ОБЩИЙ ЗАЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (3 СЕМЕСТР)

1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

1.1. Найдите вектор нормали и запишите уравнение касательной плоскости к поверхности S в заданной точке M:

1.1.1. $S: z = x^2 + y^2$; $M(3,4,25)$.

1.1.2. $S: x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 2$; $M(1,1,0)$.

1.1.3. $S: x = 2uv$, $y = u + v$, $z = u^2 + v^2$, $M(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, *где* $u_0 = 1, v_0 = -1$.

2. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого рода. Приложения.

2.1. Найдите площадь поверхности с помощью двойного интеграла:

2.1.1. $z = 3x + 4y$, $x^2 + y^2 \le 1$.

2.1.2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$.

2.1.3. $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$.

2.1.4. $z = xy$, $x^2 + y^2 \le a^2$.

2.1.5. $z = x^2 + y^2$, $\left(x^2 + y^2\right)^2 \le xy$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

2.1.6. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0$, $x^2 + y^2 \le 1$.

2.1.7. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v, 0 \le u \le a, 0 \le v \le 2\pi.$

2.2. Найдите поверхностные интегралы I рода.

2.2.1. $\iint_S dS$, где поверхность $S: x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$.

2.2.2. $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность $S: x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$.

2.2.3. $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \bigcap z \ge 0$.

2.2.4. $\iint\limits_S (x^2 + y^2)ds$, где S – граница тела $V = \{(x,y,z): \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\}$.

2.2.5. $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2})ds$, где S – часть параболоида $2z = 2 - x^2 - y^2, z \ge 0$.

2.3. Найдите координаты центра масс части однородной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ с помощью поверхностного интеграла.

2.4. Найдите момент инерции относительно оси Oz части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$. Поверхностная плотность $\rho = x$.

2.5. Найдите момент инерции относительно оси Oz части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$, $y \ge 0$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$. Поверхностная плотность $\rho = zy$.

3. Поверхностные интегралы второго рода. Приложения.

3.1. Найдите поверхностные интегралы, не пользуясь формулой Остроградского-Гаусса:

3.1.1. $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S – верхняя сторона плоскости

$x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$, то есть нормаль к плоскости составляет острый угол с осью Oz.

3.1.2. $\iint\limits_S (y^2 + z^2) dxdy$, где S - часть внешней стороны цилиндрической поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le y \le b$

3.1.3. $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2) dxdy$, где S - часть внешней стороны конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le c$ (внешняя нормаль образует тупой угол с осью Oz).

3.1.4. $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S - часть внутренней стороны гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \le z \le 3$.

3.1.5. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3.2. Найдите поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S в направлении внешней нормали к S.

3.2.1. $\vec{F} = \left\{-x^3, -y^3, -z^3\right\}$, S - поверхность куба $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

3.2.2. $\vec{F} = \left\{0, y^3, z\right\}$, S - часть параболоида $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 2$.

4. Формула Остроградского - Гаусса.

4.1. Найдите интегралы, используя формулу Остроградского-Гаусса:

4.1.1. $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S - внутренняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

4.1.2. $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S - внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \le z \le H$.

4.1.3. $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$, $z \in [-1;1]$.

5. Формула Стокса.

5.1. Пользуясь формулой Стокса, вычислите интегралы:

5.1.1. $\int\limits_{AB} \left(x^2 - yz\right) dx + \left(y^2 - xz\right) dy + \left(z^2 - xy\right) dz$, где AB есть отрезок винтовой линии $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \dfrac{h}{2\pi}\varphi$ от точки $A\left(a, 0, 0\right)$ до точки $B\left(a, 0, h\right)$.

5.1.2. $\oint\limits_L y^2 dx + xydy + \left(x^2 + y^2\right) dz$, где L – замкнутый контур, образованный при пересечении трех плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=a$ с эллиптическим параболоидом $x^2+y^2=az$, причем $x\geq 0$, $y\geq 0$ ($a>0$). Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,0,2a)$.

