ВОПРОСЫ К ПЕРВОЙ ЧАСТИ ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(I КУРС, ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР 2007-2008)

1. Сформулируйте определение шаровой окрестности точки пространства R^m .
2. Сформулируйте определение прямоугольной окрестности точки пространства R^m .
3. Сформулируйте определение окрестности точки пространства R^m .
4. Сформулируйте определение внутренней точки множества D точек пространства R^m .
5. Сформулируйте определение изолированной точки множества D точек пространства R^m .
6. Сформулируйте определение граничной точки множества D точек пространства R^m .
7. Сформулируйте определение границы множества.
8. Сформулируйте определение открытого множества точек пространства R^m .
9. Сформулируйте определение замкнутого множества точек пространства R^m .
10. Сформулируйте определение предельной точки множества D точек пространства R^m .
11. Сформулируйте определение связного множества точек пространства R^m.
12. Сформулируйте определение непрерывной кривой в пространстве R^m.
13. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, которое не имеет внутренних точек.
14. Может ли множество, содержащее хотя бы одну свою граничную точку, быть открытым?
15. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого граничные.
16. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого предельные.
17. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, которое совпадает со своей границей.
18. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, для которого множество всех предельных точек не совпадает с множеством всех граничных точек.
19. Приведите пример непустого замкнутого множества точек на плоскости, которое не имеет ни одной предельной точки.
20. Приведите пример множества, каждая граничная точка которого является его предельной точкой.
21. Приведите пример множества, каждая граничная точка которого является его изолированной точкой.
22. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\right\}$.
23. Найдите все предельные точки множества точек на плоскости $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\right\}$.

24. Сформулируйте определение ограниченной последовательности точек пространства R^m.
25. Сформулируйте определение неограниченной последовательности точек пространства R^m.
26. Сформулируйте определение предельной точки последовательности точек пространства R^m.
27. Сформулируйте определение предела последовательности точек пространства R^m.
28. Сформулируйте определение сходящейся последовательности точек пространства R^m.
29. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности точек пространства R^m.
30. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности точек пространства R^m.
31. Сформулируйте теорему Больцано-Вейерштрасса.
32. Сформулируйте определение ограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.
33. Сформулируйте определение неограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.
34. Сформулируйте определение ограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.
35. Сформулируйте определение неограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.
36. Сформулируйте определение точной верхней грани функции m переменных на множестве D точек пространства R^m.
37. Сформулируйте определение точной нижней грани функции m переменных на множестве D точек пространства R^m.
38. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R^m$.
39. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R^m$.
40. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $u(M)$ при $M \to \infty$.
41. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $u(M)$ при $M \to \infty$.
42. Сформулируйте определение непрерывной функции $u(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$.
43. Сформулируйте определение непрерывной функции $u(x, y)$ по совокупности переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$.
44. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R_{m.}$
45. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы непрерывных функций нескольких переменных.
46. Сформулируйте теорему о непрерывности произведения непрерывных функций нескольких переменных.
47. Сформулируйте теорему о непрерывности частного двух непрерывных функций нескольких переменных.

48. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции нескольких переменных через любое промежуточное значение.
49. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.
50. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.
51. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции нескольких переменных.
52. Сформулируйте теорему Кантора для функции нескольких переменных.
53. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0.
54. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M \to \infty$.
55. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0.
56. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M \to \infty$.
57. Сформулируйте “по Гейне” отрицание того, что число b является пределом функции $u(M)$ точке M_0.
58. Приведите пример ограниченной сверху и неограниченной снизу функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\right\}$.
59. Приведите пример неограниченной сверху и ограниченной снизу функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\right\}$.
60. Приведите пример неограниченной снизу и неограниченной сверху функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\right\}$.
61. Сформулируйте определение дифференцируемой функции $f(x_1,\dots,x_m)$ в точке $M(x_1,x_2,\dots,x_m)$.
62. Сформулируйте определение частной производной функции $f(x_1,\dots,x_m)$ по переменной x_k в точке $M(x_1,x_2,\dots,x_m)$.
63. Сформулируйте определение первого дифференциала функции нескольких переменных.
64. Сформулируйте определение касательной плоскости к графику функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0\left(x_0,y_0,f\left(x_0,y_0\right)\right)$.
65. Сформулируйте определение n раз дифференцируемой функции нескольких переменных в данной точке.
66. Сформулируйте определение второго дифференциала функции $u\left(x_1,\dots,x_m\right)$ в данной точке.
67. Сформулируйте определение n – ого дифференциала функции $u\left(x_1,\dots,x_m\right)$ в данной точке.
68. Сформулируйте определение градиента функции $f(x,y,z)$ в данной точке $M(x_0,y_0,z_0)$.
69. Сформулируйте определение производной по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ для функции $f(x,y,z)$ в точке $M(x_0,y_0,z_0)$.
70. Сформулируйте теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $u(x,y)$ в точке.

