Лекция 5

1. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему, состоящую из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n = b^m. \end{cases}$$

Сокращенно — СЛУ.

Введем основную и расширенную матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = [A_1, A_2, \dots, A_n],$$

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{array}\right) = [A, B], \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Систему можно записать в матричном виде

$$AX = B,$$

а также в виде

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = B.$$

Набор чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$ (столбец $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$) называется решением СЛУ, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы получаем верное числовое равенство (при подстановке столбца в матричное уравнение получаем верное матричное равенство).

СЛУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Две совместные СЛУ называются эквивалентными, если множества их решений совпадают. Ясно, что эквивалентные СЛУ содержат одинаковое число неизвестных; число же уравнений в них может быть различным.

Следующие преобразования СЛУ переводят ее в эквивалентную СЛУ:

(1) перестановка двух уравнений местами;
(2) умножение любого уравнения СЛУ на число $\alpha \neq 0$;
(3) прибавление к любому уравнению СЛУ другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Эти преобразования СЛУ называются элементарными (ЭП).

Иногда к элементарным преобразованиям причисляют

(4) удаление из СЛУ уравнения вида

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n = 0.$$

1.1. **Однородные системы.** СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если столбец правых частей нулевой:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n = 0, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^1x^n = 0, \\ \dotfill \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \cdots + a_n^mx^n = 0. \end{cases}$$

ОСЛУ всегда совместна: числа $x^1 = x^2 = \cdots = x^n = 0$ образуют ее решение, называемое тривиальным. Может ли ОСЛУ иметь нетривиальное решение?

Теорема.

ОСЛУ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы ее основной матрицы ЛЗ.

◀ 1. Пусть ОСЛУ имеет нетривиальное решение $x^1, \ldots, x^n$; это означает, что

$$A_1x^1 + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n = O,$$

где хотя бы один коэффициент $x^k \neq 0$; это и означает ЛЗ столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

2. Пусть столбцы основной матрицы ОСЛУ ЛЗ, т.е.

$$A_1x^1 + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n = O,$$

где хотя бы один из коэффициентов $x^k \neq 0$. Этот набор коэффициентов и образует нетривиальное решение ОСЛУ. ▶

Теорема.

Если X_1, X_2 — два решения ОСЛУ $AX = 0$, то любая их ЛК также является решением этой ОСЛУ.

◀ Пусть c^1, c^2 — произвольные числа. Имеем:

$$AX_1 = O, \quad AX_2 = O \quad \Longrightarrow \quad c^1AX_1 + c^2AX_2 = A(c^1X_1 + c^2X_2) = 0,$$

т.е. ЛК $c^1X_1 + c^2X_2$ является решением ОСЛУ. ▶

Фундаментальная совокупность решений (ФСР) ОСЛУ — это такой упорядоченный набор линейно независимых решений $X_1, X_2, \ldots, X_s$, что любое решение ОСЛУ можно представить в виде их линейной комбинации:

$$X = c^1X_1 + c^2X_2 + \cdots + c^sX_s,$$

где $c^1, c^2, \ldots, c^s$ — произвольные числа.

Матрица Φ, столбцами которой являются столбцы ФСР, называется фундаментальной матрицей (ФМ) ОСЛУ:

$$\Phi = [X_1, X_2, \ldots, X_s].$$

Общее решение ОСЛУ выражается через ФМ по формуле

$$X = \Phi \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^s \end{pmatrix}.$$

1.2. **Неоднородные системы.** Система $AX = B$ называется неоднородной (НСЛУ), если $B \neq O$. Часто НСЛУ $AX = B$ рассматривают вместе с ОСЛУ $AX = O$.

Теорема.

Если X_1, X_2 — решения НСЛУ $AX = B$, то $X_1 - X_2$ — решение ОСЛУ $AX = O$.

◄ Пусть $AX_1 = B$, $AX_2 = B$. Тогда

$$A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = O. \qquad ►$$

Таким образом, любое решение НСЛУ можно представить в виде суммы некоторого частного решения НСЛУ и какого-либо решения ОСЛУ:

$$\text{ОРНС} = \text{ЧРНС} + \text{ОРОС}.$$

1.3. **Системы упрощенного вида.** Неизвестная x^k называется базисной, если она входит только в одно уравнение системы.

Система называется системой упрощенного вида, если в каждом уравнении имеется базисная неизвестная. В этом случае в каждом уравнении имеется неизвестная, входящая только в это уравнение, а число базисных неизвестных равно числу уравнений в системе.

