

- Найдите производную: (1) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, (2) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$, (3) $f(x) = \ln(2\sqrt{e^x})$, (4) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$, (5) $f(x) = \sqrt{\arcsin x}$, (6) $f(x) = \arctg \sqrt{x}$, (7) $f(x) = \sqrt{\arctg x}$, (8) $f(x) = e^{\sqrt{-x}}$, (9) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.
- Найдите (1) $\int \sqrt[3]{x} dx$, (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$, (3) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$, (4) $\int \frac{dx}{\cos x}$, (5) $\int \frac{dx}{\sin x}$, (6) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$, (7) $\int \frac{x dx}{1+x^2}$.
- Найдите (1) $\int x e^{-3x} dx$, (2) $\int x^2 e^x dx$, (3) $\int x^2 \cos x dx$, (4) $\int \ln x dx$, (5) $\int x \ln x dx$, (6) $\int \arctg x dx$, (7) $\int x \arctg x dx$, (8) $\int \arcsin x dx$, (9) $\int x \arcsin x dx$.
- Найдите (1) $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$, (2) $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$, (3) $\int x \cos(x^2) dx$, (4) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$, (5) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$, (6) $\int \frac{\ln x}{x} dx$, (7) $\int x e^{-x^2} dx$, (8) $\int x^3 e^{x^2} dx$.
- Найдите (1) $\int \frac{(2x-3) dx}{x^2-5x+6}$, (2) $\int \frac{x dx}{x^2+x+1}$, (3) $\int \frac{dx}{e^x-1}$, (4) $\int \frac{e^x dx}{e^x-1}$.
- Найдите (1) $\int e^{2x} \sin 3x dx$, (2) $\int e^{-3x} \cos 2x dx$, (3) $\int \sin(\ln x) dx$, (4) $\int \cos(\ln x) dx$.
- Найдите $y^{(n)}(x)$, если (1) $y = x^m$, $m < n$, $m, n \in \mathcal{N}$, (2) $y = x^m$, $m = n$, $m, n \in \mathcal{N}$, (3) $y = x^m$, $m > n$, $m, n \in \mathcal{N}$, (4) $y = e^x$, (5) $y = e^{2x}$, (6) $y = x e^x$, (7) $y = x e^{-x}$, (8) $y = x^2 e^x$, (9) $y = \sqrt{x}$, (10) $y = \ln x$, (11) $y = \ln(x^2 + x)$, (12) $y = \ln \frac{2x-3}{3x-2}$, (13) $y = x \ln x$, (14) $y = x^2 \ln x$, (15) $y = \frac{\ln x}{x}$, (16) $y = \sin(x)$, (17) $y = \sin(3x)$, (18) $y = x \sin(x)$, (19) $y = x \sin(2x)$, (20) $y = x^2 \cos(2x)$.
- Найдите первый и второй дифференциалы функций (1) $f(x) = x^3$, (2) $f(x) = \ln x$, (3) $f(x) = \sqrt{x}$, (4) $f(x) = e^{-x}$, (5) $f(x) = \sin x$, (6) $f(x) = \sin(x^2)$, (7) $f(x) = \arctg x$, (8) $f(x) = \arcsin x$, (9) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$.
- Вычислите (a) df , (b) d^2f , (c) $f(x) + df + \frac{1}{2}d^2f$, (d) $f(x+dx)$, если (1) $f(x) = 2x+3$, $x=2$, $dx=3$, (2) $f(x) = x^3$, $x=1$, $dx=1$, (3) $f(x) = x^3$, $x=1$, $dx=0,1$, (4) $f(x) = \ln x$, $x=1$, $dx=1$, (5) $f(x) = \sqrt{x}$, $x=16$, $dx=9$, (6) $f(x) = e^x$, $x=\ln 10$, $dx=\ln 2$, (7) $f(x) = \sin x$, $x=\frac{\pi}{6}$, $dx=\frac{\pi}{6}$, (8) $f(x) = \arctg x$, $x=1$, $dx=\sqrt{3}-1$, (9) $f(x) = \arcsin x$, $x=\frac{1}{2}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.
- Вычислите $d^n f$, если (1) $f(x) = x^3$, $n=2$, (2) $f(x) = x^3$, $n=3$, (3) $f(x) = x^3$, $n=4$, (4) $f(x) = \frac{1}{x}$, (5) $f(x) = \ln x$, (6) $f(x) = x \ln x$, (7) $f(x) = \sqrt{x}$, (8) $f(x) = \sqrt{x}$, $n=3$, $x=4$, $dx=5$, (9) $f(x) = e^x$, (10) $f(x) = e^x$, $n=2006$, $x=\ln 36$, $dx=\frac{1}{2}$, (11) $f(x) = \sin x$, $n=2004$, (12) $f(x) = \sin x$, $n=2005$, (13) $f(x) = \sin x$, $n=2006$, (14) $f(x) = \sin x$, $n=2007$, (15) $f(x) = \cos x$, $n=2007$, $x=\frac{\pi}{3}$, $dx=\frac{1}{2}$, (16) $f(x) = x \sin x$, $n=8$, (17) $f(x) = x^2 \cos x$, $n=9$.
- Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow 0$. (1) $f(x) = \operatorname{tg} x$, (2) $f(x) = \sin x$, (3) $f(x) = x \sin x$, (4) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, (5) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, (6) $f(x) = \ln x$, (7) $f(x) = x \ln x$, (8) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, (9) $f(x) = x^{-1}$, (10) $f(x) = \arctg x$, (11) $f(x) = \frac{x}{\arctg x}$, (12) $f(x) = x^2 \arctg \frac{1}{x}$, (13) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, (14) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+5}$.
- Является ли верным утверждение: (1) $x = o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, (2) $x^2 = o(x)$ при $x \rightarrow 0$, (3) $x^{-1} = o(x^{-2})$ при $x \rightarrow +\infty$, (4) $x^{-2} = o(x^{-1})$ при $x \rightarrow +\infty$, (5) $(\ln x)^{-1} = o(x)$ при $x \rightarrow 0$, (6) $(\ln x)^{-1} = o(x^{-1})$ при $x \rightarrow +\infty$, (7) $x^{-1} = o((\ln x)^{-1})$ при $x \rightarrow +\infty$, (8) $\frac{1}{x \ln x} = o(\frac{1}{x})$ при $x \rightarrow +\infty$, (9) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, (10) $\sin x = x + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, (11) $\ln(1-x) = -x + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, (12) $\ln(1-x) = -x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$, (13) $\ln(1+x) = x + o(x^2)$ при $x \rightarrow +\infty$, (14) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \rightarrow +\infty$, (15) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = o(x^{-1})$ при $x \rightarrow +\infty$.
- При каких α и β является верным утверждение $f(x) = \alpha + \beta x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, если (1) $f(x) = (1+x)^2$, (2) $f(x) = (1+x)^{-1}$, (3) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$, (4) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, (5) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, (6) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, (7) $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$. Тот же вопрос для утверждения (8) $\sin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, (9) $\cos x = \alpha + \beta x^2 + o(x^2)$, (10) $\arctg x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, (11) $\arcsin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$.
- Вычислите (1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$, (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - 2 \sin a + \sin(a-x)}{x^2}$, (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$.
- Вычислите (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[12]{x}-1}$, (3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, (4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$, (5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{\sqrt{x+6}-3}$, (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+8}-2}$, (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 3x}$.
- Вычислите (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$, (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt{9+x}}{x}$, (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2-x})$, (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x-2})$, (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2})$, (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3-2})$, (7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2})$.
- Вычислите (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{0,1}}$, (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{2006}}{x}$, (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2006}}{2^x}$.
- Вычислите (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$, (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}$, (3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^{0,01}}$, (4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$, (5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2006}}{(1,001)^n}$, (6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$, (7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2006}}{n!}$, (8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2006}}{n^n}$, (9) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n!}$, (10) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^n}$.
- Вычислите (1) $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$, (2) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\ln x}$, (3) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$, (4) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{1/x}$, (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\arctg x - \frac{\pi}{2})$, (6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x-x^2}{x-2}$, (7) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x-x^2}{x-4}$, (8) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x-x^e}{x-e}$, (9) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x-x^e}{(x-e)^2}$.

