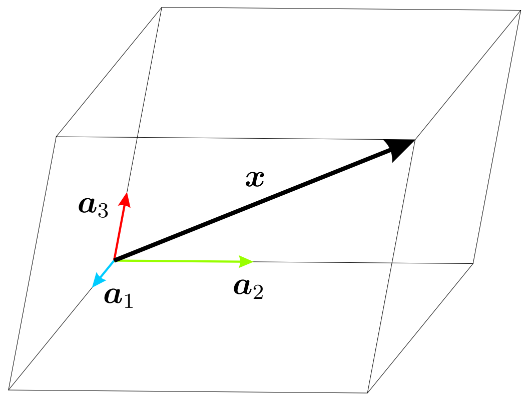


Базис в пространстве — упорядоченный набор трех некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

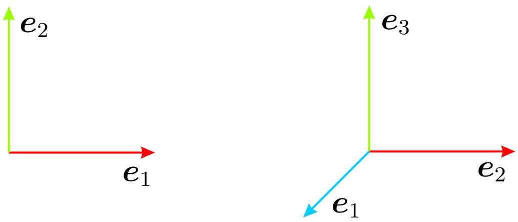
Любой вектор пространства можно представить в виде комбинации

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + x_3 \boldsymbol{a}_3;$$

это соотношение называется разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, а числа x_1, x_2, x_3 — координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Координаты вектора записываем в виде столбца $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.



В аналитической геометрии используются преимущественно ортонормированные базисы, т.е. базисы, состоящие из единичных попарно ортогональных векторов.



Теорема.

Разложение вектора по базису единственно, т.е. набор координат векторов в данном базисе определен однозначно.

◀ Предположим, что вектор $\boldsymbol{x}$ имеет в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ два различных набора координат:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + y_3\boldsymbol{a}_3.$$

Вычитая второе разложение из первого, получим

$$\mathbf{0} = (x_1 - y_1)\boldsymbol{a}_1 + (x_2 - y_2)\boldsymbol{a}_1 + (x_3 - y_3)\boldsymbol{a}_3.$$

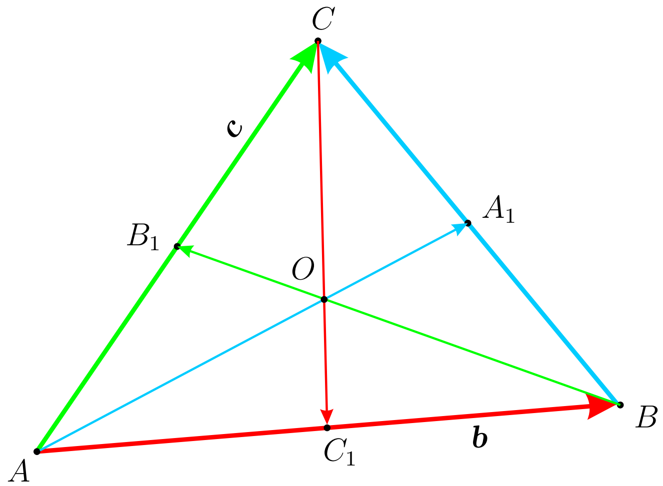
Так как векторы базиса некомпланарны, то это равенство возможно лишь при нулевых коэффициентах, т.е.

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3. \qquad ▶$$

Даже этих несложных средств достаточно для решения некоторых задач.

Пример.

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.



Рассмотрим базис на плоскости, образованный векторами $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$.

