МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.Ломоносова

Ф И З И Ч Е С К И Й   Ф А К У Л Ь Т Е Т

А.Б. Васильева, Н.Н. Нефедов

Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина.

(некоторые разделы курса лекций «Дифференциальные уравнения»)

Москва --2007

Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина.

Введение.

Теоремы сравнения, лежащие в основе так называемого принципа сравнения, играют важную роль в исследовании различных классов нелинейных задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Эти теоремы гарантируют существование (а при некоторых естественных требованиях и единственность) решения задач на основании существования так называемых верхних и нижних решений. Этот подход в исследовании нелинейных задач носит также название метода дифференциальных неравенств и по сути является развитием идей метода «вилки» решения нелинейных конечных уравнений. Этот метод будет продемонстрирован нами на примере задачи Коши для скалярного ОДУ первого порядка. Эта задача впервые с точки зрения метода дифференциальных неравенств была рассмотрена С.А. Чаплыгиным в начале 20-х годов прошлого века и положила начало одного из наиболее эффективных методов качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений. Отметим, что важность этих результатов подчеркивалась одним из основоположников курса дифференциальных уравнений на физическом факультете МГУ академиком А.Н. Тихоновым, по инициативе которого теоремы Чаплыгина были включены в основной учебник для студентов-физиков [1]. Так что нашу работу можно считать скромной данью памяти А.Н. Тихонова в год столетия со дня его рождения.

Итак, ниже будет рассматриваться задача Коши вида

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = f(t,y),\ 0 \le t \le T, \\ &y(0) = y^0. \end{aligned} \tag{1}$$

Основной особенностью задачи (1) является то, что она рассматривается на фиксированном промежутке времени - T входит в постановку задачи. Такая постановка является естественной для приложений, где задача (1) может выступать в качестве математической модели. Классическая теорема существования и единственности (см. [1]), являющаяся локальной и гарантирующая существование решения в некоторой достаточно малой окрестности начальной точки, как правило, становится мало пригодной. Для удобства читателя приведем формулировку этой теоремы.

<u>Теорема 1.</u>

Пусть функция $f(t,y)$ *определена и непрерывна в прямоугольнике* $D = \left\{0 \le t \le T, \left|y - y^0\right| \le b\right\}$ *и, следовательно,* $\exists M = \max\limits_D \left|f(t,y)\right|$. *Пусть, кроме того, функция* $f(t,y)$ *удовлетворяет в* D *условию Липшица по переменной* y:

$$\left|f(t,y_1) - f(t,y_2)\right| \le N\left|y_1 - y_2\right|$$

Тогда на промежутке $0 \le t \le \min(T, \frac{b}{M})$ *задача Коши (1) имеет единственное решение.*

Очевидно, что при больших M Теорема 1 дает грубую оценку промежутка существования решения. Это особенно ярко проявляется для так называемых сингулярно возмущенных задач, когда правая часть имеет вид $\frac{1}{\mu} f(t, y)$, где μ - малый параметр. В этом случае, очевидно, промежуток существования решения, гарантированный этой теоремой, имеет оценку $H \sim \mu$. Приведем формулировку еще одной известной теоремы, которая будет использована нами ниже. Доказательство этой теоремы в значительной мере повторяет доказательство Теоремы 1, и его можно найти, например, в [2].

Теорема 2.

Пусть функция $f(t, y)$ *определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной* y *в полосе* $\pi = \{0 \le t \le T, y \in R\}$.

Тогда на промежутке $0 \le t \le T$ *задача Коши (1) имеет единственное решение.*

Теорема 2 уже не является локальной, однако класс функций $f(t, y)$, удовлетворяющих условиям этой теоремы, весьма узкий. Поэтому во многих случаях более эффективным для исследования задачи (1) является метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. Изложение этого подхода начнем со следующего классического результата.

1^0. Теорема о дифференциальных неравенствах.

