## Лекция 7

### 1. Теорема Кронекера—Капелли

**Теорема.**

*Система линейных уравнений*

$$AX = B$$

*совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы:*

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}[A|B].$$

◀ Совместность системы

$$AX = B \iff A_1x^1 + A_2x^2 + \dots + A_nx^n = B$$

означает, что

$$B \in L(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

т.е.

$$L(A_1, A_2, \dots, A_n) = L(B, A_1, A_2, \dots, A_n),$$

так что размерности этих линейных оболочек совпадают. ▶

### 2. Аффинное пространство

Для построения полноценной геометрии одних векторов недостаточно, необходимы еще точки. Пространство, состоящее из точек, и называется аффинным (или точечным) пространством; сокращение — АП. Определение АП получается при помощи аксиоматизации построения вектора по двум точкам.

#### 2.1. **Определение аффинного пространства.**

Аффинное пространство — это множество $\mathcal{A}$ элементов произвольной природы (точек), для которого заданы:

(A) некоторое линейное пространство $V$, над числовым полем $\mathbb{K}$, называемое ассоциированным с АП $\mathcal{A}$;

(B) отображение

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V,$$

которое ставит в соответствие каждой упорядоченной паре точек $A, B \in \mathcal{A}$ некоторый вектор из $V$, обозначаемый $\overrightarrow{AB}$ (точка $A$ называется началом, точка $B$ — концом вектора $\overrightarrow{AB}$).

При этом должны быть выполнены следующие аксиомы:

(1) для любой точки $A \in \mathcal{A}$ и любого вектора $\boldsymbol{a} \in V$ существует единственная точка $B \in \mathcal{A}$ такая, что $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$;

(2) для любых трех точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ выполняется соотношение

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Символом $\mathcal{A}(V,\mathbb{K})$ обозначаем АП $\mathcal{A}$ с ассоциированным ЛП $V$ над ЧП $\mathbb{K}$.

Размерность $\dim V$ ассоциированного ЛП $V$ называется размерностью АП $\mathcal{A}$ и обозначается $\dim \mathcal{A}$.

Полагая $A = B = C$, получаем

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}.$$

Полагая $A = C$, получаем

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

## 2.2. **Аффинная геометрия.**

Основные неопределяемые понятия: точка, вектор.

Основные неопределяемые отношения между понятиями:

(1) отношение между тремя векторами $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$;

(2) отношение между двумя векторами и числом: $\boldsymbol{b} = \alpha \cdot \boldsymbol{a}$;

(3) отношение между двумя точками и вектором: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$.

Эти отношения удовлетворяют восьми «векторным» и двум «аффинным» аксиомам.

Отметим, что в аффинном пространстве отсутствуют понятия длины вектора, угла между векторами, скалярного, векторного и смешанного произведения векторов.

## 2.3. **Примеры аффинных пространств.**

1. Пусть $V$ — ЛП. Определим АП, полагая $\mathcal{A} = V$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{ab}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Проверим выполнение аксиом АП:

(1) для любой «точки» $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ и любого вектора $\boldsymbol{c} \in V$ «точка» $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ является единственной точкой, для которой $\overrightarrow{\boldsymbol{ab}} = \boldsymbol{c}$;

(2) для любых трех «точек» $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ имеем

$$\overrightarrow{\boldsymbol{ab}} + \overrightarrow{\boldsymbol{bc}} = \overrightarrow{\boldsymbol{ac}} \iff (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}.$$

Таким образом, любое ЛП можно рассматривать как АП.

2. Множество $\mathbb{K}^n$ можно рассматривать как АП с ассоциированным ЛП $\mathbb{K}^n$. Если $A = (a^1, \dots, a^n)^T$ и $B = (b^1, \dots, b^n)^T$ — две точки из АП $\mathbb{K}^n$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ из ЛП $\mathbb{K}^n$ определяется как

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b^1 - a^1 \\ \vdots \\ b^n - a^n \end{pmatrix}.$$