20. Вычислите (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$, (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{3x}$, (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$,
(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 2 \sin 2x + \sin x}{x^3}$, (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$, (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{x^3}$, (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x + \sin x - 2x}{x^3}$,
(10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^3}$, (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1+x) - 2 \sin(1) + \sin(1-x)}{x^2}$,

21. Вычислите (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{x})^{3x}$, (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x^2})^{x^2}$, (3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{2}{x}}$, (4) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$,
(5) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\operatorname{tg} x}{x})^{1/x^2}$, (6) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\operatorname{arctg} x}{x})^{1/x^2}$, (7) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x})^{1/x^2}$, (8) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\arcsin x}{x})^{1/x^2}$, (9) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos \frac{x}{\sqrt{n}})^n$.

22. Вычислите (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{n})^{3n}$, (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{3}{n})^{4n}$, (3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n)^{1/n}$.

23. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины $f(b) - f(a)$, если

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 99$, $b = 101$. (2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 1,001$. (3) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 16$, $b = 25$.
(4) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = 9$, $b = 10$. (5) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = 1000$, $b = 1001$. (6) $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{3}$.
(7) $f(x) = \arcsin x$, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (8) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $a = 0,1$, $b = 0,2$. (9) $f(x) = x^{1001}$, $a = 1$, $b = 1,001$.