Пример.

Рассмотрим ОСЛУ упрощенного вида:

$$\begin{cases} x^1 \quad\quad + 3x^3 \quad\quad + x^5 = 0, \\ \quad\quad x^2 + 4x^3 \quad\quad + 2x^5 = 0, \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad x^4 + 2x^5 = 0. \end{cases}$$

Базисные неизвестные выделены.

Запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = -3x^3 - x^5, \\ x^2 = -4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = -x^5. \end{cases}$$

Если вместо x^3 и x^5 подставлять произвольные числа и вычислять x^1, x^2, x^4 по указанным формулам, то полученный набор чисел x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 будет представлять собой некоторое решение ОСЛУ. Таким образом, полученные формулы доставляют нам описание всех решений исходной ОСЛУ.

Неизвестные, не являющиеся базисными, называются свободными; в общем решении системы они могут принимать произвольные значения.

Положив $x^3 = c^1$, $x^5 = c^2$, решение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c^1 - c^2 \\ -4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ -c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{c^1 \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{X_1} + c^2 \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{X_2}}_{\text{ОРОС}}.$$

Каждый из столбцов X_1, X_2, образующих ФСР ОСЛУ, можно получить, придавая одной из свободных неизвестных значение 1, а остальным — значение 0. ФСР, полученная таким образом, называется нормальной ФСР (НФСР). Фундаментальная матрица, составленная из столбцов НФСР, называется нормальной фундаментальной матрицей (НФМ).

Пример.

Рассмотрим НСЛУ упрощенного вида:

$$\begin{cases} x^1 \quad\quad\;\; + \; 3x^3 \quad\quad + \; x^5 = 1, \\ \quad\quad x^2 + 4x^3 \quad\quad + 2x^5 = 2, \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; x^4 + 2x^5 = 3. \end{cases}$$

Базисные неизвестные выделены.

Запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = 1 - 3x^3 - x^5, \\ x^2 = 2 - 4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 3 - x^5. \end{cases}$$

Если вместо x^3 и x^5 подставлять произвольные числа и вычислять x^1, x^2, x^4 по указанным формулам, то полученный набор чисел x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 будет представлять собой некоторое решение системы. Таким образом, полученные формулы доставляют нам описание всех решений исходной системы.

Положив $x^3 = c^1$, $x^5 = c^2$, решение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3c^1 - c^2 \\ 2 - 4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 3 - c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ЧРНС}} + \underbrace{c^1 \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{X_1} + c^2 \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{X_2}}_{\text{ОРОС}}.$$

Здесь ЧРНС отвечает нулевым значениям свободных переменных (такое ЧРНС называется базисным), а столбцы X_1, X_2 представляют собой НФСР ОСЛУ.

Итак, если СЛУ имеет упрощенный вид, то ее общее решение немедленно выписывается. Чтобы решить СЛУ произвольного вида, нужно с помощью элементарных преобразований привести ее к упрощенному виду.

Теорема.

Если в ОСЛУ число неизвестных больше числа уравнений, то она имеет нетривиальное решение.

◄ Если число неизвестных больше числа уравнений, то найдется свободная неизвестная, которая может принимать любые значения. ►

1.4. **Алгоритм Гаусса.** Вместо преобразований СЛУ удобно выполнять преобразования расширенной матрицы этой СЛУ; при этом ЭП СЛУ соответствуют ЭП строк расширенной матрицы:

(1) перестановка двух строк местами;
(2) умножение любой строки на число $\alpha \neq 0$;
(3) прибавление к любой строке другой строки, умноженной на произвольное число;
(4) [удаление из матрицы нулевых строк.]

Говорят, что матрица имеет упрощенный вид, если она является расширенной матрицей СЛУ упрощенного вида. Матрица упрощенного вида имеет следующую структуру:

(1) некоторые ее столбцы являются последовательными столбцами единичной матрицы; эти столбцы отвечают базисным неизвестным СЛУ и также называются базисными;

(2) каждый из остальных столбцов является ЛК предыдущих базисных столбцов.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & * & \boxed{0} & * & \boxed{0} & * & \dots & \boxed{0} & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Опишем один шаг алгоритма Гаусса, который позволяет произвольную матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ привести к упрощенному виду.

ШАГ № k.