Теорема 3 (сравнения, Чаплыгина).

Пусть существует решение $y(t)$ *задачи (1) (классическое). Пусть существует функция* $z(t) \in C^1(0, T] \cap C[0, T]$:

$$\frac{dz}{dt} < f(t, z(t)),\ t \in (0, T],\ z(0) < y^0.$$

Тогда имеет место неравенство

$$z(t) < y(t),\ t \in [0, T].$$

Доказательство.

При $t = 0$ неравенство выполняется. Пусть оно первый раз нарушается в $t_1 \in (0, T]$. В этой точке имеем $z(t_1) = y(t_1)$. При $t = t_1$ кривые $y(t)$ и $z(t)$ пересекаются или касаются. Следовательно,

$$\frac{dz}{dt}(t_1) \ge \frac{dy}{dt}(t_1) = f(t_1, y(t_1)) = f(t_1, z(t_1)),$$

что противоречит условию теоремы. Теорема 3 доказана.

<u>Замечание.</u> С.А. Чаплыгин называл функцию $z(t)$ нижней функцией. Аналогично определяется верхняя функция.

2^0. Теорема существования.

С помощью Теоремы 3 можно доказать теорему существования решения задачи (1). Для этого нам понадобится определение нижнего и верхнего решений. Так в современной литературе принято называть нижние и верхние функции Чаплыгина.

<u>Определение.</u> *Функция* $\alpha(t) \in C^1\left[0,T\right] \cap C[0,T]$ *называется нижним решением задачи (1), если выполнены неравенства*

$$\frac{d\alpha}{dt} < f(t,\alpha(t)),\ 0 < t \le T,\ \alpha(0) < y^0.$$

Функция $\beta(t) \in C^1[0,T] \cap C[0,T]$ *называется верхним решением задачи (1), если выполнены неравенства*

$$\frac{d\beta}{dt} > f(t,\beta(t)),\ 0 < t \le T,\ \beta(0) > y^0.$$

<u>Следствие.</u> Используя схему доказательства теоремы сравнения, несложно получить, что между нижним решением $\alpha(t)$ и верхним решением $\beta(t)$ имеет место неравенство $\alpha(t) < \beta(t)$.

<u>Теорема 4</u> (существования и единственности, Чаплыгина).

Пусть существует нижнее $\alpha(t)$ *и верхнее* $\beta(t)$ *решения задачи (1), такие что* $\alpha(t) < \beta(t)$, $t \in \left[0;T\right]$. *Пусть функция* $f(t,y)$ *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной* y *:*

$$\left|f(t,y_1) - f(t,y_2)\right| \le N\left|y_1 - y_2\right|,\ y_1, y_2 \in \left[\alpha,\beta\right], t \in \left[0,T\right].$$

Тогда задача Коши (1) имеет единственное решение $y(t)$*, удовлетворяющее неравенствам*

$$\alpha(t) < y(t) < \beta(t), \quad 0 \le t \le T.$$

<u>Доказательство.</u>

Продолжим $f(t,y)$ так, чтобы она была непрерывна и удовлетворяла условию Липшица в полосе $t \in [0,T],\ y \in R$, и рассмотрим вместо (1) задачу

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = h(t,y), \quad 0 < t \le T, \\ &y(0) = y^0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $h(t,y)$, например,

$$h(t,y)=\begin{cases} f(t,\beta(t))+(y-\beta(t)), & y>\beta \\ f(t,y), & 0\le t\le T \\ f(t,\alpha(t))+y-\alpha, & y<\alpha. \end{cases}$$

Тогда, в силу Теоремы 2 (функция $h(t,y)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица $L=\max(L_0,1)$**,** где L_0 - постоянная Липшица функции $f(t,y)$), решение задачи (2) существует и единственно. Это решение, лежащее в начальный момент между нижним и верхним решением не может покинуть область между ними в силу Теоремы 3. Следовательно, для этих y $h(t,y)=f(t,y)$, т.е. решение задачи (2) является решением задачи (1).

