ЗАДАЧИ ОБЩЕГО ЗАЧЕТА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
(II семестр)

1. **Функции, предел, непрерывность**

1.1. Нарисуйте семейство линий уровня функции

1.1.1. $u(x,y) = xy$;

1.1.2. $u(x,y) = \dfrac{y}{x}$;

1.1.3. $u(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$;

1.1.4. $u(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x + 2y}$.

1.2. Исследуйте функцию на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в заданной точке.

1.2.1. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0,0)$;

1.2.2. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0,0)$;

1.2.3. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0,0)$;

1.2.4. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$ в точках $(0,0)$ и $(0,1)$;

1.2.5. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$;

1.2.6. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0,0)$.

1.3. Найдите, если существует, предел при $x \to \infty, y \to \infty$:

1.3.1. $u(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$;

1.3.2. $u(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}$.

2. **Дифференцируемые функции**

2.1. Для функции $z = u(x,y)$

- найдите частные производные первого порядка;
- найдите градиент в точке (x_0, y_0);
- найдите первый дифференциал в точке (x_0, y_0);
- найдите координаты вектора нормали к графику $z = u(x,y)$ в точке $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$;
- запишите уравнение касательной плоскости к графику $z = u(x,y)$ в точке $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$;

- найдите производную по направлению заданного вектора $\vec{L}$ в точке (x_0, y_0).

2.1.1. $u(x,y) = 2x + 3y, \quad \vec{L} = (3;-2)$;

2.1.2. $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad \vec{L} = (2;3)$;

2.1.3. $u(x,y) = x^y, \quad \vec{L} = (1;-1)$;

2.1.4. $u(x,y) = x^3 - x^2y + y^3 - 1, \quad \vec{L}$ образует угол $\dfrac{\pi}{6}$ с осью Ox.

2.2. Для функции $f = u(x,y,z)$

- найдите частные производные первого порядка;
- найдите градиент в точке (x_0, y_0, z_0);
- найдите первый дифференциал;
- найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке (x_0, y_0, z_0).

2.2.1. $u(x,y,z) = x^3 + x + y + xyz, \quad \vec{L} = (1,1,1)$.

2.2.2. $u(x,y,z) = \ln(xyz), \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad \vec{L} = (1,1,1)$.

2.3. Найдите частные производные второго порядка и второй дифференциал функции:

2.3.1. $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

2.3.2. $u(x,y) = x^y$;

2.3.3. $u(x,y,z) = x^3 + x + y + xyz$;

2.3.4. $u(x,y,z) = \ln(xyz), \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$

2.4. Для функции $u(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ найдите $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

2.5. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции u, если f — дважды дифференцируемая функция, а x, y — независимые переменные:

2.5.1. $u = f(\xi, \theta), \quad \xi = x^2 + y^2, \quad \theta = x^2 - y^2$;

2.5.2. $u = f(\xi, \eta, \theta), \quad \xi = xy, \quad \eta = x - y, \quad \theta = x + y$.

2.6. Предполагая, что функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверьте следующее равенство:

2.6.1. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$, если $z = y\varphi(x^2 - y^2)$;

2.6.2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, если $z = xy + x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

2.6.3. $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \varphi(x - ay) + \psi(x + ay)$.

2.7. Запишите формулу Тейлора порядка n с центром разложения в точке M_0 с остаточным членом в форме Пеано для функции:

2.7.1. $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad M_0(2,3), \quad n = 2$;

2.7.2. $u = x^y, \quad M_0(e,e), \quad n = 2$;

2.7.3. $u = e^x \sin y, \quad M_0(0,0), \quad n = 3$;

2.7.4. $u = \ln(1 + x + y), \quad M_0(0,0), \quad n = 3$;

2.7.5. $u(x,y,z) = x^3 + x + y + xyz, \quad M_0(x_0, y_0), n = 3.$

3. Локальный экстремум

3.1. Найдите все точки локального экстремума данной функции.