(1) Среди строк с номерами $k, \dots, m$ выбираем одну из строк с наименьшим количеством нулей, считая от начала строки; эту строку назовем разрешающей строкой (РС), а ее первый ненулевой элемент — разрешающим элементом (РЭ).

(2) Переставляем РС на k-е место.

(3) Разделим РС на РЭ; в полученной строке на месте РЭ будет стоять 1.

(4) Вычитаем из каждой строки матрицы РС, умноженную на элемент обрабатываемой строки, который стоит в одном столбце с РЭ. После этого столбец, содержащий РЭ, будет представлять собой k-й столбец единичной матрицы.

Процесс завершается, когда каждая строка матрицы уже побывала в роли РС или когда РС выбрать не удается.

Пример.

Привести к упрощенному виду матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. В качестве РС можно взять 2 или 4 строку; возьмем 2. РЭ $= 2$, делим РС на 2 и переставляем на первое место:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уничтожению подлежат все элементы первого столбца, кроме РЭ; такой элемент один — это 3. Выполняем ЭП: к 4-й строке добавляем 1-ю, умноженную на (-3):

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В качестве РС можно взять 2-ю, 3-ю или 4-ю. Возьмем 3-ю, переставим ее на второе место и разделим на (-1):

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Теперь нужно уничтожить все элементы 2-го столбца, кроме РЭ. Выполняем ЭП:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ * \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. В качестве РС можно взять только 4-ю строку. Умножаем ее на (-2) и переставляем на 3-е место:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уничтожаем все элементы 4-го столбца, кроме РЭ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Еще один шаг выполнить невозможно, так как четвертую строку нельзя выбрать в качестве РС: в ней нет ненулевых элементов. Процедура закончена.

Можно избежать появления дробей при выполнении ЭП, если сделать дополнительные ЭП.

Шаг 1. Вычтем из 4-й строки 2-ю (цель — получить 1 в одной из строк и выбрать эту строку в качестве РС):

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Первый элемент 4-й строки равен 1; эту строку берем в качестве РС, тогда РЭ = 1. Поменяем местами 1-ю и 4-ю строки:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Уничтожаем все элементы 1-го столбца, кроме РЭ; такой элемент один, это 2 во второй строке.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} * \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В качестве РС берем 2-ю строку; РЭ = 1. Уничтожаем все элементы 2-го столбца, кроме РЭ; это -1 и -2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. В качестве РС берем 3-ю строку, РЭ $= 1$, который стоит в 4-м столбце. Уничтожаем все элементы 4-го столбца, кромее РЭ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример.

Решить ОСЛУ

$$\begin{cases} - 2x^2 + 6x^3 + 2x^4 + 8x^5 - 2x^6 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + x^3 + x^6 = 0 \\ - x^2 + 3x^3 + x^4 + 4x^5 - x^6 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + 3x^3 + x^5 = 0 \end{cases}$$

Основная матрица этой ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица была приведена к упрощенному виду в предыдущем примере:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисные переменные этой ОСЛУ — x^1, x^2, x^4, свободные переменные — x^3, x^5, x^6. Получим НФСР ОСЛУ. Взяв $x^3 = 1$, $x^5 = x^6 = 0$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = -2, \\ x^2 = 3, \\ x^3 = 1, \\ x^4 = 0, \\ x^5 = 0, \\ x^6 = 0. \end{cases}$$

Взяв $x^3 = x^6 = 0$, $x^5 = 1$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = -1, \\ x^2 = 2, \\ x^3 = 0, \\ x^4 = -2, \\ x^5 = 1, \\ x^6 = 0. \end{cases}$$

Взяв $x^3 = x^5 = 0$, $x^6 = 1$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = 1, \\ x^2 = -3, \\ x^3 = 0, \\ x^4 = -2, \\ x^5 = 0, \\ x^6 = 1. \end{cases}$$

Итак, НФСР ОСЛУ имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + c^3 X_3,$$

где c^1, c^2, c^3 — произвольные числа.

НФМ ОСЛУ имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение ОСЛУ можно записать в виде

$$X = \Phi \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}.$$

1.5. **Элементарные преобразования и умножение матриц.** ЭП строк матрицы тесно связаны с операцией умножения матриц.

Теорема.