Сначала докажем, что медианы AA_1 и BB_1 делятся точкой их пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины.

$$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}; \qquad \overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\boldsymbol{c} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b};$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \boldsymbol{b} + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{c} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c};$$

$$\overrightarrow{AO} = \alpha\overrightarrow{AA_1} = \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{b} + \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{c}; \quad \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}; \quad \overrightarrow{BO} = \beta\overrightarrow{BB_1} = \frac{\beta}{2}\boldsymbol{c} - \beta\boldsymbol{b}.$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{AO}$ удовлетворяют соотношению

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO},$$

откуда

$$\boldsymbol{b} + \frac{\beta}{2}\boldsymbol{c} - \beta\boldsymbol{b} = \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{b} + \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{c}.$$

Это эквивалентно равенству

$$\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\boldsymbol{c} = \left(1 - \beta - \frac{\alpha}{2}\right)\boldsymbol{b}.$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ линейно независимы, то равенство возможно лишь при нулевых значениях коэффициентов, т.е.

$$\alpha = \beta, \quad \frac{\alpha}{2} + \beta = 1.$$

Решением этой системы уравнений является

$$\alpha = \beta = \frac{2}{3},$$

что и требовалось:

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}, \quad \overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}, \quad \overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}.$$

Теперь докажем, что медиана CC_1 также проходит через точку O и делится этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c});$$

$$\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1O} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{c} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}\right) = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}.$$

2. Столбцы и операции над ними

2.1. **Арифметическое пространство столбцов.** Рассмотрим множество $\mathbb{R}^n$, состоящее из упорядоченных наборов n вещественных чисел, которые будем записывать в виде столбцов:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Нулевой столбец — столбец, все элементы которого нули; обозначается O.

Два столбца называются равными, если они состоят из одинакового числа элементов и попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах:

$$\text{для} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$X = Y \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = y_1,\ \dots,\ x_n = y_n.$$

Определим операции сложения столбцов и умножения столбцов на вещественные числа:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Теорема.

Операции сложения столбцов и умножения столбцов на числа обладают следующими свойствами:

(1) *коммутативность сложения*: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$X + Y = Y + X;$$

(2) *ассоциативность сложения*: $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z);$$

(3) *свойство нулевого столбца*:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : X + O = X;$$

(4) *существование противоположного столбца*:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad \exists X' \in \mathbb{R}^n : X + X' = O;$$

(5) *свойство единицы*: $\forall X \in \mathbb{R}^n$:

$$1 \cdot X = X;$$

(6) *ассоциативность умножения на число*: $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha\beta)\, X = \alpha\, (\beta X)\,;$$

(7) *дистрибутивность*-1: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\, (X + Y) = \alpha X + \alpha Y;$$

(8) *дистрибутивность*-2: $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha + \beta)\, X = \alpha X + \beta X.$$

2.2. **Линейная комбинация, линейная оболочка.** Пусть даны столбцы $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Линейная комбинация — это выражение вида

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k.$$

Будем пользоваться сокращением ЛК.

ЛК называется тривиальной, если все ее коэффициенты равны нулю:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Очевидно, тривиальная ЛК любых столбцов равна нулевому столбцу.

Линейная оболочка столбцов $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$ — это множество

$$L(X_1, X_2, \dots, X_k) = \Big\{ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k \;\Big|\; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Сокращение — ЛО.

2.3. **Линейная зависимость и независимость.** Тривиальная ЛК любых столбцов равна нулевому столбцу. Может ли быть равна нулевому столбцу нетривиальная ЛК, т.е. такая, в которой хотя бы один коэффициент ненулевой?

Пример.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad 2X_1 - X_2 = O.$$

Столбцы $X_1, \dots, x_n$ называются линейно зависимыми (ЛЗ), если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевому столбцу.

Столбцы $X_1, \dots, x_n$ называются линейно независимыми (ЛН), если равенство нулевому столбцу их ЛК возможно лишь в случае, если эта ЛК тривиальна.

Теорема.

(1) *Если в системе столбцов $X_1, \dots, X_k$ имеется нулевой столбец, то эта система ЛЗ.*

(2) *Если система столбцов $X_1, \dots, X_k$ ЛЗ, то один из этих столбцов можно представить в виде ЛК остальных.*

(3) *Если в системе столбцов $X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_r$ столбцы $X_1, \dots, X_k$ ЛЗ, то и вся система также ЛЗ.*

◀ 1. Пусть в системе столбцов $X_1, \dots, X_k$ один столбец нулевой, например, $X_k = O$. Нетривиальная ЛК

$$0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \dots + 1 \cdot X_k$$

равна, очевидно, нулевому столбцу.