71. Сформулируйте теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x_1,...,x_m)$ в точке $M_0(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, ..., \mathring{x}_m)$.
72. Сформулируйте теорему о достаточных условиях равенства $u_{xy} = u_{yx}$ в данной точке.
73. Сформулируйте теорему о касательной плоскости к графику функции двух переменных.
74. Сформулируйте теорему о дифференцируемости сложной функции.
75. Запишите формулу для частных производных сложной функции.
76. Запишите выражение производной функции $f(x, y, z)$ по заданному направлению в данной точке через частные производные функции в этой точке.
77. Запишите выражение производной функции $f(x, y, z)$ по заданному направлению в данной точке через градиент функции в этой точке.
78. Запишите формулу Лагранжа конечных приращений для функции нескольких переменных. При каких условиях эта формула верна?

79. Запишите выражение для второго дифференциала функции нескольких независимых переменных.
80. Запишите выражение для дифференциала n–го порядка функции нескольких независимых переменных.
81. Запишите выражение для второго дифференциала сложной функции нескольких переменных.
82. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x_1,...,x_m)$ с центром разложения в точке $M_0(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, ..., \mathring{x}_m)$.
83. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x_1,...,x_m)$ с центром разложения в точке $M_0(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, ..., \mathring{x}_m)$.
84. Что такое “инвариантность формы первого дифференциала”?
85. Что такое “неинвариантность формы дифференциала второго порядка”?

86. Сформулируйте определение локального экстремума функции нескольких переменных.
87. Сформулируйте необходимые условия локального экстремума в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ функции $u\left(x, y\right)$, дифференцируемой в этой точке.
88. Сформулируйте достаточные условия локального экстремума в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ дважды дифференцируемой в этой точке функции $u\left(x, y\right)$.
89. Сформулируйте определение зависимости функций $f_1\left(x_2,...,x_n\right),\ldots,$ $f_k\left(x_2,...,x_n\right)$.
90. Сформулируйте определение независимости функций $f_1\left(x_2,...,x_n\right),\ldots,$ $f_k\left(x_2,...,x_n\right)$.
91. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F\left(x, y\right) = 0$.

92. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$.
93. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$.
94. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$.
95. Сформулируйте теорему о существовании и дифференцируемости функций $y = f(x),\ z = g(x)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$
96. Сформулируйте теорему о достаточных условиях независимости функций.
97. Сформулируйте теорему о зависимости и независимости функций.
98. Сформулируйте определение экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y) = 0$.
99. Сформулируйте определение экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z) = 0$.
100. Сформулируйте определение экстремума функции $u(x,y,z)$ с двумя условиями связи $f(x,y,z) = 0,\ g(x,y,z) = 0$.
101. Сформулируйте теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y) = 0$ в форме Лагранжа.
102. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y) = 0$ в форме Лагранжа.
103. Сформулируйте теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z) = 0$ в форме Лагранжа.
104. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z) = 0$ в форме Лагранжа.
105. Сформулируйте определение интегральной суммы
106. Сформулируйте определение предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.
107. Сформулируйте определение нижней суммы (Дарбу).
108. Сформулируйте определение верхней суммы (Дарбу).
109. Сформулируйте определение предела верхних (нижних) сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.
110. Сформулируйте определение верхнего (нижнего) интеграла Дарбу.
111. Сформулируйте определение длины плоской кривой, заданной в параметрической форме.
112. Сформулируйте определение квадрируемой плоской фигуры.
113. Перечислите свойства сумм Дарбу.
114. Сформулируйте лемму Дарбу.
115. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ в терминах нижнего и верхнего интегралов Дарбу.
116. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ в терминах нижних и верхних сумм.

