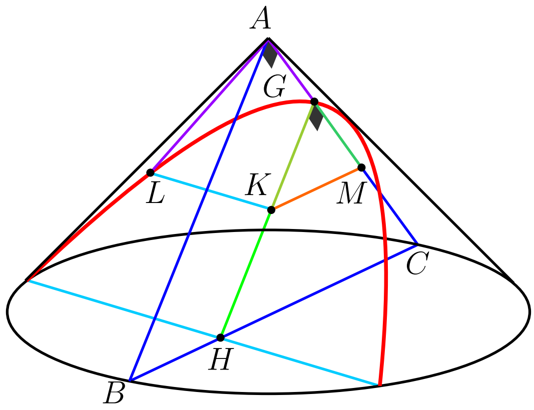
Лекция 9

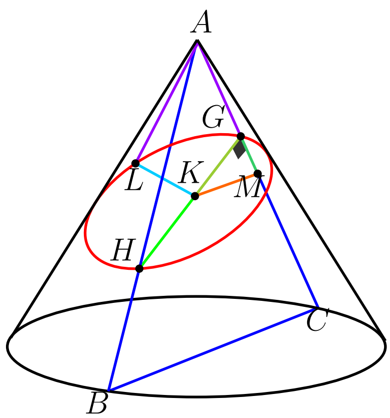
1. Конические сечения

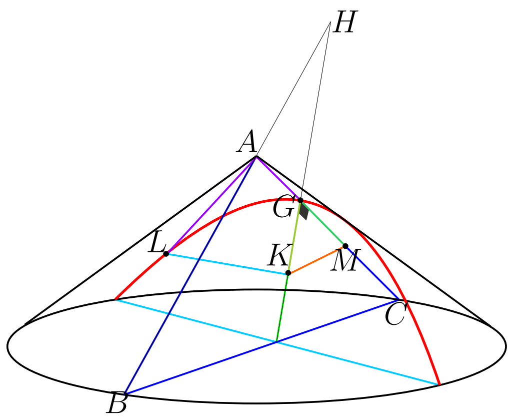
1.1. **Определение.**

Рассмотрим сечение прямого кругового конуса плоскостью, перпендикулярной к образующей этого конуса. При различных значениях угла α при вершине в осевом сечении конуса получаем кривые трех типов:

(1) параболу, если $\alpha = 90°$;
(2) эллипс, если $\alpha < 90°$;
(3) гиперболу, если $\alpha > 90°$.







Пусть A — вершина конуса, BC — диаметр основания, 2α — угол при вершине в осевом сечении конуса. Рассмотрим сечение конуса плоскостью, проходящей через точку G на прямолинейной образующей AC перпендикулярно AC. Эта плоскость пересекается с плоскостью ABC по прямой GK, которая является осью симметрии конического сечения (назовем ее главной осью).

Из произвольной точки L сечения опустим перпендикуляр LK на ось симметрии. Введем обозначения

$$AG = r, \quad GK = x, \quad KL = y.$$

Эти три отрезка взаимно перпендикулярны, поэтому

$$AL^2 = r^2 + x^2 + y^2.$$

Отложим на прямой AC отрезок $AM = AL$.

В случае параболы $GM = GK = x$, поэтому

$$AM = AG + GM = r + x,$$

$$r^2 + x^2 + y^2 = (r + x)^2 = r^2 + 2rx + x^2,$$

т.е.

$$y^2 = 2rx.$$

Это — каноническое уравнение параболы.

Рассмотрим случай эллипса и гиперболы. Обозначим

$$H = GK \cap AB, \quad 2a = GH.$$

Отрезок GH называется большой осью эллипса (вещественной осью гиперболы).