2. Пусть столбцы $X_1, \dots, X_k$ ЛЗ; тогда существует их нетривиальная ЛК, равная нулевому столбцу:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k = O.$$

Для определенности будем считать, что $\alpha_k \neq 0$; тогда

$$X_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} X_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} X_2 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} X_{k-1},$$

что и требовалось.

3. Если подсистема $X_1, \dots, X_k$ ЛЗ, то существует ЛК

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = O,$$

в которой имеется хотя бы один ненулевой коэффициент. Если теперь к этой ЛК добавить тривиальную ЛК столбцов $X_{k+1}, \dots, X_r$, то получится нетривиальная ЛК

$$\overbrace{\underbrace{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k}_{\text{нетривиальная ЛК}} \; + \; \underbrace{0 \cdot X_{k+1} + \dots 0 \cdot X_r}_{\text{тривиальная ЛК}}}^{\text{нетривиальная ЛК}} = O,$$

что и требовалось. ▶

2.4. **Векторы и столбцы.**

Пусть на плоскости (в пространстве) зафиксирован некоторый базис.

Тогда каждому вектору ставится единственным образом в соответствие столбец его координат.

Наоборот, если задан некоторый столбец, то существует единственный вектор, координаты которого совпадают с элементами этого столбца.

Таким образом, в случае, если базис зафиксирован, между векторами и столбцами существует взаимно однозначное соответствие

$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow X.$$

Теорема.

Указанное соответствие обладает следующими свойствами: если $\boldsymbol{x} \leftrightarrow X$, $\boldsymbol{y} \leftrightarrow Y$, *то*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \leftrightarrow X + Y, \quad \alpha\boldsymbol{x} \leftrightarrow \alpha X.$$

Такое соответствие называется изоморфизмом.

3. Определитель второго порядка

3.1. **Система двух уравнений с двумя неизвестными.** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} ax + by = p, \\ cx + dy = q, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, c, d, p, q — заданные числа, x, y — неизвестные. Решим систему методом исключения неизвестных.

Умножая первое уравнение на d, второе на $-b$ и складывая полученные уравнения, найдем

$$-\begin{cases} ax + by = p & \times d \\ cx + dy = q & \times b \end{cases} \implies (ad - bc)x = pd - qb.$$

Аналогично, умножая первое уравнение на $-c$, второе на a и складывая полученные уравнения, найдем

$$-\begin{cases} ax + by = p, & \times c \\ cx + dy = q, & \times a \end{cases} \implies (ad - bc)y = qa - pc.$$

Если $ad - bc \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x = \frac{pd - qb}{ad - bc}, \quad y = \frac{qa - pc}{ad - bc}.$$

3.2. **Определитель второго порядка.** Запишем коэффициенты системы в виде таблицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

она называется основной матрицей системы.

Поставим в соответствие этой матрице число $ad - bc$; оно называется определителем (детерминантом) матрицы A и обозначается

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Такой определитель называется определителем второго порядка (по количеству его строк и столбцов); сокращенно det-2.

С помощью определителей формулы для решения системы могут быть записаны в виде

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det A_x}{\det A}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det A_y}{\det A}, \tag{2}$$

где матрица A_x (соответственно, A_y) получается из матрицы A заменой первого (соответственно, второго) столбца на столбец, состоящий из свободных членов уравнений. Полученные формулы называются формулами Крамера.

Теорема.

Определитель $\det A$ *обладает следующими свойствами*:

(1) *линейность*:

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b \\ c_1 + c_2 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix};$$

(2) *кососимметричность*: det-2 *с одинаковыми столбцами равен нулю,*

$$\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0;$$

(3) *нормировка*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Из этих основных свойств определителя можно вывести ряд новых свойств, полезных при вычислениях.