## 2.4. **Изоморфизм аффинных пространств.**

Изоморфизм аффинных пространств $\mathcal{A}(V,\mathbb{K})$ и $\mathcal{B}(W,\mathbb{K})$ — это взаимно однозначное отображение

$$\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B},$$

рассматриваемое вместе с некоторым изоморфизмом ассоциированных ЛП

$$\varphi : V \to W,$$

обладающее следующим свойством: для любых точек $A, B \in \mathcal{A}$

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\psi(A)\psi(B)}.$$

**Теорема.**

*Любое АП $\mathcal{A}$ изоморфно ассоциированному ЛП $V$, рассматриваемому как АП.*

◀ Выберем в $\mathcal{A}$ произвольную точку $O$, называемую началом координат, и для произвольной точки $A$ положим

$$\psi : \mathcal{A} \to V, \quad \psi(A) = \overrightarrow{OA}. \tag{1}$$

Очевидно, это отображение является изоморфизмом аффинных пространств $\mathcal{A}$ и $V$; при этом соответствующий изоморфизм ассоциированных ЛП — это тождественное отображение $\varphi : V \to V$, $\varphi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$. ▶

Вектор, определяемый соотношением (1), называется радиус-вектором точки $A$ относительно начала координат $O$.

**Теорема.**

*Любое АП $\mathcal{A}$ размерности $n$ изоморфно АП $\mathbb{K}^n$.*

**Теорема.**

*Все АП над одним и тем же ЧП, имеющие одинаковую размерность, изоморфны.*

В этом состоит полнота аксиом аффинной геометрии: они однозначно (с точностью до изоморфизма) определяют соответствующее АП.

### 2.5. **Аффинная система координат.**

Аффинная система координат (АСК) в АП $\mathcal{A}(V, \mathbb{K})$ — это набор, состоящий из точки $O \in \mathcal{A}$, называемой началом координат, и базиса $\boldsymbol{e}_1, \dots \boldsymbol{e}_n \in V$. Обозначение: $O\boldsymbol{e}_1 \dots \boldsymbol{e}_n$.

Каждая АСК определяет некоторый изоморфизм

$$\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{K}^n, \quad A \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix},$$

называемый координатным изоморфизмом. Числа $a^1, \dots, a^n$ называются координатами точки $A$ в АСК $O\boldsymbol{e}_1 \dots \boldsymbol{e}_n$. Эти координаты являются не чем иным, как координатами радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\overrightarrow{OA} = a^1\boldsymbol{e}_1 + \dots + a^n\boldsymbol{e}_n.$$

## 3. Плоскости в аффинном пространстве

### 3.1. **Определения.**

$k$-Мерная плоскость ($k$-плоскость) в $n$-мерном АП — это множество точек, определяемых уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t^1\boldsymbol{a}_1 + \dots + t^k\boldsymbol{a}_k,$$

где $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ — ЛН векторы, называемые направляющими векторами плоскости, $\boldsymbol{r}_0$ — точка, называемая начальной (опорной) точкой плоскости.

Направлением $k$-мерной плоскости называется ЛО ее направляющих векторов: $L(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)$.

Уравнение $k$-плоскости совпадает по виду со структурой общего решения НСЛУ, причем направление этой плоскости — не что иное, как общее решение соответствующей ОСЛУ. Поэтому каждая $k$-плоскость может быть задана с помощью НСЛУ. Минимальное число уравнений в системе равно рангу матрицы системы и равно $n - k$.

Частные случаи:

(1) 1-плоскость в двумерном АП — это прямая на плоскости; она задается одним направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ и имеет уравнение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}.$$

(2) 1-плоскость в трехмерном АП — это прямая в пространстве; задается одним направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ и имеет уравнение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}.$$

(3) 2-плоскость в трехмерном АП; задается двумя направляющими векторами $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и имеет уравнение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}.$$

Разность $n - k$ называется коразмерностью $k$-плоскости.

$(n-1)$-Плоскости, т.е. $k$-плоскости коразмерности 1 называются гиперплоскостями. 1-Плоскость в двумерном АП (прямая на плоскости) и 2-плоскость в трехмерном АП (плоскость в пространстве) — примеры гиперплоскостей.