В $\triangle GKM$ имеем: $\angle KGM = 90^\circ$, $\angle GKM = \alpha$. Поэтому

$$GM = x \operatorname{tg} \alpha.$$

И для эллипса, и для гиперболы получаем

$$r^2 + x^2 + y^2 = (r + x \operatorname{tg} \alpha)^2 = r^2 + 2xr \operatorname{tg} \alpha + x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

т.е.

$$y^2 = 2xr \operatorname{tg} \alpha + x^2(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1).$$

Введем обозначение $p = r \operatorname{tg} \alpha$. Величина p называется параметром конического сечения.

В $\triangle AGH$ имеем: $\angle AGH = 90^\circ$,

- $\angle GAH = 2\alpha$ в случае эллипса,
- $\angle GAH = \pi - 2\alpha$ в случае гиперболы.

Для эллипса получаем

$$\frac{2a}{r} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

так что

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2.$$

Для гиперболы получаем:

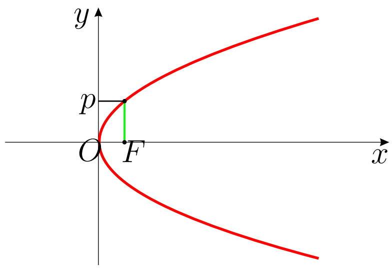
$$\frac{2a}{r} = \operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1},$$

так что

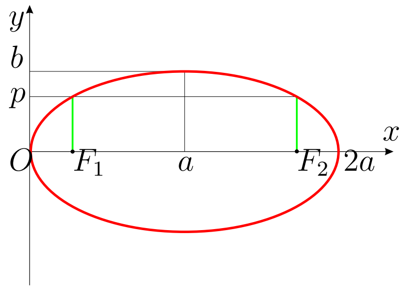
$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2.$$

Фокальная хорда параболы, эллипса, гиперболы — это отрезок, перпендикулярный главной оси конического сечения и имеющий длину $2p$. Точки пересечения фокальных хорд с главной осью называются фокусами.

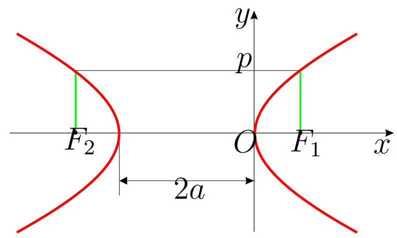
Итак, получены уравнения параболы, эллипса и гиперболы в прямоугольной системе координат, одна из осей которой является осью симметрии конического сечения, а вторая проходит через вершину конического сечения.



$y^2 = 2px$



$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$



$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$

1.2. **Парабола.** Рассмотрим каноническое уравнение параболы

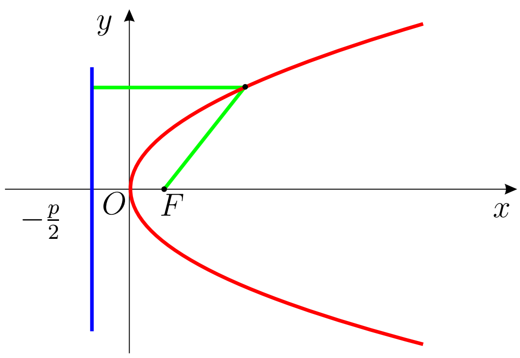
$$y^2 = 2px.$$

Имеем:

$$y^2 = 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

т.е. точка (x, y) параболы равноудалена от прямой $x = -p/2$ и точки $(p/2, 0)$, которая является фокусом параболы, поскольку при $x = p/2$ имеем $y^2 = p^2$. Это — директориальное свойство параболы.



Основные термины, связанные с параболой:

(1) p — (фокальный) параметр;
(2) $p/2$ — фокусное расстояние
(3) точка $F(p/2, 0)$ — фокус;
(4) прямая $x = -p/2$ — директриса.

1.3. **Эллипс.** Рассмотрим уравнение эллипса

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Выражение $2px - \frac{p}{a}x^2$ достигает максимума при $x = a$; этот максимум равен pa; обозначим $pa = b^2$.