Пусть R *— ЭП типа* (1)*,* (2) *или* (3) *строк матрицы* B*. Тогда*

$$R(B) = R(I) \cdot B.$$

Здесь $R(B)$ *— матрица, полученная из* B *с помощью ЭП* R*,* I *— единичная матрица.*

◄ Пусть $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Рассмотрим ЭП типа (1), т.е. перестановку строк матрицы B. Обозначим через C матрицу, полученную из B перестановкой строк с номерами k и l. Тогда

$$C^i = \begin{cases} B^i, & i \neq k,\ i \neq l, \\ B^l, & i = k, \\ B^k, & i = l. \end{cases}$$

При $i \neq k$, $i \neq l$ можем записать

$$C^i = B^i = \sum_{p=1}^{m} \delta^i_p B^p.$$

Строка из чисел δ^i_p имеет вид

$$(\delta^i_1, \delta^i_2, \ldots, \delta^i_i, \ldots, \delta^i_m) = (0, 0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$$

и представляет собой i-ю строку единичной матрицы.

При $i = k$ можно записать

$$C^k = B^l = \sum_{p=1}^{m} a^k_p B^p,$$

где набор чисел a^k_p следующий:

$$(a^k_1, a^k_2, \ldots, a^k_l, \ldots, a^k_m) = (0, 0, \ldots, \underset{l}{1}, \ldots, 0).$$

Он, очевидно, совпадает с l-й строкой единичной матрицы.

Аналогично, при $i = l$ можно записать

$$C^l = B^k = \sum_{p=1}^{m} a^l_p B^p,$$

где набор чисел a_p^l следующий:

$$(a_1^l, a_2^l, \dots, a_k^l, \dots, a_m^l) = (0, 0, \dots, \underset{k}{1}, \dots, 0).$$

Он совпадает с k-й строкой единичной матрицы.

При умножении матриц, $C = AB$, строки матрицы C являются линейными комбинациями строк матрицы B с коэффициентами, являющимися элементами строк матрицы A,

$$C^i = \sum_{p=1}^{m} a_p^i B^p.$$

Структура матрицы $A = (a_p^i)_m^m$ такова:

(1) все ее строки, кроме k-й и l-й, равны соответствующим строкам единичной матрицы;

(2) k-я строка матрицы A совпадает с l-й строкой единичной матрицы;

(3) l-я строка матрицы A совпадает с k-й строкой единичной матрицы.

Таким образом, матрица A получена из единичной матрицы I перестановкой k-й и l-й строк, а матрица C равна произведению AB.

Самостоятельно докажите утверждение теоремы для ЭП типов (2) и (3). ►

Матрица A, о которой шла речь выше, называется матрицей элементарного преобразования.

Элементарные преобразования типов (1)–(3) обратимы, т.е. если матрица C может быть получена из матрицы B каким-либо ЭП, то и матрица B может быть получена из матрицы C некоторым ЭП преобразованием.

1.6. **Вычисление обратной матрицы.** Превратим матрицу B с помощью последовательности ЭП строк в единичную матрицу. Поскольку выполнение каждого ЭП эквивалентно умножению B слева на некоторую матрицу, видим, что

$$A_s A_{s-1} \dots A_2 A_1 \cdot B = I.$$

Но это означает, что

$$A_s A_{s-1} \dots A_2 A_1 = B^{-1}.$$

Если те же самые ЭП провести над единичной матрицей, то результатом окажется матрица B^{-1}. На практике это выполняется следующим образом:

$$(B \mid I) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} (I \mid B^{-1}).$$

Если вместо единичной матрицы взять некоторую матрицу D (причем не обязательно квадратную), то результатом будет

$$(B \mid D) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} (I \mid B^{-1}D).$$

Можно сформулировать аналогичную процедуру для ЭП столбцов:

$$\left(\frac{B}{I}\right) \xrightarrow{\text{ЭП столбцов}} \left(\frac{I}{B^{-1}}\right).$$

Если вместо I взять матрицу D (не обязательно квадратную), то

$$\left(\frac{B}{D}\right) \xrightarrow{\text{ЭП столбцов}} \left(\frac{I}{DB^{-1}}\right).$$

На практике выполнять ЭП столбцов неудобно, поэтому для вычисления матрицы DB^{-1} предпочтительнее пользоваться следующим алгоритмом:

$$\left(\frac{B}{D}\right) \xrightarrow{\text{транспонирование}}$$

$$(B^T \mid D^T) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} (I \mid (B^T)^{-1} D^T) = (I \mid (B^{-1})^T D^T)$$

$$\xrightarrow{\text{транспонирование}} \left(\frac{I}{DB^{-1}}\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T.$$

Докажите это соотношение самостоятельно.