117. Запишите формулу среднего значения и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
118. Запишите формулу Ньютона – Лейбница и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
119. Запишите формулу замены переменной и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
120. Запишите формулу интегрирования по частям и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
121. Запишите формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной параметрически, и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
122. Запишите формулу прямоугольников приближенного вычисления определенных интегралов.
123. Запишите формулу трапеций приближенного вычисления определенных интегралов.
124. Запишите формулу парабол приближенного вычисления определенных интегралов.
125. Запишите формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
126. Запишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла.
127. Запишите формулу для вычисления площади криволинейного сектора помощью определенного интеграла.
128. Запишите формулу для вычисления массы кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$; линейная плотность равна $\rho(t)$.
129. Запишите формулу для вычисления массы кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$; линейная плотность равна $\rho(x)$.
130. Запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Линейная плотность постоянна.
131. Запишите формулу для вычисления y – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$; линейная плотность постоянна.
132. Запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$; линейная плотность постоянна.
133. Запишите формулу для вычисления y – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$; линейная плотность постоянна.
134. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Ox кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$; линейная плотность постоянна и равна 1.
135. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Oy кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая

задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$; линейная плотность постоянна и равна 1.

136. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Ox кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$; линейная плотность постоянна и равна 1.
137. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Oy кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$; линейная плотность постоянна и равна 1.
138. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения T путем добавления к нему p новых точек. Определите знак разности верхних сумм функции $f(x)$ для разбиений T и T'.
139. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения T путем добавления к нему p новых точек. Определите знак разности нижних сумм функции $f(x)$ для разбиений T и T'.
140. Пусть разбиение T' получено путем добавления к разбиению T некоторого числа новых точек. Как изменится при этом верхняя сумма ?
141. Используя определённый интеграл, запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс однородной фигуры D на плоскости $(x;y)$, заданной системой неравенств $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, все указанные функции непрерывны.
142. Используя определённый интеграл, запишите формулу для вычисления y – координаты центра масс однородной фигуры D на плоскости $(x;y)$, заданной системой неравенств $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, все указанные функции непрерывны.
143. Пусть фигура D на плоскости $(x;y)$ задана системой неравенств $a \le x \le b$, $0 \le \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, все указанные функции непрерывны. Используя определённый интеграл, запишите формулу для вычисления объёма тела G, которое получается в результате вращения фигуры D вокруг оси x.
144. Пусть фигура D на плоскости $(x;y)$ задана системой неравенств $a \le x \le b$, $0 \le \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, все указанные функции непрерывны. Используя определённый интеграл, запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс однородного тела G, которое получается в результате вращения фигуры D вокруг оси Ox.

145. Дайте определение интегральной суммы для двойного интеграла.
146. Для двойного интеграла дайте определение предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.
147. Сформулируйте теорему о сведении двойного интеграла к повторному.
148. Сформулируйте теорему о формуле замены переменных для двойного интеграла.
149. Сформулируйте определение криволинейного интеграла I рода от функции $f(x,y)$ по заданной кривой.
150. Сформулируйте определение криволинейного интеграла II рода $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx$.
151. Сформулируйте определение криволинейного интеграла II рода $\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$.
152. Сформулируйте достаточные условия существования криволинейного интеграла $\int\limits_{L} f(x,y)\,dl$ по кривой L.
153. Сформулируйте достаточные условия существования криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx$.
154. Сформулируйте достаточные условия существования криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$.
155. Запишите формулу Грина и сформулируйте достаточные условия применимости.
156. Выразите криволинейный интеграл $\int\limits_{L} f(x,y)\,dl$ через определённый интеграл.
157. Выразите криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx$ через определённый интеграл.
158. Выразите криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$ через определённый интеграл.
159. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L. Запишите формулу, выражающую площадь области G через интеграл вида $\oint\limits_{L} f(x,y)\,dx$.
160. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L и площадью S. Запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс области G через интеграл вида $\oint\limits_{L} f(x,y)\,dx$, если поверхностная плотность равна 1.
161. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L и площадью S. Запишите формулу для вычисления y – координаты центра масс области G через интеграл вида $\oint\limits_{L} f(x,y)\,dy$, если поверхностная плотность равна 1.
162. Пусть D – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L. Запишите в виде двойного интеграла по области D формулу для вычисления работы силы $\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y); Q(x,y)\big)$ при перемещении материальной точки по замкнутому контуру L против часовой стрелки, если все функции непрерывно дифференцируемы в D.