5.1.3. $\oint\limits_L xdx+xdy+zdz$, где L – окружность, образованная при пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=8$ и плоскости $x=z$. Обход окружности совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,0,5)$.

5.1.4. $\oint\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, где L – эллипс, образованный при пересечении цилиндрической поверхности $x^2+y^2=a^2$ и плоскости $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ ($a>0$, $h>0$), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a,0,0)$

5.2. Пользуясь формулой Стокса, найдите циркуляцию векторного поля $\vec{F}=\{z^3,x^3,y^3\}$ вдоль контура, образованного при пересечении гиперболоида $2x^2+z^2-y^2=a^2$ и плоскости $x+y=0$. Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,2a,0)$.

5.3. Найдите работу силового поля $\vec{F}=\{x+3y+2z,2x+z,x-y\}$ вдоль замкнутого контура *MNPM*, где *MNP* – треугольник с вершинами в точках $M(1,0,0)$, $N(0,1,0)$, $P(0,0,1)$. Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(5,5,5)$.

6. Дифференциальные операции в скалярных и векторных полях. Оператор Гамильтона. Инвариантные определения дивергенции и ротора

6.1. Найдите угол между:

6.1.1. Градиентами функций $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ и $v=xy+yz+zx-18x-6z-y$ в точке $M(3,5,4)$.

6.1.2. Градиентами скалярного поля $u=\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}$ в точках $M_1(1,2,2)$ и $M_2(-3,1,0)$.

6.2. Дифференциальные операции

6.2.1. Найдите $\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

6.2.2. Найдите $\operatorname{div}\vec{r}$, $\operatorname{div}(r\vec{r})$, $\operatorname{div}(r^2\vec{r})$, $\operatorname{div}(r^{-1}\vec{r})$, $\operatorname{div}(r^{-2}\vec{r})$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

6.2.3. Найдите $\operatorname{grad}(uv)$, $\operatorname{grad}(u^2)$, $\operatorname{grad}f(u)$, $\operatorname{grad}(\sin u)$, $\operatorname{grad}\dfrac{1}{u}$, где u, v – дифференцируемые скалярные поля.

6.2.4. Вычислите $\operatorname{grad}(\vec{c},\vec{r})$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $\vec{c}$ - постоянный вектор.

6.2.5. Найдите $\operatorname{div}(r\vec{c})$, $\operatorname{div}(\vec{b}(\vec{r},\vec{c}))$ где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. а векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$ - постоянные векторы.

6.2.6. Найдите $\operatorname{rot}\vec{r}$ $\operatorname{rot}(r\vec{r})$, $\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

6.2.7. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что $\operatorname{div}(u\vec{a})=(\operatorname{grad} u\cdot\vec{a})+u\operatorname{div}\vec{a}$, где u – дифференцируемое скалярное поле, $\vec{a}$ – дифференцируемое векторное поле.

6.2.8. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что $\operatorname{rot}(u\vec{a})=[\operatorname{grad} u\cdot\vec{a}]+u\operatorname{rot}\vec{a}$, где u – дифференцируемое скалярное поле, $\vec{a}$ – дифференцируемое векторное поле.

6.2.9. Докажите, что $\operatorname{div}[\vec{a},\vec{b}]=\vec{b}\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - дифференцируемые векторные поля.

6.3. Повторные операции.

6.3.1. Докажите, что $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)=(\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v)+u\Delta v$, где u, v - дважды дифференцируемые скалярные поля; Δ - оператор Лапласа.

6.3.2. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}-\Delta\vec{a}$ где $\vec{a}$ - дважды дифференцируемое векторное поле; Δ - оператор Лапласа.

6.3.3. Вычислите $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u$, где u – дважды дифференцируемое скалярное поле.

6.3.4. Вычислите $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$, где $\vec{a}$ – дважды дифференцируемое векторное поле.