Гиперплоскость может быть задана одним уравнением вида

$$A_1x^1 + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n = B.$$

### 3.2. **Параллельность многомерных плоскостей.**

Пусть в $n$-мерном АП даны две плоскости:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t^1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + t^k\boldsymbol{a}_p, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + s^1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + s^p\boldsymbol{b}_q$$

разных, вообще говоря, размерностей. Обозначим направления этих плоскостей

$$P = L(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p), \quad \dim P = p, \qquad Q = L(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q), \quad \dim Q = q.$$

Будем считать, что $p \leqslant q$.

Плоскости называются параллельными, если

$$P \subseteq Q.$$

Параллельные плоскости могут иметь общие точки; в этом случае говорят, что

(1) плоскости совпадают, если их размерности равны;
(2) плоскость меньшей размерности содержится в плоскости большей размерности.

### 3.3. **Скрещивающиеся плоскости.**

Говорят, что $p$-плоскость с направлением $P$ и $q$-плоскость с направлением $Q$, $p \leqslant q$, $P \not\subset Q$, скрещиваются вдоль направления $R$, если они не имеют общих точек и

$$P \cap Q = R.$$

Так как $P \not\subset Q$, то $\dim(P \cap Q) < p$; поскольку для любых подпространств

$$\dim(P \cup Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q),$$

имеем

$$\dim(P \cap Q) = p + q - \dim(P \cup Q) \geqslant p + q - n.$$

Итак, в $n$-мерном АП $p$-плоскость и $q$-плоскость, $p \leqslant q$, могут скрещиваться вдоль подпространства, размерность которого заключена в пределах

$$\max(p+q-n,\ 0) \leqslant \dim(P \cap Q) \leqslant p-1.$$

В 2-мерном АП (на плоскости) не бывает скрещивающихся 1-плоскостей (прямых).

В 3-мерном АП (в пространстве) существуют 1-плоскости (прямые), скрещивающиеся вдоль 0-мерных направлений.

Анализ взаимного расположения двух плоскостей

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t^1\boldsymbol{a}_1 + \dots + t^k\boldsymbol{a}_p, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + s^1\boldsymbol{b}_1 + \dots + s^p\boldsymbol{b}_q$$

в АП сводится к анализу системы уравнений

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t^1\boldsymbol{a}_1 + \dots + t^k\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{r}_2 + s^1\boldsymbol{b}_1 + \dots + s^p\boldsymbol{b}_q$$

относительно переменных $t^1, \dots, t^p$, $s^1, \dots, s^q$.

## 4. Двумерное аффинное пространство

Двумерное АП называем плоскостью, 1-плоскость — прямой.

### 4.1. **Уравнение прямой на плоскости.**

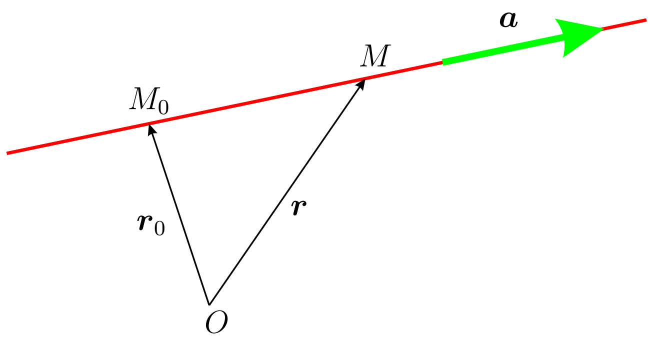
Векторное уравнение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$$

в произвольной системе координат примет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{r} = (x, y)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\boldsymbol{a} = (l, m)$.




Исключив параметр $t$, получим

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой на плоскости. В знаменателях допускаются нули; в этом случае соотношение следует «перемножить крест-накрест», как пропорцию.

4.2. **Расположение двух прямых на плоскости.**

Пусть на плоскости заданы две прямые

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + s\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - t\boldsymbol{a}_2$$

(направляющий вектор второй прямой выбран в виде $-\boldsymbol{a}_2$). Изучим множество их общих точек; для этого проанализируем уравнение

$$\boldsymbol{r}_1 + s\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{r}_2 - t\boldsymbol{a}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1.$$

В произвольной системе координат это векторное уравнение примет вид НСЛУ

$$s\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{a}_1 = (l_1, m_1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (l_2, m_2)^T$, $\boldsymbol{a}_1 = (x_1, y_1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (x_2, y_2)^T$.