Сделаем замену переменных

$$x = X + a, \quad y = Y.$$

Уравнение эллипса примет вид

$$Y^2 = 2p(X + a) - \frac{p}{a}(X + a)^2 = -\frac{p}{a}X^2 + pa.$$

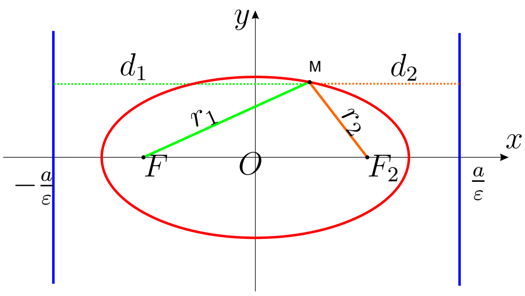
Отсюда получаем

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Это — каноническое уравнение эллипса.

Основные термины, связанные с эллипсом:

(1) a — большая полуось;
(2) b — малая полуось;
(3) $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(4) точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы;
(5) $2c$ — фокусное расстояние;
(6) $\varepsilon = c/a < 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(7) прямые $x = \pm a/\varepsilon$ — директрисы;
(8) $p = b^2/a$ — (фокальный) параметр;
(9) ось OX — большая (фокальная) ось;
(10) ось OY — малая ось;
(11) точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ — вершины эллипса;
(12) точка $O(0, 0)$ — центр эллипса.



Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Отрезки F_1M, F_2M называются фокальными радиусами точки M.

Теорема.

Фокальное свойство эллипса: Эллипс является геометрическим местом точек, сумма расстояний от которых до фокусов равно $2a$: $F_1M + F_2M = \mathrm{const}$.

◀ Рассмотрим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Длины фокальных радиусов точки $M(x, y)$ равны

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Поэтому

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 =$$
$$= \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon^2 ax + a^2 = (\varepsilon x + a)^2.$$

Поскольку $|x| \leqslant a$, $\varepsilon < 1$, имеем $|\varepsilon x| < a$, так что

$$r_1 = a + \varepsilon x.$$

Аналогично находим

$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

Следовательно,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Обратно, пусть $M(x,y)$ — точка плоскости, для которой сумма $F_1M + F_2M$ постоянна и равна $2a$, т.е.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Уничтожив радикалы, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Директориальное свойство эллипса: Эллипс является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до одноименной с фокусом директрисы равно ε.

◀ Расстояния от произвольной точки $M(x,y)$ эллипса до левой и правой директрис равны

$$d_1 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_1}{\varepsilon},$$

$$d_2 = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Обратно, если

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = \varepsilon\left|x \pm \frac{a}{\varepsilon}\right|,$$

то

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (\varepsilon x \pm a)^2$$

и поэтому

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

1.4. **Гипербола.** Рассмотрим уравнение гиперболы

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Сделаем замену переменных

$$x = X - a, y = Y.$$

Уравнение гиперболы примет вид

$$Y^2 = 2p(X-a) + \frac{p}{a}(X+a)^2 = \frac{p}{a}X^2 - pa.$$

Отсюда получаем

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

где введено обозначение $pa = b^2$. Это — каноническое уравнение гиперболы.

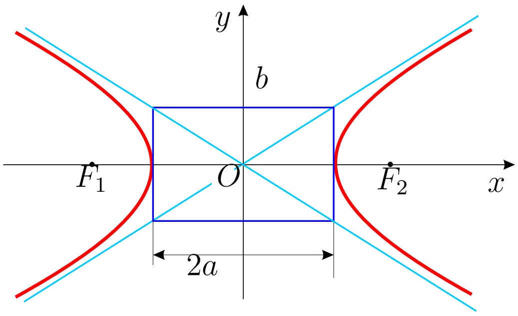
Выразим из уравнения гиперболы y:

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Имеем:

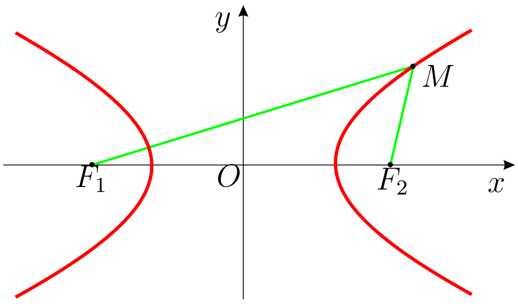
$$y = \pm b\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \pm b\frac{x}{a}\left(1 - \frac{a^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \pm\frac{b}{a}x + o(1).$$

Таким образом, прямые $ay \pm bx = 0$ являются асимптотами гиперболы.



Основные термины, связанные с гиперболой:

(1) a — вещественная полуось;
(2) b — мнимая полуось;
(3) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(4) точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы;
(5) $2c$ — фокусное расстояние;
(6) $\varepsilon = c/a > 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(7) прямые $x = \pm a/\varepsilon$ — директрисы;
(8) $p = b^2/a$ — (фокальный) параметр;
(9) ось OX — вещественная (фокальная) ось;
(10) ось OY — мнимая ось;
(11) точки $(\pm a, 0)$ вершины гиперболы;
(12) точка $O(0, 0)$ — центр гиперболы;
(13) прямые $ay \pm bx = 0$ — асимптоты гиперболы.



Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы. Отрезки F_1M, F_2M называются фокальными радиусами точки M.

Теорема.

Фокальное свойство гиперболы: Гипербола является геометрическим местом точек, разность расстояний от которых до фокусов равна по абсолютной величине $2a$: $|F_1M - F_2M| = \text{const}$.

◀ Рассмотрим гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Длины фокальных радиусов точки $M(x, y)$ равны

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Поэтому

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) =$$

$$= \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right) x^2 + 2xc + c^2 - b^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 + 2cx + a^2 =$$

$$= \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon^2 ax + a^2 = (\varepsilon a + x)^2.$$

Поскольку $|\varepsilon x| > |x| \geqslant a$, имеем

$$r_1 = \begin{cases} x\varepsilon + a, & x > 0, \\ -x\varepsilon - a, & x < 0. \end{cases}$$

Аналогично получаем

$$r_2 = \begin{cases} x\varepsilon - a, & x > 0, \\ -x\varepsilon + a, & x < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|r_1 - r_2| = \begin{cases} 2a, & x > 0, \\ -2a, & x < 0. \end{cases}$$

Обратно, пусть $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой $|F_1M - F_2M| = 2a$, т.е.

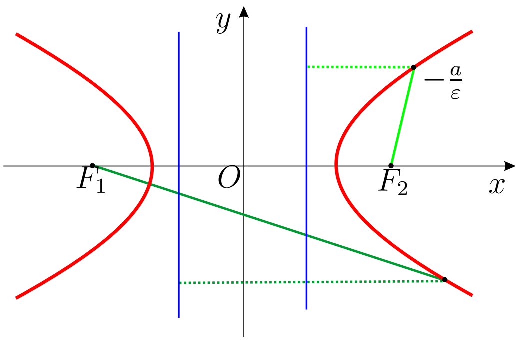
$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Уничтожив радикалы, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Директориальное свойство гиперболы: Гипербола является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до одноименной с фокусом директрисы равно ε.



◀ Расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы до левой и правой директрис равны

$$d_1 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_1}{\varepsilon},$$

$$d_2 = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Обратно, если

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = \varepsilon \left|x \pm \frac{a}{\varepsilon}\right|,$$

то

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (\varepsilon x \pm a)^2$$

и поэтому

$$(1-\varepsilon^2)x^2+y^2=a^2-c^2 \iff \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad \blacktriangleright$$

1.5. **Касательные к параболе, эллипсу, гиперболе.**

Касательная к параболе — это прямая, непараллельная оси параболы, имеющая с параболой одну общую точку.