6.4. Вычислите дивергенцию электрического поля $\vec{E}$ точечного заряда e, помещенного в точку (x_0, y_0, z_0).

6.5. Вычислите ротор векторного поля $\vec{a}=x\mathbf{i}+\frac{y}{y^2+z^2}\mathbf{j}-\frac{z}{y^2+z^2}\mathbf{k}$ в точках, где $y^2+z^2\neq 0$ и циркуляцию этого поля вдоль окружности $L:\left\{y^2+z^2=1,\ x=x_0\right\}$.

6.6. Найдите поток векторного поля $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$: а) через внешнюю сторону боковой поверхности конуса $x^2+y^2\leq z^2$ $(0\leq z\leq h)$; б) через внутреннюю сторону основания этого конуса.

6.7. Найдите поток векторного поля $\vec{a}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ в направлении внешней нормали к поверхности: а) через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2\leq a^2$ $(0\leq z\leq h)$; б) через полную поверхность этого цилиндра.

6.8. Найдите поток векторного поля $\vec{a}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ через сферу $x^2+y^2+z^2=x$ в направлении внешней нормали к поверхности.

7. Потенциальные векторные поля.

7.1. Проверьте, что векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным и найдите его скалярный потенциал.

7.1.1. $\vec{a}=2xyz\mathbf{i}+x^2z\mathbf{j}+x^2y\mathbf{k}$

7.1.2. $\vec{a}=\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ $(x^2+y^2\neq 0)$

7.1.3. $\vec{a}=yz\left(2x+y+z\right)\mathbf{i}+xz\left(x+2y+z\right)\mathbf{j}+xy\left(x+y+2z\right)\mathbf{k}$

7.2. Убедитесь, что векторное поле $\vec{a}=\frac{2}{(y+z)^{1/2}}\mathbf{i}-\frac{x}{(y+z)^{3/2}}\mathbf{j}-\frac{y}{(y+z)^{3/2}}\mathbf{k}$ является потенциальным и найдите работу этого поля вдоль пути, соединяющего точки $M(1,1,3)$ и $N(2,4,5)$ и расположенного в октанте $x>0, y>0, z>0$.

8. Соленоидальные векторные поля.

8.1. Проверьте, что векторное поле $\vec{a} = ye^{x^2}\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - \left(2xyze^{x^2} + z^2\right)\mathbf{k}$ является соленоидальным.

8.2. Разложите векторное поле $\vec{a} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} + \left(z+1\right)\mathbf{k}$ на сумму потенциального и соленоидального полей.

8.3. Проверьте, что векторное поле $\vec{a} = \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ является соленоидальным и найдите его векторный потенциал.

9. Числовые ряды

9.1. Пользуясь критерием Коши, докажите, что:

9.1.1. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{2^n}$ сходится.

9.1.2. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится.

9.2. Исследуйте ряды на сходимость:

9.2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1000^n}{n!}$;

9.2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$;

9.2.3. . $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}$;

9.2.4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^p n}$.

9.3. Исследуйте знакопеременные ряды на абсолютную и условную сходимость:

9.3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^P}$;

9.3.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{4}}{\ln n}$

+

10. . Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Признаки сходимости.

10.1. Найдите предел и исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность на заданном промежутке:

10.1.1. $f_n\left(x\right) = x^n$, $x \in \left[0,1\right]$.

10.1.2. $f_n\left(x\right) = e^{-nx}$ а) $x \in \left(0,1\right)$; б) $x \in \left[1,\infty\right)$.

10.1.3. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0;1]$.

10.1.4. $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$, а) $x\in[1;+\infty)$; б) $x\in[0;1]$.

10.1.5. $f_n(x)=\frac{nx^2}{1+nx}$, $x\in[0;+\infty)$.

10.1.6. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^4x^4}$, $x\in\left(-\infty;+\infty\right)$.

10.2. Определите область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$.

10.3. Определите области абсолютной и условной сходимости функциональных рядов:

10.3.1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^x}$.