3.1.1. $u(x,y) = x^2 + xy + y^2$;

3.1.2. $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

3.1.3. $u(x,y) = x^2 y^2$;

3.1.4. $u(x,y) = xy(3 - x - y)$;

3.1.5. $u(x,y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$;

3.1.6. $u(x,y) = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y}$;

3.1.7. $u(x,y) = x^3 y^4 e^{-x-y}, \quad x > 0, \quad y > 0$;

3.1.8. $u(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$;

3.1.9. $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$;

3.1.10. $u(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.

3.2. Исследуйте на экстремум функцию в данной точке M: $u = x\cos y + z\cos x, \quad M\left(\dfrac{\pi}{2};0;1\right)$.

3.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области:

$$u = xy - x^2 y - \frac{1}{2}y^2 x, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2.$$

4. Неявные функции

4.1. Найдите первую и вторую производные, найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий экстремума для дифференцируемой неявной функции $y = f(x)$, определяемой уравнением $F(x,y) = 0$:

4.1.1. $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$;

4.1.2. $F(x,y) = 8x^2 y - x^4 - y^4 = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$;

4.1.3. $F(x,y) = y^2 - ay - \sin x = 0, \quad 0 \le x \le 2\pi$.

4.2. Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z = z(x,y)$, заданной неявно уравнением

4.2.1. $xyz = x^2 + y^2 + z^2$;

4.2.2. $z\cos x + y\cos z + x\cos y = 3$;

4.2.3. $x^2 + zx + z^2 + y = 0$.

4.3. Предполагая, что точка (x_0, y_0, z_0) такова, что в некоторой ее окрестности данное уравнение имеет единственное решение вида $z = z(x,y)$, найдите значения указанных производных в точке (x_0, y_0).

4.3.1. $\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x} = z + x + y$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

4.3.2. $\ln(xy + yz) = z^2 + x^2 + y^2 - 2$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4.4. Найдите первый и второй дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases} xu + yv = 1, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$$

4.5. Предполагая, что φ - дифференцируемая функция, проверьте выполнение равенства: $xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$, если

$$z=\sqrt{xy+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

4.6. Преобразуйте уравнение, введя новые переменные:

4.6.1. $y^2+(x^2-xy)\dfrac{dy}{dx}=0,\quad y=tx,\quad y=y(t),$

4.6.2. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+y=0,\quad x=e^t,\quad y=y(t).$

4.7. Приняв v за новую функцию $v(x,y)$, преобразуйте уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=-u,\quad u=ve^{-x-y}$.

4.8. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуйте уравнение

4.8.1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=4x,\quad u=x,\quad v=x-y,\quad w=x-y+z.$

4.8.2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{2}x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{y},\quad u=\dfrac{y}{x},\quad v=y,\quad w=zy-x\cdot$

4.9. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуйте уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad u=x,\quad v=2\sqrt{y},\quad (y>0)\cdot$$

5. Условный экстремум.

5.1. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции u при заданных условиях связи. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

5.1.1. $u(x,y)=x^2+y^2$ при условии $x+y=2$.

5.1.2. $u(x,y)=x+y$ при условии $x^2+y^2=2$.

5.1.3. $u(x,y)=x+y$ при условии $xy=1$.

5.1.4. $u(x,y)=xy$ при условии $x^3+y^3-2xy=0$.

5.1.5. $u(x,y,z)=x+y+z$ при условии $xyz=1$.

5.1.6. $u(x,y,z)=x^2y^3z^4$ при условии $2x+3y+4z=9$.

5.1.7. $u(x,y,z)=xyz$ при условиях $x^2+y^2+z^2=1,\quad x+y+z=0$.

6. Определённый интеграл.

