2007/2008 учебный год

1. Для прямой $y = kx + b$ найти направляющий вектор и вектор нормали.

2. Найти угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

3. Даны точки $P(3;\ 1)$ и $Q(0;\ 7)$. Для прямой PQ найти: а) параметрические уравнения с начальной точкой P и направляющим вектором $\overrightarrow{PQ}$; б) каноническое уравнение; в) уравнение с угловым коэффициентом; г) общее уравнение; д) уравнение в отрезках.

4. Дана прямая $x + 2y + 6 = 0$. Составить общее уравнение прямой l, содержащей точку $P(3;\ 4)$ и такой, что: а) l параллельна данной прямой; б) l перпендикулярна данной прямой.

5. Найти расстояние от точки $M(2;\ 5)$ до прямой $15x + 8y = 240$.

6. Найти общее уравнение прямой, все точки которой равноудалены от точек $A(2;\ 5)$ и $B(6;1)$.

7. Найти уравнение биссектрисы острого угла, образованного прямыми $7x + 24y + 1 = 0$ и $3x + 4y + 1 = 0$.

8. Найти точку A', симметричную точке $A(1;\ 1)$ относительно прямой $x + 2y = 38$.

9. Составить общее и параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $A(-2,4,3)$ параллельно векторам $\vec{a}(1,3,2)$, $\vec{b}(-1,2,4)$.

10. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2,1,1)$ перпендикулярно вектору $n(-2,5,1)$.

11. Найти расстояние от точки $A(2,1,1)$ до плоскости, проходящей через точку $B(1,3,-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(1,1,1)$.

12. Найти расстояние между параллельными плоскостями, проходящими через точки $A(1,2,3)$ и $B(-2,4,1)$ соответственно параллельно векторам $\vec{a}(2,2,3), \vec{b}(1,-1,2)$.

13. Найти расстояние от точки $A(1;\ 2;\ 3)$ до плоскости $2x + 2y + z = 24$.

14. Найти точку A', симметричную точке $A(7;\ 4;\ 1)$ относительно плоскости $x + 2y + 3z = 60$.

15. Найти уравнение плоскости, все точки которой равноудалены от точек $A(1;\ -1;\ 3)$ и $B(3;\ 3;\ 5)$.

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $A(1,-1,3), B(2,3,4), C(-1,1,2)$.

17. Даны две плоскости. Установить, являются ли они пересекающимися, параллельными или совпадающими: $3x + y - z + 1 = 0,\quad 5x + 3y + z + 2 = 0$.

18. При каких значениях параметра a плоскости $x + ay + z - 1 = 0,\ \ ax + 9y + \frac{a^3}{9}z + 3 = 0$ 1) пересекаются, 2) параллельны, 3) совпадают?

19. Найти общее уравнение плоскости, содержащей прямую $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ и параллельной прямой $\frac{x-7}{2} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-9}{4}$.

20. Найти общее уравнение плоскости, содержащей прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ и перпендикулярной плоскости $x - y + 2z + 7 = 0$.

21. Даны точки $P(1;\ 2;\ 3)$ и $Q(5;\ 5;\ 5)$. Составить:

а) параметрические уравнения прямой с начальной точкой P и направляющим вектором $\overrightarrow{PQ}$;

б) канонические уравнения прямой PQ.

22. Составить канонические уравнения прямой, содержащей точку $A(3;4;7)$ и параллельной прямой $\frac{x}{6}=\frac{y}{5}=\frac{z-9}{2}$.

23. Найти канонические уравнения сторон треугольника ABC с вершинами $A(-1;-1;-1)$, $B(0;1;2)$, $C(3;2;1)$.

24. Составить канонические уравнения прямой, содержащей точку $A(1;2;3)$ и перпендикулярной плоскости $x+y+2z-7=0$.

25. Дана пирамида $ABCD$ с вершинами $A(1;3;5)$, $B(1;1;1)$, $C(1;2;3)$, $D(3;0;0)$. Найти канонические уравнения высоты AH.