1. Кососимметричность-2: при перестановке столбцов det-2 меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

◀
$$\underbrace{\begin{vmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{vmatrix}}_{=0} = \begin{vmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a+b \\ d & c+d \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix}}_{=0}$$

откуда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$ ▶

2. Det-2 не изменится, если к любому из его столбцов прибавить другой столбец, умноженный на произвольное число.

$$◀ \qquad \begin{vmatrix} a+\alpha b & b \\ c+\alpha d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \alpha \underbrace{\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix}}_{=0} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \qquad ▶$$

3. Определитель не изменится, если его строки и столбцы поменять ролями:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Это означает, что строки и столбцы det-2 равноправны: любое утверждение, справедливое для столбцов, будет справедливым и для строк.

3.3. **Примеры.**

Пример.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 & 24695 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из второй строки удвоенную первую строку:

$$\begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 - 2\cdot 12345 & 24695 - 2\cdot 12347 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12345\cdot 1 - 12347\cdot 1 = -2.$$

Пример.

Вычислить det-2

$$\begin{vmatrix} 1-i & 2+3i \\ 3-2i & 2+i \end{vmatrix} = (1-i)(2+i) - (2+3i)(3-2i) =$$

$$= (3-i) - (12+5i) = -9-6i.$$

Пример.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (1-i)\,x + (2+3i)\,y = 12+8i, \\ (3-2i)\,x + (2+i)\,y = 14+5i. \end{cases}$$

Воспользуемся формулами Крамера; для этого вычислим необходимые определители:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1-i & 2+3i \\ 3-2i & 2+i \end{vmatrix} = -9-6i$$

(см. предыдущий пример),

$$\begin{vmatrix} 12+8i & 2+3i \\ 14+5i & 2+i \end{vmatrix} = 3-24i, \quad \begin{vmatrix} 1-i & 12+8i \\ 3-2i & 14+5i \end{vmatrix} = -33-9i.$$

Теперь находим

$$x = \frac{3-24i}{-9-6i} = 1+2i, \quad y = \frac{-33-9i}{-9-6i} = 3-i.$$

3.4. **Критерий равенства нулю det-2.**

Теорема.

Det-2 равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы.

◀ 1. Пусть det-2 равен нулю. Имеем:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \implies ad = bc \implies \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \alpha \implies \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

2. Пусть столбцы det-2 ЛЗ; тогда

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha b & b \\ \alpha d & d \end{vmatrix} = 0. \qquad ▶$$

4. Определитель третьего порядка

4.1. **Определение.** Определитель третьего порядка (сокращенно det-3) должен состоять из трех строк и трех столбцов чисел; будем считать его функцией его столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |A, B, C|, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Det-3 должен обладать свойствами, аналогичными свойствам det-2:

(1) линейность по столбцам:

$$|A_1 + A_2, B, C| = |A_1, B, C| + |A_2, B, C|$$

$$|\alpha A, B, C| = \alpha\, |A, B, C|,$$

и аналогично для всех остальных столбцов;

(2) кососимметричность: определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю,

$$|A, A, C| = 0$$

и аналогично для других столбцов;

(3) нормировка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отметим свойство кососимметричность-2: при перестановке любых двух столбцов det-3 меняет знак.

$$\underbrace{|A+B,\ A+B,\ C|}_{=0} = |A,\ A+B,\ C| + |B,\ A+B,\ C| =$$

$$= \underbrace{|A, A, C|}_{=0} + |A, B, C| + |B, A, C| + \underbrace{|B, B, C|}_{=0},$$

откуда

$$|A, B, C| = -|B, A, C|.$$

Из кососимметричности и линейности получается также следующее свойство: det-3 не изменится, если к любому его столбцу прибавить произвольную ЛК остальных столбцов.

$$|A+\beta B+\gamma C,\ B,\ C| = |A,\ B,\ C| + \beta \underbrace{|B,\ B,\ C|}_{=0} + \gamma \underbrace{|C,\ B,\ C|}_{=0}.$$

4.2. **Формулы Крамера.** Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3. \end{cases}$$

Таблицы коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

называются основной и расширенной матрицами системы соответственно.