Пусть (x_0, y_0) — точка касания параболы $y^2=2px$ и прямой

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad m\neq 0.$$

Имеем:

$$(y_0+mt)^2=2p(x_0+lt) \iff$$

$$\iff y_0^2+2my_0t+m^2t^2=2px_0+2plt \iff$$

$$\iff m^2t^2+2t(my_0-pl)=0.$$

Это квадратное уравнение должно иметь один (двойной) корень, что возможно лишь при выполнении условия

$$my_0-pl=0 \iff l=m\frac{y_0}{p}.$$

Каноническое уравнение касательной имеет вид

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \iff$$

$$\iff y_0(y-y_0)=p(x-x_0) \iff$$

$$\iff y_0y-2px_0=px-px_0$$

и окончательно

$$yy_0=p(x+x_0).$$

Касательная к эллипсу (гиперболе) — это прямая, имеющая с эллипсом (гиперболой) одну общую точку.

Пусть (x_0, y_0) — точка касания эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

и прямой

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt.$$

Имеем:

$$\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}_{=1}+2t\left(\frac{x_0l}{a^2}+\frac{y_0m}{b^2}\right)+t^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)=1,$$

$$t^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)+2t\left(\frac{x_0l}{a^2}+\frac{y_0m}{b^2}\right)=0.$$

Это квадратное уравнение должно иметь один (двойной) корень, что возможно при выполнении условия

$$\frac{x_0l}{a^2}+\frac{y_0m}{b^2}=0,$$

так что можно положить

$$l=\frac{y_0}{b^2}, \quad m=-\frac{x_0}{a^2}.$$

Каноническое уравнение касательной к эллипсу имеет вид
$$\frac{x-x_0}{y_0/b^2}=\frac{y-y_0}{-x_0/a^2} \iff \frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)=0,$$
откуда, учитывая соотношение $x_0^2/a^2+y_0^2/b^2=1$, получаем
$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

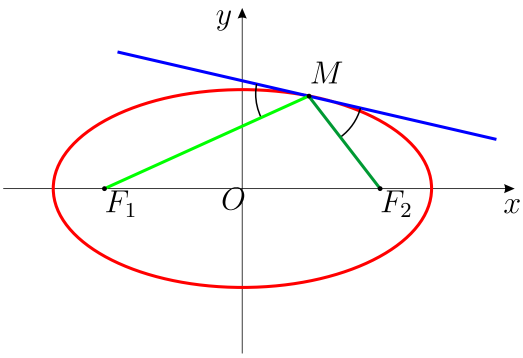
Аналогично получаем уравнение касательной к гиперболе
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
в точке (x_0, y_0):
$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

1.6. **Оптические свойства конических сечений.**

Теорема.

Оптическое свойство эллипса: фокальные радиусы произвольной точки M_0 эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке M_0.

Физическая интерпретация: если в фокусе эллипса поместить точечный источник света, а эллипс считать зеркалом, то после отраженный эллипсом луч попадет во второй фокус.



◀ Найдем синусы углов α_1 и α_2, которые фокальные радиусы произвольной точки $M_0(x_0, y_0)$ составляют с касательной к эллипсу в точке M_0.

Расстояние F_1D_1 от фокуса $F_1(-c, 0)$ до касательной, имеющей уравнение
$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$
равно
$$F_1D_1=\frac{\left|\dfrac{(-c)\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{0\cdot y_0}{b^2}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{\varepsilon x_0+a}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{r_1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}},$$
так что
$$\sin\alpha_1=\frac{F_1D_1}{F_1M_0}=\frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