10.3.2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k^x+(-1)^k}$

10.4. Исследуйте ряды на равномерную сходимость.

10.4.1. $\sum_{k=1}^{\infty}e^{-kx}$, $x\in(0;+\infty)$.

10.4.2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(2kx)}{k\sqrt{k}}$, $x\in(-\infty;+\infty)$

10.4.3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}x}{1+k^4x^2}$, $x\in(-\infty;+\infty)$

10.4.4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{x}}$, $x\in[0;+\infty)$

10.4.5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$, $x\in\left[\varepsilon,2\pi-\varepsilon\right]$, где $\varepsilon>0$.

10.5. Определите радиус и интервал сходимости степенных рядов.

10.5.1. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}x^k$

10.5.2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}x^k$

10.5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3+\left(-1\right)^n\right)^n}{n}x^n$

11. Дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Предельный переход. Непрерывность.

11.1. Укажите область определения функции $f(x)$ и исследуйте функцию на непрерывность:

11.1.1. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, где $x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon], 0<\varepsilon<2\pi$.

11.1.2. $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x}$,

11.1.3. $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^x}$, 11.2. Докажите, что функция $f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную на всей прямой $\left(-\infty;\infty\right)$.

11.3. Укажите область сходимости и найдите сумму степенного ряда:

11.3.1. $\sum_{k=1}^{\infty}x^k$,

11.3.2. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$,

11.3.3. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$,

11.3.4. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$,

11.3.5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$,

11.3.6. . $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$,

11.3.7. $\sum_{k=1}^{\infty}kx^k$.

11.4. Получите разложение в степенной ряд функции $f\left(x\right)=\operatorname{arctg}x$. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n-1}$. Указание: сначала разложите в степенной ряд производную $f\left(x\right)=\operatorname{arctg}x$, а потом примените почленное интегрирование.

12. Сходимость в среднем.

12.1. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=x^n\sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке и в среднем на сегменте $[0;1]$ к функции $f(x)=0$.

12.2. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=nx^n\sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке сегмента $[0;1]$ к функции $f(x)=0$ и не сходится в среднем на сегменте $[0;1]$ к этой функции.

13. Несобственные интегралы.

13.1. Исследуйте сходимость интегралов:

13.1.1. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

13.1.2. $\int_0^{+\infty}\frac{x^3+1}{x^4+1}dx$;

13.1.3. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}}dx$;

13.1.4. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{x^4\sqrt{x}}dx$;

13.1.5. $\int_1^{+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)dx$;

13.1.6. $\int_1^{+\infty}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)dx$;

13.1.7. $\int_0^{+\infty} x\sin(x^3)dx$.

13.2. Докажите, что следующие интегралы сходятся:

13.2.1. $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$;

13.2.2. $\int_0^{+\infty} x^ne^{-x}dx$, $n>-1$.

13.3. Докажите, что следующие интегралы сходятся, и вычислите их:

13.3.1. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;

13.3.2. $\int_0^1 x\ln x dx$;

13.3.3. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$;

13.3.4. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$.

13.4. Исследуйте интегралы на сходимость и вычислите в случае сходимости.

13.4.1. $\int_1^{+\infty}\sin(\ln x)dx$;

13.4.2. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

13.4.3. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\ln x)}{x^2}dx$.

13.5. Найдите, при каких значениях параметра p сходятся интегралы:

13.5.1. $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$;

13.5.2. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$;

13.5.3. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$;

13.5.4. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{arctg(ax)\,dx}{x^p}, a>0$.

13.6. Определите, при каких значениях параметра p интегралы сходятся абсолютно и при каких p − условно:

13.6.1. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$;

13.6.2. $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$.

14. **Несобственные интегралы, зависящие от параметра.**

14.1. Исследуйте интегралы на равномерную сходимость в указанных промежутках изменения параметра p, используя определение равномерной сходимости несобственного интеграла.