Введя столбцы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

систему можно записать в виде

$$Ax + By + Cz = P.$$

Пусть (x, y, z) — решение системы. Это означает, что столбец P является ЛК столбцов A, B, C с коэффициентами x, y, z:

$$P = Ax + By + Cz.$$

Рассмотрим det-3 $|P, B, C|$:

$$|P, B, C| = \left| \underbrace{Ax + By + Cz}_{=P},\ B,\ C \right| =$$

$$= |Ax, B, C| + |By, B, C| + |Cz, B, C| =$$

$$= x\,|A, B, C| + y \underbrace{|B, B, C|}_{=0} + z \underbrace{|C, B, C|}_{=0},$$

откуда, при условии $|A, B, C| \neq 0$, получаем

$$x = \frac{|P, B, C|}{|A, B, C|} = \frac{\det A_x}{\det A}.$$

Аналогично получаются формулы для y, z:

$$y = \frac{|A, P, C|}{|A, B, C|} = \frac{\det A_y}{\det A}, \quad z = \frac{|A, B, P|}{|A, B, C|} = \frac{\det A_z}{\det A},$$

где определители $\det A_x$, $\det A_y$, $\det A_z$ получены из определителя $\det A$ заменой соответствующего столбца на столбец правых частей системы.

Формулы Крамера дают решение в случае, когда определитель $|A, B, C|$ основной матрицы системы отличен от нуля, и при этом доказывают единственность этого решения. Если же $|A, B, C| = 0$, то формулы Крамера неприменимы; в этом случае система может либо не иметь решений, либо иметь более одного решения.

4.3. **Разложение det-3 по первому столбцу.** Рассмотрим столбцы

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, любой столбец из трех элементов можно представить в виде ЛК этих трех столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3.$$

Преобразуем det-3:

$$|A,\ B,\ C| = |a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3,\ B,\ C| =$$
$$= a_1 \underline{|I_1,\ B,\ C|} + a_2 \underline{|I_2,\ B,\ C|} + a_3 \underline{|I_3,\ B,\ C|}.$$

Подчеркнутые det-3 называются алгебраическими дополнениями (АД) элементов a_1, a_2, a_3; обозначим их A_1, A_2, A_3. Очевидно, эти АД не зависят от элементов a_1, a_2, a_3.

Вычислим АД элемента a_1:

$$A_1 = |I_1, B, C| = |I_1, b_1 I_1 + b_2 I_2 + b_3 I_3, C| =$$

$$= b_1 \underbrace{|I_1, I_1, C|}_{=0} + b_2 |I_1, I_2, C| + b_3 |I_1, I_3, C| =$$

$$= b_2 \left| I_1, I_2, \underline{c_1 I_1 + c_2 I_2} + c_3 I_3 \right| + b_3 \left| I_1, I_3, \underline{c_1 I_1} + c_2 I_2 + \underline{c_3 I_3} \right| =$$

$$= b_2 c_3 |I_1, I_2, I_3| + b_3 c_2 |I_1, I_3, I_2| =$$

$$= b_2 c_3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} + b_3 c_2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=-1} = b_2 c_3 - b_3 c_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что АД элемента a_1 равно det-2, который получается, если из исходного det-3 вычеркнуть строку и столбец, на пересечении которых стоит элемент a_1.

Аналогичное вычисление АД элементов a_2 и a_3 дает:

$$A_2 = b_3c_1 - b_1c_3 = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$A_3 = b_1c_2 - b_2c_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Обратите внимание на знак A_2.

Итак, получена формула разложения det-3 по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Det-2, фигурирующие в этой формуле, называются минорами этих элементов. Они представляют собой det-2, получающиеся из исходного det-3 вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоят элементы a_1, a_2, a_3 соответственно.