Расширенная матрица этой НСЛУ имеет вид

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x_2 - x_1 \\ m_1 & m_2 & y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим ранги основной и расширенной матриц через

$$r = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x_2 - x_1 \\ m_1 & m_2 & y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Возможны следующие случаи:

(1) $r = 1$, $R = 1$. Система совместна, имеет однопараметрическое семейство решений: прямые совпадают.

(2) $r = 1$, $R = 2$. Система несовместна: прямые параллельны.

(3) $r = 2$, $R = 2$. Система совместна, имеет единственное решение: прямые пересекаются в единственной точке. Решение системы представляет собой значения параметров $s$, $-t$, которые нужно подставить в уравнения прямых, чтобы найти координаты точки пересечения.

Если прямые, рассматриваемые как гиперплоскости, задать уравнениями

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2,$$

то анализ взаимного их расположения сводится к изучению системы с расширенной матрицей

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

При решении системы сразу получаются координаты точки пересечения прямых.

4.3. **Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.**

Напишем уравнение прямой, прооходящей через точки

$$M_1(\boldsymbol{r}_1) = M_1(x_1, y_1), \quad M_2(\boldsymbol{r}_2) = M_2(x_2, y_2).$$

В качестве опорной точки можно выбрать любую из точек $M_1$ или $M_2$, а в качестве направляющего вектора — вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1).$$

Уравнение в векторном параметрическом виде:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1),$$

в каноническом виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

## 5. Трехмерное аффинное пространство

Трехмерное АП называем пространством, 1-плоскости — прямыми, 2-плоскости (гиперплоскости) — плоскостями.

### 5.1. Уравнения плоскостей.

Плоскость в пространстве может быть задана следующими способами.

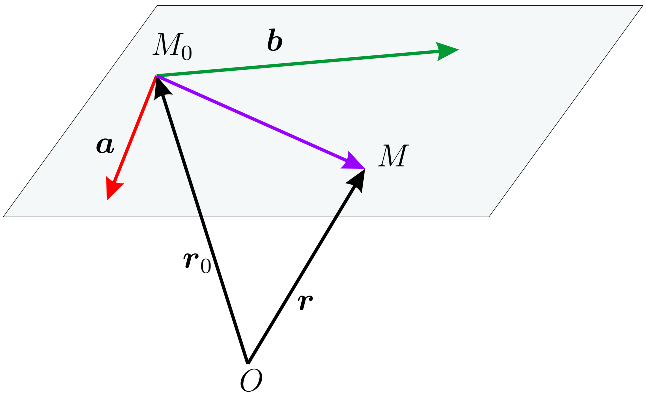
(1) Векторное параметрическое уравнение:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

(2) «Общее уравнение»:

$$Ax + By + Cz = D; \tag{3}$$

в этом случае (2) — общее решение НСЛУ (3).




Чтобы получить из (2) уравнение (3), имеется два способа.

1. Составить НСЛУ, общее решение которой известно.

2. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{MM_0}$, где $M$ — произвольная точка плоскости. Векторы $\overrightarrow{MM_0}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ЛЗ, поэтому равен нулю det-3, составленный из их координат:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия det-3 получится уравнение вида (3).

### 5.2. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

Проанализируем систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2. \end{cases}$$

Обозначим ранги основной и расширенной матриц этой системы через $r$ и $R$ соответственно:

$$r = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad R = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Возможны следующие случаи:

(1) $r = 1$, $R = 1$. Система совместна, имеет двупараметрическое семейство решений: плоскости совпадают.
(2) $r = 1$, $R = 2$. Система несовместна: плоскости параллельны.
(3) $r = 2$, $R = 2$. Система совместна, имеет однопараметрическое семейство решений: плоскости пересекаются (пересечением является прямая).