24. Вычислите значение многочлена Тейлора с центром $x_0 = 0$ указанного порядка n в указанной точке x , если (1) $f(x) = (2+x)^3$, $x = 1$, $n = 3$. (2) $f(x) = (1+x)^{2006}$, $x = 1$, $n = 2005$. (3) $f(x) = e^x$, $x = 2$, $n = 4$.

(4) $f(x) = xe^x$, $x = 2$, $n = 4$. (5) $f(x) = \sin x$, $x = 1$, $n = 5$. (6) $f(x) = \cos x$, $x = 2$, $n = 4$.
(7) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x = 0,36$, $n = 2$. (8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x = 0,64$, $n = 2$. (9) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x = 1$, $n = 2006$.
(10) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x = 1$, $n = 2006$. (11) $f(x) = \ln(1-x)$, $x = 1$, $n = 5$. (12) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x = 1$, $n = 3$.
(13) $f(x) = \arcsin(x)$, $x = 1$, $n = 3$.

25. Вычислите с точностью ε , используя формулу Тейлора. (1) $(1,01)^2$, $\varepsilon = 0,001$. (2) $(1,01)^{10}$, $\varepsilon = 0,01$,
(3) $(1,01)^{100}$, $\varepsilon = 0,1$, (4) $(0,99)^{200}$, $\varepsilon = 0,1$, (5) $(1,01)^{100} - (1,02)^{50}$, $\varepsilon = 0,1$, (6) $(0,99)^{100} - (0,98)^{50}$, $\varepsilon = 0,1$.

26. Классифицируйте все точки разрыва: (1) $f(x) = \frac{1}{x}$, (2) $f(x) = \frac{x}{|x|}$, (3) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, (4) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$,
(5) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, (6) $f(x) = \ln |x| \sin \frac{1}{x}$, (7) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, (8) $f(x) = x \cdot \frac{\sin(\pi x)}{\sin(\pi x)}$, (9) $f(x) = \operatorname{tg} x$, (10) $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$,
(11) $f(x) = e^{-1/x}$, (12) $f(x) = (1+x)^{1/x}$, (13) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, (14) $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, (15) $f(x) = x^{2006} e^{-1/x}$,
(16) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, (17) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$, (18) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{3\pi x}{1+x^2}$, (19) $f(x) = \ln |x|$, (20) $f(x) = x \ln |x|$, (21) $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln |x|}$.

27. Нарисуйте эскиз графика функции, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, перегиба, направление выпуклости, асимптоты, классифицируйте точки разрыва.

(1) $y = 3x^2 - 2x^3$, (2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$, (3) $y = x^3(8-x)^5$, (4) $y = x^4(9-x)^5$, (5) $y = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{8-x}$,
(6) $y = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{9-x}$, (7) $y = 2^x - x^2$, (8) $y = 4^x - x^4$, (9) $y = e^x - x^e$.

28. То же: (1) $y = x \ln x$, (2) $y = x \ln |x|$, (3) $y = x^2 \ln x$, (4) $y = \frac{x}{\ln x}$, (5) $y = \frac{\ln x}{x}$.

29. То же: (1) $y = xe^{-x}$, (2) $y = x^{2006} \cdot e^x$, (3) $y = \sqrt[3]{x} \cdot e^{-x}$, (4) $y = e^{1/x}$, (5) $y = e^{-x^2}$.

30. То же: (1) $y = \sqrt{x^2+x}$, (2) $y = \sqrt[3]{x^3+3x}$, (3) $y = x + \frac{1}{x}$, (4) $y = 4x + \frac{9}{x}$, (5) $y = \frac{2}{x^2+1}$, (6) $y = \frac{1}{1-x^2}$,
(7) $y = \frac{x}{1-x^2}$, (8) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$, (9) $y = \frac{2x}{x^2+1}$, (10) $y = \frac{3}{x^2+x+1}$.

31. То же: (1) $y = x \operatorname{arctg} x$, (2) $y = \frac{\sin x}{x}$, (3) $y = x \sin(\frac{1}{x})$.

32. Найдите множество всех предельных точек последовательности (1) $x_n = \frac{n-1}{n}$, (2) $x_n = \sin \frac{\pi n}{6}$,

(3) $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$, (4) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \begin{cases} x_n + \frac{1}{n}, & \text{если } x_n \leq 1, n \geq 1, \\ 0, & \text{если } x_n > 1. \end{cases}$

(5) $y_1 = 0$, $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{n}$, $x_n =$ дробная часть(y_n).

33. Вычислите (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} (0,3)^n$, (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-0,5)^n$, (3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, (4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

34. Исследуйте сходимость (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, (3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, (4) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$, (5) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$,
(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$, (8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$, (9) $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$, (10) $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{n})^n$, (11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$,
(12) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n}$, (13) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n^2}$, (14) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n^3}$, (15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

35. Исследуйте абсолютную и условную сходимость

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, (3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n} - 1)^n$, (4) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n} - 1)^{n^2}$.