Замечание 1. Можно показать, что в определении верхнего и нижнего решений допустимы нестрогие знаки неравенств. В частности, в качестве нижнего (верхнего) решения задачи (1) может быть взято решение уравнения в (1) $y^*(t)$, которое в начальный момент $y(0)<y^0 (y(0)>y^0)$. Действительно, в этом случае предположение о том, что) $y^*(t)$ пересекает $y(t)$ в некоторой точке t_1 приводит к нарушению условия единственности решения в окрестности этой точки.

Замечание 2. Если нижнее и верхнее решения определены при $0\le t<\infty$, а функция $f(t,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y с постоянной Липшица, не зависящей от t, то Теорема 4 остается справедливой и на $0\le t<\infty$.

Это будет использовано нами при рассмотрении некоторых задач теории устойчивости.

3^0. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим начальную задачу

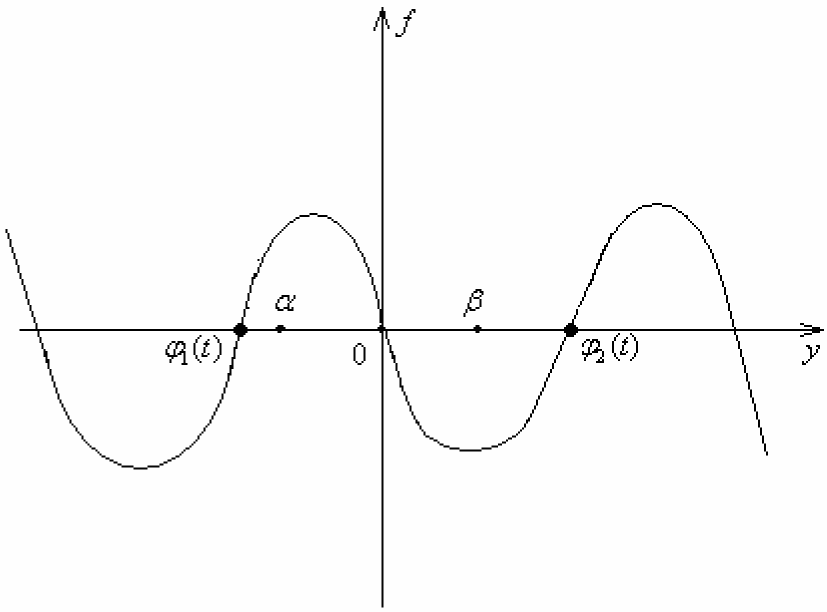
$$\frac{dy}{dt}=-y^2, \quad 0<t\le T,$$
$$y(0)=y^0>0.$$

Классическая теорема существования и единственности (см. [1]) дает оценку для промежутка существования решения $0\le t\le \dfrac{1}{4y^0}$. Заметим также, что условия Липшица в полосе $0\le t\le T$, $-\infty<y<\infty$ не выполняются. Выберем нижнее решение $\alpha=0$ (см. Замечание 2). Действительно, соответствующее определение выполняется - $\dfrac{d\alpha}{dt}-f(t,0)=0$. Выберем верхнее решение $\beta(t)=d=const>y^0$. Определение верхнего решения тоже выполнено - $\dfrac{d\beta}{dt}-f(\beta,t)=0+d^2>0$. Функция $f(t,y)=-y^2$ имеет ограниченную при $y\in[0,d], 0\le t\le T$, где T - любое положительное число, производную и, следовательно, удовлетворяет условию теоремы Чаплыгина (Теоремы 4) (удовлетворяет условию Липшица). Следовательно, существует решение $y(t):\ \ 0 \le y(t) \le d$ при $0 \le t < \infty$.

Пример 2. Рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad 0 < t \le T,$$
$$y(0) = y^0,$$

где функция $f(t,y)$ удовлетворяет условиям Теоремы 4 и при каждом t имеет вид, изображенный на рисунке.