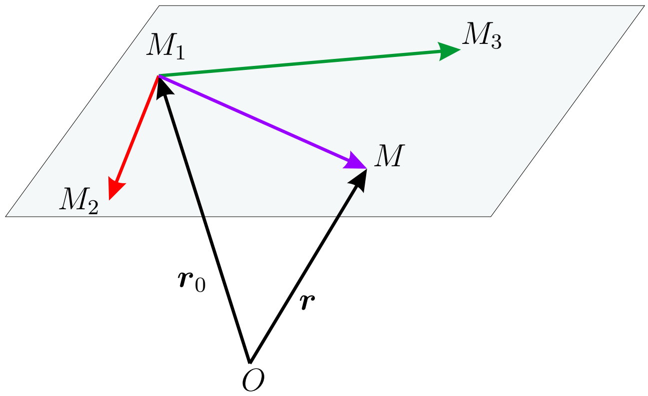
5.3. **Уравнение плоскости, проходящей через три точки.**

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки

$$M_1(\boldsymbol{r}_1) = M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(\boldsymbol{r}_2), \quad M_3(\boldsymbol{r}_3).$$

Если $M(\boldsymbol{r}) = M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, так что

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$




5.4. **Уравнение плоскости, проходящей через две точки параллельно заданному вектору.**

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{l} = (l, m, n)$. Если $M(\boldsymbol{r}) = M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{l}$ компланарны, так что

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

5.5. **Уравнения прямых.**

Прямая в пространстве может быть задана следующими способами.

(1) Векторное параметрическое уравнение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор опорной точки, $\boldsymbol{a}$ — направляющий вектор прямой.

(2) Если в пространстве зафиксирована некоторая АСК $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, то векторное параметрическое уравнение можно записать в координатном виде

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ и $\boldsymbol{a} = (l, m, n)^T$.

(3) Исключая параметр $t$ из параметрических уравнений, получим каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

(4) Прямая может быть задана как пересечение двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2. \end{cases}$$

Чтобы получить параметрическое уравнение прямой, нужно найти общее решение этой НСЛУ; при этом базисное решение НСЛУ представляет опорную точку прямой, а ФСР соответствующей ОСЛУ, состоящая из одного вектора, — направляющий вектор.

5.6. **Взаимное расположение двух прямых в пространстве.**

Рассмотрим две прямые

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + s\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - t\boldsymbol{a}_2$$

(направляющий вектор второй прямой выбран в виде $-\boldsymbol{a}_2$).

Общие точки прямых определяются из условия

$$\boldsymbol{r}_1 + s\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{r}_2 - t\boldsymbol{a}_2 \iff s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1.$$

Если выбрать в пространстве произвольную АСК, то это векторное уравнение можно записать в виде НСЛУ

$$t\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Обозначим через $r$ и $R$ ранги основной и расширенной матриц этой системы:

$$r = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}, \quad R = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x_2 - x_1 \\ m_1 & m_2 & y_2 - y_1 \\ n_1 & n_2 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Возможны следующие случаи:

(1) $r = R = 1$; система совместна, имеет однопараметрическое семейство решений: прямые совпадают.

(2) $r = 1$, $R = 2$; система несовместна, однако столбцы основной матрицы системы линейно зависимы, т.е. направляющие векторы прямых коллинеарны: прямые параллельны.

(3) $r = R = 2$; система совместна и ее решение еднственно: прямые пересекаются.

(4) $r = 2$, $R = 3$; система несовместна, столбцы основной матрицы системы линейно независимы, т.е. направляющие векторы прямых неколлинеарны: прямые скрещиваются.

5.7. **Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.**

Пусть плоскость задана уравнением

$$Ax + By + Cz = D,$$

а прямая — системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \end{cases}$$

ранг основной матрицы которой равен двум.

Анализ взаимного расположения прямой и плоскости сводится к анализу системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \\ Ax + By + Cz = D. \end{cases}$$

Обозначим ранги основной и расширенной матриц этой системы через $r$ и $R$; при этом $r \geqslant 2$.

Возможны следующие случаи.

(1) $r = R = 2$; система совместна и имеет однопараметрическое семейство решений: прямая лежит в плоскости.

(2) $r = 2$, $R = 3$; система несовместна: прямая и плоскость параллельны.

(3) $r = R = 3$; система совместна и имеет единственное решение: прямая пересекает плоскость в единственной точке.