26. Даны прямые $x=5+t, y=3-t, z=13+t$ и $x=6+t, y=1+2t, z=10-t$. Составить уравнение их общего перпендикуляра и вычислить уравнение между прямыми.

27. Даны прямые $2x+7y-13=0, 3y-2z-1=0$ и $x+y-8=0, 2x+y-z=0$. Составить уравнение их общего перпендикуляра и вычислить уравнение между прямыми.

28. Составить канонические уравнения прямой, содержащей точку $A(1;2;3)$ и перпендикулярной плоскости $x+y+2z-7=0$.

29. Составить общее уравнение плоскости, содержащей точку

$A(1;2;-3)$ и перпендикулярной к прямой $\frac{x-7}{3}=\frac{y-8}{4}=\frac{z-9}{5}$.

30. Дана пирамида $ABCD$ с вершинами $A(1;3;5)$, $B(1;1;1)$, $C(1;2;3)$, $D(3;0;0)$. Найти канонические уравнения высоты AH.

31. Найти общее уравнение плоскости, содержащей прямую $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ и параллельной прямой $\frac{x-7}{2}=\frac{y-8}{3}=\frac{z-9}{4}$.

32. Найти общее уравнение плоскости, содержащей прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ и перпендикулярной плоскости $x-y+2z+7=0$.

33. Даны три вектора $\vec{a}(1,-1,1), \vec{b}(5,1,1), \vec{c}(0,3,-2)$. Найти: а) $\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$; б) $|a|^2+|b|^2-(a\cdot b)\cdot(b\cdot c)$; в) $(\overrightarrow{a\cdot c})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})-|a|^2(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

34. Даны три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ такие, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ и $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

35. Даны два вектора $\vec{a},\vec{b}$, причем $\vec{a}\neq\vec{0}$. Выразить через $\vec{a},\vec{b}$ ортогональную проекцию вектора $\vec{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\vec{a}$.

36. Найти векторное произведение векторов, заданных своими координатами: $\vec{a}(3,-1,2), \vec{b}(2,-3,-5)$.

37. Упростить выражения а) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$; б) $\left(\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\times\left(-\vec{a}+2\vec{b}-5\vec{c}\right)$.

38. Векторы $\vec{a},\vec{b}$ неколлинеарны. При каких значениях λ коллинеарны векторы $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ и $3\vec{a}+\lambda\vec{b}$?

39. Известно, что $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}, \vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}, \vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. Найти длины векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и углы между ними.

40. Доказать, что для трех неколлинеарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ равенства $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$ выполняются тогда и только тогда, когда $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

41. Доказать тождества:

a. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix}$;

b. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$

42. Найти смешанное произведение векторов, заданных своими координатами: $\vec{a}(3,5,1)$, $\vec{b}(4,0,-1)$, $\vec{c}(2,1,1)$.

43. Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарны. При каких значениях λ компланарны векторы $\vec{a}+2\vec{b}+\lambda\vec{c}$, $4\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}$, $7\vec{a}+8\vec{b}+\lambda^2\vec{c}$?

44. Три некомпланарных вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ отложены от одной точки. Найти:

а) объем треугольной призмы, основание которой построено на векторах $\vec{a},\vec{b}$, а боковое ребро совпадает с вектором $\vec{c}$;

б) объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

45. Доказать тождества:

а) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2 + \left|(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\right|^2 = \left|\overrightarrow{a\times b}\right|^2\cdot\left|\vec{c}\right|^2$;

б) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{c}\cdot(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) - \vec{d}\cdot(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

в) $\vec{d}\cdot(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b},\vec{c},\vec{d}) + \vec{b}\cdot(\vec{c},\vec{a},\vec{d}) + \vec{c}\cdot(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$;

г) $\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}\right) = \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)^2$;

д) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{x}\times\vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{x} & \vec{b}\cdot\vec{x} & \vec{c}\cdot\vec{x} \\ \vec{a}\cdot\vec{y} & \vec{b}\cdot\vec{y} & \vec{c}\cdot\vec{y} \end{vmatrix}$;

е) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{x} & \vec{b}\cdot\vec{x} & \vec{c}\cdot\vec{x} \\ \vec{a}\cdot\vec{y} & \vec{b}\cdot\vec{y} & \vec{c}\cdot\vec{y} \\ \vec{a}\cdot\vec{z} & \vec{b}\cdot\vec{z} & \vec{c}\cdot\vec{z} \end{vmatrix}$.

46. Дан произвольный тетраэдр $ABCD$. Доказать следующее утверждение: если перпендикулярны ребра AB и CD и ребра AC и BD, то ребра BC и AD также перпендикулярны.

47. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка P — середина ребра CC_1, точка Q — центр грани AA_1B_1B. Отрезок MN с концами на прямых AD и A_1B_1 пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

48. Даны плоские углы α,β,γ трехгранного угла. Найти его двугранные углы.

49. Доказать, что площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC, равна ¾ площади треугольника ABC.

50. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер произвольного тетераэдра, делит этот тетраэдр на две одинаковые по объему части.

51. Составить каноническое уравнение эллипса γ, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, причем у эллипса:

а) полуоси равны 5 и 2;

б) большая полуось равна 10, а расстояние между фокусами равно 8;

в) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен $3/5$;

г) малая ось равна 10, а эксцентриситет равен $12/13$;

д) большая ось равна 8, а расстояние между директрисами 13;

е) расстояние между директрисами равно 32 и эксцентриситет равен $1/2$.

52. Дан эллипс $\gamma: 9x^2+25y^2-225=0$. Найти его полуоси, фокусы и эксцентриситет. Составить уравнения директрис эллипса.

53. Дан эллипс $\gamma: 9x^2+5y^2=45$. Найти его полуоси, фокусы и эксцентриситет. Составить уравнения директрис эллипса.

54. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=2/5$, расстояние от точки эллипса до директрисы $\rho(M,d_1)=20$. Найти соответствующий фокальный радиус F_1M.

55. Составить каноническое уравнение гиперболы γ, фокусы которой лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, причем у гиперболы:

а) полуоси равны 6 и 18;

б) расстояние между фокусами равно 10 и эксцентриситет равен $5/3$;

в) расстояние между вершинами равно 48, а асимптоты заданы уравнениями $y=\pm\dfrac{12}{5}x$;

г) расстояние между директрисами равно $32/5$, а асимптоты заданы уравнениями $y=\pm\dfrac{4}{3}x$.

56. Чему равны полуоси, фокусы и эксцентриситет равносторонней гиперболы? Составить уравнения асимптот этой кривой.

57. Дана гипербола $\gamma: 16x^2-9y^2+144=0$. Найти ее полуоси, фокусы и эксцентриситет. Составить уравнения асимптот и директрис гиперболы.

58. Дана гипербола $\gamma: \dfrac{x^2}{80}-\dfrac{y^2}{20}=1$. Составить канонические уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки $M\left(10;-\sqrt{5}\right)$ гиперболы.

59. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=2$, фокальный радиус $F_2M=16$. Найти расстояние от точки до соответствующей директрисы $\rho(M,d_2)$.

60. Составить каноническое уравнение параболы γ с фокусом $F(-7;0)$ и директрисой $d: x-7=0$.

61. Найти фокальный параметр параболы и определить ее расположение относительно координатных осей, если парабола задана уравнением:

а) $x^2=5y$; **б)** $y^2=-4x$; **в)** $x^2=-y$.

62. Дана парабола $\gamma: y^2-24x=0$. Найти фокус и составить уравнение директрисы параболы.

63. Найти фокальный радиус FM точки параболы $\gamma: y^2=20x$, если абсцисса точки M равна 7.

64. На параболе $\gamma: y^2=16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.