6.1. Вычислите $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2-\sin x}$; $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{(x^2+x+1)(x-1)}$; $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{2x}\cos 3x\,dx$; $\displaystyle\int_1^{e}\ln x\,dx$;

$$\int_0^{\pi/8}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$$

6.2. Вычислите $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x}\sin t^2dt$; $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{1}\arcsin\sqrt{t}dt$; $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}\ln\left(\frac{2t^2}{1+\operatorname{arctg}^2 t+\sin^4 t}\right)dt$; $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\operatorname{arctg}x}^{\cos x}e^{-t^2}dt$;

$$\frac{d}{db}\int_a^{b}\sin\left(x^2\right)dx;\quad \frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt.$$

6.3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой:

6.3.1. $x^2+y^2=2x$;

6.3.2. $\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2-y^2\right), \quad x>0$.

6.4. Вычислить площадь фигуры, заданной неравенствами:

6.4.1. $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le x(3-x)^2$;

6.4.2. $(x^2+y^2)^{1,75} \le y^2\sqrt{x}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

6.5. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры G, заданной системой неравенств $0 \le y \le x^2(2-x)$, $0 \le x \le 2$.

6.6. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры G, заданной системой неравенств $0 \le y \le x^2(2-x)$, $0 \le x \le 2$.

6.7. Вычислите длину кривой $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$.

6.8. Вычислите массу кривой $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$ с линейной плотностью $\rho(x)=2\sqrt{1+x}$.

6.9. Вычислите x-координату центра масс кривой $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность постоянна.

6.10. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0 \le t \le \pi$, если линейная плотность $\rho \equiv 1$.

6.11. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0 \le t \le \pi$; линейная плотность $\rho(t)=\sin t$.

6.12. Вычислите координаты центра масс и моменты инерции плоской фигуры относительно координатных осей , если фигура ограничена линиями $x=1, \quad x=2, \quad y=0, \quad y=x$; поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

6.13. Вычислите координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной кривыми $y=\cos x, \quad y=\sin x \quad \left(\pi/4 \le x \le 5\pi/4\right)$; поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

6.14. Вычислите момент инерции относительно оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $x=0, \quad x=1, \quad y=0, \quad y=\arcsin x$; поверхностная плотность $\rho(x) \equiv 1$.

6.15. Найдите объём тела, поверхность которого задана уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

6.16. Найдите объём усеченного конуса, основания которого ограничены эллипсами с полуосями A, B и a, b, а высота равна h.

7. **Кратные интегралы.**

7.1. Измените порядок интегрирования в повторных интегралах. Вычислите повторный интеграл.

$$\int_0^1 dy\int_y^1 xydx\,; \quad \int_0^\pi dx\int_0^{\sin x} 2ydy\,; \quad \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2ydy\,; \quad \int_0^1 dx\int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos ydy\,.$$

7.2. Сведите двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами:

7.2.1. $D=\left\{(x,y): |x|+|y| \le 1\right\}$;

7.2.2. $D=\left\{(x,y): y^2 \le x+2,\ y \ge x\right\}$.

7.3. Вычислите

7.3.1. $\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy, \quad D=\left\{x^2+y^2 \le 6\right\}$;

7.3.2. $\iint_D \left(x^2-y^2\right)dxdy, \quad D=\left\{1 \le x^2+y^2 \le 4\right\} \cap \left\{\frac{\pi}{6} \le \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \le \frac{\pi}{4}\right\} \cap x>0$.

7.4. Найдите замену переменных для двойного интеграла:

7.4.1. Найдите замену переменных $(u,v) \leftrightarrow (x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $y^2 = 16x, \quad y^2 = 9x, \quad x = 2y, \quad x = 4y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v).

Вычислите площадь области D, используя замену переменных в двойном интеграле.

7.4.2. Найдите замену переменных $(u,v) \leftrightarrow (x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $xe^y = 1, \quad xe^y = 2, \quad x = e^y, \quad x = 2e^y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v).

Вычислите площадь области D, используя замену переменных в двойном интеграле.