Пусть $\varphi_1(t)$ - первый отрицательный корень, $\varphi_2(t)$ - первый положительный корень, и пусть $\bar{\varphi}_1 = \max\limits_{[0,T]} \varphi_1(t),\ \underline{\varphi}_2 = \min\limits_{[0,T]} \varphi_2(t)$. Пусть также начальное значение y^0 удовлетворяет условию $\bar{\varphi}_1 < y^0 < \underline{\varphi}_2$, и, следовательно, $\exists \varepsilon > 0 : \bar{\varphi}_1 + \varepsilon < y^0 < \underline{\varphi}_2 - \varepsilon$. Выберем нижнее решение $\alpha = \bar{\varphi}_1 + \varepsilon$, а верхнее решение $\beta = \underline{\varphi}_2 - \varepsilon$. В силу того, что $f(\alpha) > 0$, а $f(\beta) < 0$ (см. рисунок), соответствующие дифференциальные неравенства выполнены. Из теоремы Чаплыгина (Теоремы 4) следует, что существует решение рассматриваемой задачи $y(t)$, удовлетворяющее неравенствам $\bar{\varphi}_1 < y(t) < \underline{\varphi}_2$.

4^0. Применение теорем Чаплыгина в некоторых задачах теории устойчивости.

Пусть задано автономное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \qquad (2)$$

т.е. уравнение, правая часть которого не содержит t явно. Очевидно, что каждый корень уравнения $f(y) = 0$ является решением уравнения (2). Не ограничивая общности, будем считать, что уравнение (2) имеет тривиальное решение $y = 0$, т.е. $f(0) = 0$. Тривиальное решение является решением задачи Коши, когда для уравнения (2) задается дополнительное условие

$$y(0) = 0. \qquad (3)$$

Естественным является вопрос об устойчивости этого решения по Ляпунову, т.е. устойчивости относительно малых возмущений начального условия, когда вместо условия (3) для уравнения (2) ставится дополнительное условие

$$y(0) = y^0. \qquad (4)$$

Определение. *Решение* $y(t) = 0$ *задачи (2), (3) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$ *такое, что при* $y^0 < \delta(\varepsilon)$ *для всех* $t \geq 0$ *существует решение* $y(t)$ *задачи (2), (4) и справедливо неравенство* $|y(t)| < \varepsilon$.

Тривиальное решение называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и удовлетворяет дополнительному требованию $y(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Решение, не являющееся устойчивым, называется *неустойчивым.* Определение неустойчивости решения может быть дано как отрицание приведенного выше определения устойчивости.

Ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости тривиального решения задачи (2), (3) следует из более общей теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Этот результат мы сформулируем ниже и дадим его доказательство с помощью теорем Чаплыгина.

Теорема 5.

Пусть $f(0) = 0$ *и функция* $f(y)$ *непрерывна вместе с производной в некоторой окрестности* $|y| \leq \nu$.

Тогда решение задачи (2), (3) $y = 0$ *будет устойчивым, если* $f_y(0) < 0$, *и неустойчивым, если* $f_y(0) > 0$.

Доказательство.

1. Асимптотическая устойчивость. Пусть $f_y(0) < 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что $\delta < \min(\nu, \varepsilon)$. Определим функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ с помощью следующих выражений:

$$\alpha(t) = -\delta e^{-pt}, \beta(t) = \delta e^{-pt},$$

где $p > 0$ - постоянная. Покажем теперь, что при достаточно малых δ и p функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ являются соответственно нижним и верхним решениями задачи (2), (4), если $|y^0| < \delta$. Тогда, в силу Теоремы 4 решение задачи (2), (4) существует и удовлетворяет неравенствам

$$\alpha(t) < y(t) < \beta(t) \text{ при } 0 \le t < \infty .$$

Из этих неравенств следует, что для $y = 0$ выполняется определение асимптотической устойчивости.