14.1.1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $p\in(1;+\infty)$. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^p}$, $p\in(0;1)$;

14.1.2. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}\sin x dx$, а) $p\in(0;+\infty)$, б) $p\in[a;+\infty)$, $a>0$;

14.1.3. $\int_0^{+\infty} e^{-px}dx$ а) $p\in(0;+\infty)$; б) $p\in[a;+\infty)$, $a>0$.

14.2. Исследуйте интегралы на равномерную сходимость в указанных промежутках изменения параметра *p*, используя признаки равномерной сходимости интеграла.

14.2.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$, $p\in[a;+\infty)$, $a>0$;

14.2.2. $\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x}}dx \quad p\in[0;+\infty)$;

14.2.3. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}e^{-px}dx \quad p\in[0;+\infty)$.

14.3. Докажите, что функция $f(p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(px)}{1+x^2}dx$ непрерывна на промежутке $p\in(-\infty;+\infty)$.

14.4. Для каких значений p сходится интеграл $\int_0^1 x^p(\ln x)^2\,dx$? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл $\int\limits_0^1 x^p dx$. Обоснуйте возможность применения этого метода.

14.5. Для каких значений q сходится интеграл $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin qx dx$? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos qx dx$. Обоснуйте возможность применения этого метода.

14.6. Вычислите:

14.6.1. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx$, дифференцируя по параметру интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2}dx$;

14.6.2. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, дважды дифференцируя по параметру интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2}dx$.

14.6.3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-px}dx$, $p>0$, дифференцируя по параметру.

14.7. Укажите область сходимости следующих интегралов и выразите их через интегралы Эйлера:

14.7.1. $\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t^2}dt$;

14.7.2. $\int_0^{+\infty} e^{-x^p}dx$;

14.7.3. $\int_0^1 (-\ln t)^p\,dt$;

14.7.4. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$;

14.7.5. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^q}dx$;

14.7.6. $\int_0^1 (1-x^p)^{\left(\frac{-1}{p}\right)} dx$.

15. **Ряды Фурье.**

15.1. Найдите ряд Фурье функций $f(x)$, нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.1.1. $f(x) = \cos^2 x$;

15.1.2. $f(x) = 1$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = -1$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, $f(x+2\pi) = f(x)$;

15.1.3. $f(x) = x$, $x \in [-\pi; \pi)$, $f(x+2\pi) = f(x)$;

15.1.4. $f(x) = \frac{\pi}{2} + x$, $x \in [-\pi; 0)$, $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$, $x \in [0; \pi)$, $f(x+2\pi) = f(x)$.

15.2. Найдите разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам кратных дуг и нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.2.1. $f(x) = x$, $x \in [0; \pi]$;

15.2.2. $f(x) = \sin x$, $x \in [0; \pi]$.

15.3. Найдите разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг и нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.3.1. $f(x) = 1$, $x \in [0; \pi]$;

15.3.2. $f(x) = x$, $x \in [0; \pi]$;

15.3.3. $f(x) = \cos x$, $x \in [0; \pi]$.

15.4. Пусть $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \varphi_k$ – ряд Фурье функции $f(x)$, $x \in [0; \pi]$, по ортогональной системе функций $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$, $x \in [0; \pi]$, $n \ge 1$. Найдите $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ для следующих функций:

15.4.1. $f(x) = x$;

15.4.2. $f(x) = x(\pi - x)$.

16. Интеграл Фурье.

16.1. Представьте интегралом Фурье функцию $f(x)$:

16.1.1. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & |x| \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

16.1.2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$.

16.2. Найдите преобразование Фурье функций $f(x)$:

16.2.1. $f(x) = e^{-p|x|}$, $p > 0$;

16.2.2. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$;

16.2.3. $f(x) = e^{-p|x|} \sin \beta x$, $p > 0$;

16.2.4. $f(x) = 1$, $x \in [-p; p]$, $f(x) = 0$, $x \notin [-p; p]$.