7.5. Вычислите массу $m = \iint\limits_G \rho dxdy$, статические моменты $M_y = \iint\limits_G xdxdy$, $M_x = \iint\limits_G ydxdy$ и моменты инерции $I_y = \iint\limits_G x^2dxdy$, $I_x = \iint\limits_G y^2dxdy$ однородной пластинки (плотность $\rho \equiv 1$), заданной соотношениями

7.5.1. $0 \le y \le x, \quad 0 \le x \le 2;$

7.5.2. $0 \le y \le x(4-x), \quad 0 \le x \le 4;$

7.5.3. $0 \le y \le \sin x, \quad 0 \le x \le \pi;$

7.5.4. $0 \le y \le x^{-1}, \quad 10^{-3} \le x \le 1;$

7.5.5. $0 \le y \le e^{-x}, \ 0 \le x \le 1000.$

7.6. Изобразите область D на плоскости (x,y), для которой верна формула: $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y}^{3-2y} f(x,y)\,dx$.

Измените порядок интегрирования.

7.7. Изобразите область D на плоскости (x,y), для которой верна формула: $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-2y}^{1-y} f(x,y)\,dx$.

Вычислите указанный интеграл для $f(x,y) = y$.

7.8. Сведите тройной интеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz$ к повторному, где G - область, ограниченная поверхностями $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 2$.

7.9. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$, область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z, \quad z = 2.$

7.10. Вычислите моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела (плотность $\rho \equiv 1$), ограниченного поверхностями $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = 0, \quad (z \ge 0)$.

7.11. Вычислите координаты центра масс и момент инерции относительно начала координат тела с плотностью $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \ge 0)$.

7.12. Пусть Т – тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1 \quad (z > 1)$. Найдите силу притяжения этим телом материальной точки массы m_0, находящейся в начале координат.

8. Криволинейные интегралы.

8.1. Вычислите криволинейные интегралы первого рода:

8.1.1. $\int\limits_L 1ds$, где L – кривая $x = t, \quad y = \dfrac{t^2}{2}, \ 0 \le t \le 1;$

8.1.2. $\int\limits_L yds$, где L – кривая $y = e^x$, $0 \le x \le 2;$

8.1.3. $\int\limits_L xydl,$ где L – часть ломаной линии $x + y = 1, \quad x - y = -1, \quad -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$.

8.1.4. $\int\limits_L x^2 y dl$, где $L = \left\{(x,y) : x = 4\cos t,\ y = \sin 2t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

8.2. Найдите координаты силы притяжения материальной точки массы m однородной полуокружностью массой M и радиусом R; точка помещена в центре соответствующей окружности.

8.3. Вычислите криволинейные интегралы второго рода:

8.3.1. $\int\limits_{AB} xdx + ydy$, где кривая AB задана уравнением $y = x^2$, $A(0,0)$, $B(1,1)$.

8.3.2. $\oint\limits_L (2-y)dx + xdy$, где кривая L задана соотношениями $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$ и пробегается в направлении возрастания параметра t.

8.3.3. $\oint\limits_L xdy + 2ydx$, где кривая L задана уравнениями $y = 0,\ \ y = x,\ \ y = \sqrt{1-x^2},\ \ 0 < y < x$.

8.3.4. $\oint\limits_L xydx - x^3y^3dy$, где L – замкнутый контур, заданный уравнением $|x-y| + |x+y| = 1$.

8.3.5. $\oint\limits_L ydx + zdy + xdz$, где L – кривая $x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = t,\ 0 \le t \le 2\pi$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

8.4. С помощью криволинейного интеграла найдите площадь области, ограниченной:

8.4.1. эллипсом $x = a\sin t,\ y = b\cos t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ a > 0,\ b > 0$;

8.4.2. параболой $(x+y)^2 = 2ax \quad (a > 0)$ и осью Ox.

8.4.3. астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

8.5. Вычислите моменты инерции относительно осей координат кривой, заданной как пересечение поверхности $2x^2 + y^2 - z^2 = -1$ и плоскости $z = x + 1$.

8.6. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \left\{x - y, 2x + y^2\right\}$ вдоль части параболы $x = y^2$, пробегаемой от точки $A(1, -1)$ до точки $B(1, 1)$.

8.7. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \{y, x\}$ вдоль контура, заданного как пересечение эллипсоида $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $z = x - 2$, пробегаемого против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 0, -3)$.