Проверим выполнение соответствующего дифференциального неравенства для $\beta(t)$. Имеем

$$\frac{d\beta}{dt} - f(\beta(t)) = -\delta p e^{-pt} - f_y(\theta\delta e^{-pt}) = \delta e^{-pt}[-f_y(0) - p + (f_y(0) - f_y(\theta\delta e^{-pt}))],$$

где $0 \le \theta \le 1$. Выберем δ таким малым, что

$$\left|(f_y(0) - f_y(\theta\delta e^{-pt})\right| \le \eta < \frac{-f_y(0)}{2} .$$

Выберем $p < \dfrac{-f_y(0)}{2}$. Тогда получим, что $\dfrac{d\beta}{dt} - f(\beta(t)) > 0$, т.е. $\beta(t)$ - верхнее решение.

Аналогично проверяется неравенство $\dfrac{d\alpha}{dt} - f(\alpha(t)) < 0$, т.е. $\alpha(t)$ - нижнее решение. Это завершает доказательство первой части Теоремы 5.

2. Неустойчивость. Пусть $f_y(0) > 0$. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существует $y^0, |y^0| < \delta$ такое, что при некотором t решение задачи (2), (4) больше ε. Это будет означать, что тривиальное решение задачи (2), (3) является неустойчивым. Для этого для любого положительного y^0 построим нижнее решение задачи (2), (4) в виде

$$\alpha(t) = \rho(1 - \sigma e^{-pt}),$$

где ρ - постоянная, $0 < \rho < \nu$, σ - постоянная, $0 < \sigma < 1$, p - положительная постоянная. Действительно, т.к. $\alpha(0) = \rho(1-\sigma)$, то выбирая σ достаточно близким к единице, можно получить $\alpha(0)$ меньше любого положительного y^0. При $t \to \infty$ $\alpha(t) \to \rho$, и, следовательно, при t больших некоторого t^* $\alpha(t) > \dfrac{\rho}{2}$. Следовательно, решение задачи (2), (4) (если оно существует) в силу Теоремы 3 больше $\varepsilon = \dfrac{\rho}{2}$. Это и означает неустойчивость тривиального решения. Проверим, что $\alpha(t)$ удовлетворяет неравенству для нижнего решения. Имеем

$$\frac{d\alpha}{dt} - f(\alpha(t)) = \rho\sigma p e^{-pt} - f_y(\theta\alpha(t)) = -f_y(0) + \rho\sigma p e^{-pt} + (f_y(0) - f_y(\theta\alpha(t))).$$

Выберем ρ столь малым, что $\rho\sigma p e^{-pt} + (f_y(0) - f_y(\theta\alpha(t))) < f_y(0)$. Тогда получим, что $\dfrac{d\alpha}{dt} - f(\alpha(t)) < 0$. Это завершает доказательство второй части Теоремы 5.

<u>Замечание 3.</u> Решения уравнения (2), являющиеся корнями уравнения $f(y)=0$, называют также точками покоя уравнения (2). Исследование устойчивости ненулевой точки покоя $y=\overline{y}$ может быть сведено очевидной заменой к исследованию нулевой точки покоя. В частности, точка покоя $y=\overline{y}$ будет асимптотически устойчивой, если $f_y(\overline{y})<0$, и неустойчивой, если $f_y(\overline{y})>0$.

5^0. Пример.

Рассмотрим уравнение (2) в случае, когда $f(y)=y(y^2-1)$ и исследуем устойчивость его точек покоя. В этом случае имеем три точки покоя: $y=\pm 1$ и $y=0$. Легко получить, что $f_y(\pm 1)>0$, а $f_y(0)<0$. Следовательно, точки покоя $y=\pm 1$ - неустойчивые, а точка покоя $y=0$ - асимптотически устойчивая.

Литература.

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения: Учебник для вузов. – 5-е изд., – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – 7-е изд., – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.