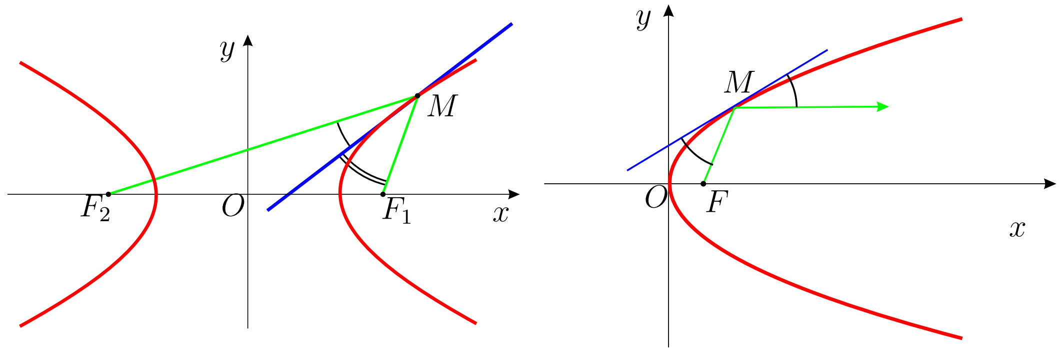
Аналогично получаем
$$\sin\alpha_2=\frac{F_2D_2}{F_2M_0}=\frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$
Таким образом, $\alpha_1=\alpha_2$. ▶

Теорема.

Оптическое свойство гиперболы: фокальные радиусы произвольной точки M_0 гиперболы составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке M_0.

Теорема.

Оптическое свойство параболы: фокальный радиус произвольной точки M_0 параболы составляет с касательной к параболе угол в точке M_0.



1.7. **Полярные уравнения конических сечений.**

Получим уравнения конических сечений в полярной системе координат, ось которой совпадает с главной осью кривой, а полюс находится в фокусе.

Поместим полюс в фокус параболы. Имеем:

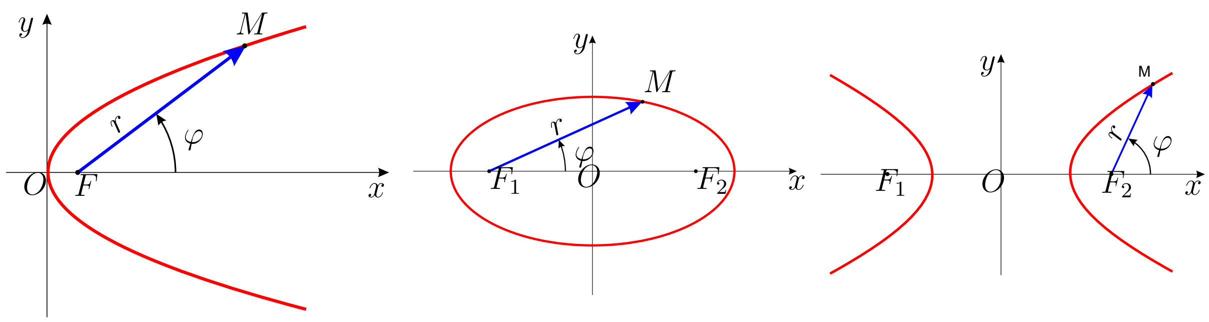
$$x - \frac{p}{2} = r\cos\varphi$$

(связь декартовых и полярных координат) и

$$r = x + \frac{p}{2}$$

(директориальное свойство параболы). Таким образом,

$$r\cos\varphi = r - p \iff r = \frac{p}{1-\cos\varphi}.$$



Поместим полюс в левый фокус эллипса. Имеем:

$$x + c = r\cos\varphi$$

(связь декартовых и полярных координат) и

$$r = \varepsilon x + a$$

(выражение для левого фокального радиуса). Таким образом,

$$r = \varepsilon(r\cos\varphi - c) + a \iff r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a - \varepsilon c = p,$$

так что

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

В случае гиперболы поместим полюс в правый фокус и ограничимся рассмотрением правой ветви гиперболы. Имеем:

$$r = \varepsilon x - a, \quad x - c = r\cos\varphi,$$

откуда получаем

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Таким образом, парабола, эллипс и гипербола (вернее, одна ее ветвь) задаются в полярных координатах одним и тем же уравнением.

1.8. **Конструкция Данделена.**