Аналогичные формулы могут быть получены и для разложения det-3 по элементам второго и третьего столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Анализ этих формул позволяет сделать следующий вывод: АД элемента равно минору этого элемента, взятому со знаком «+» или «−» согласно следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Итак, det-3 равен сумме произведений элементов столбца на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3.$$

Рассмотрим сумму произведений элементов второго столбца на алгебраические дополнения элементов первого столбца:

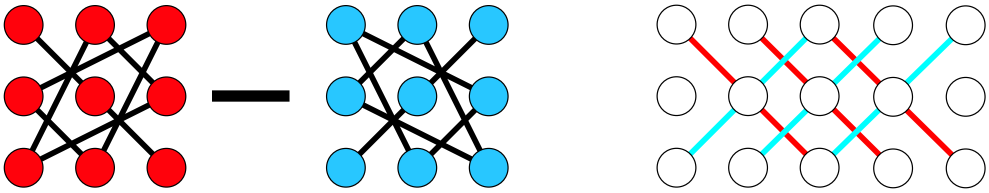
$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично и для других столбцов. Итак, сумма произведений элементов некоторого столбца на алгебраические дополнения другого столбца равна нулю.

4.4. **Полное разложение det-3.** Вычисляя АД, входящие в разложение det-3 по элементам какой-либо строки, получаем следующую формулу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

Мнемонические правила для запоминания:



Сгруппируем иначе слагаемые в полном разложении det-3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{a_1b_2c_3} + a_2b_3c_1 + \underline{\underline{a_3b_1c_2}} - \underline{a_1b_3c_2} - \underline{\underline{a_2b_1c_3}} - a_3b_2c_1 =$$

$$= a_1\left(b_2c_3 - b_3c_2\right) - b_1\left(a_2c_3 - a_3c_2\right) + c_1\left(a_2b_3 - a_3b_3\right) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Это означает, что строки и столбцы det-3 равноправны: любое утверждение, сформулированное для столбцов, имеет аналог, справедливый для строк. В частности, можно производить разложение det-3 не только по элементам столбцов, но и по элементам строк.

4.5. **Примеры.**

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Из второй строки вычтем первую, умноженную на 2, а к четвертой строке прибавим первую, умноженную на 4, после чего разложим получившийся det-3 по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \xleftarrow{-2} \\ \xleftarrow{4} \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 13 & 13 \end{vmatrix} = 0 \cdot 13 - (-13) \cdot 7 = 91.$$

Пример.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ 2x + 4y - z = 7, \\ -4x + 5y + z = 9. \end{cases}$$

Воспользуемся формулами Крамера, для чего вычислим нужные det-3:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 13 \end{vmatrix} = 91$$

(см. пример выше).

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix};$$

для вычисления этого det-3 прибавим к первой строке утроенную вторую строку, а к третьей строке прибавим вторую строку, после чего разложим полученный det-3 по третьему столбцу:

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 16 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 35 & 14 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 35 - 2 \cdot 16 & 14 - 2 \cdot 9 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 16 = 91.$$

При вычислении $\det A_y$ и $\det A_z$ будем из второй строки вычитать удвоенную первую строку, а к третьей строке прибавлять первую строку, умноженную на 4, как это делалось при вычислении $\det A$; после этого каждый из полученных det-3 разложим по элементам первого столбца:

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ -4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 0 & -21 & -7 \\ 0 & 65 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -21 & -7 \\ 65 & 13 \end{vmatrix} = 182,$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 4 & 7 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -21 \\ 0 & 13 & 65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -21 \\ 13 & 65 \end{vmatrix} = 273.$$

Решение системы:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{91}{91} = 1, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{182}{91} = 2, \quad z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{273}{91} = 3.$$

4.6. **Критерий равенства нулю det-3.**

Теорема.

Det-3 равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы.

◀ 1. Пусть det-3 равен нулю. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = 0. \end{cases}$$

Формулы Крамера к ней неприменимы, но она имеет очевидное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Поэтому решение системы не единственно, и она имеет какое-либо другое решение, в котором хотя бы одна из неизвестных отлична от нуля. Компоненты этого решения и являются коэффициентами нетривиальной линейной комбинации столбцов, равной нулевому столбцу.

2. Пусть столбцы ЛЗ; тогда один из них можно представить в виде ЛК остальных, например, $C = \alpha A + \beta B$. Тогда

$$|A, B, C| = |A, B, C - \alpha A - \beta B| = |A, B, O| = 0. \qquad ▶$$