

Вопросы к экзамену ДУ-2008
(лекторы профессор Н.Н. Нефедов и доцент И.В. Неделько).

1. Основные понятия.

- 1⁰. Понятие дифференциального уравнения.
- 2⁰. Решение ДУ: *Решение, общее решение, общий интеграл*
- 3⁰. Постановка основных задач для ОДУ. Дополнительные условия. *Задача Коши, краевые задачи, периодическая задача, задача Штурма – Лиувилля.*
- 4⁰. Геометрическая интерпретация решения для скалярного ОДУ.

2. Примеры физических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

- 1⁰. *Радиоактивный распад.*
- 2⁰. *Движение материальной точки.*
- 3⁰. *Уравнение колебаний груза на пружине.*
- 4⁰. *Математический маятник.*

3. Уравнения первого порядка.

- 3.1. Простейшие уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах.
- 3.2. Теорема существования и единственности решения скалярного ОДУ.

- 1⁰. Постановка задачи. Основной результат.
- 2⁰. Эквивалентное интегральное уравнение.
- 3⁰. Доказательство существования решения задачи Коши – метод последовательных приближений.
- 4⁰. Теорема единственности решения задачи Коши.
- 5⁰. Теорема существования и единственности решения задачи Коши в случае, когда правая часть непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в полосе.
- 6⁰. Примеры: *О существовании решения в случае непрерывной правой части – пример, о продолжении решения – пример непродолжаемости решения.*

4. Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств.

- 1⁰. Теорема Чаплыгина о дифференциальных неравенствах.
- 2⁰. Теорема Чаплыгина о существовании и единственности решения задачи Коши.

5. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных условий и параметров в правой части.

- 1⁰. Постановка задачи.
- 2⁰. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров в правой части. *Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров в правой части – метод последовательных приближений.*

6. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ.

- 6.1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (без док.).
- 6.2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши в случае, когда правая часть непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в полосе (без док.).
- 6.3. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров в правой части (без док.)

7. Уравнения n-го порядка.

- 7.1. Сведение их к системе уравнений 1-го порядка.
- 7.2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (без док.).

8. Линейные уравнения n-го порядка.

- 8.1. Общие свойства.
 - 1⁰. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
 - 2⁰. Следствия линейности уравнения.

- 8.2. Однородное уравнение.
- 1⁰. Линейная зависимость системы функций. Определитель Вронского.
 - 2⁰. Теорема о линейной зависимости системы функций.
 - 3⁰. Теорема о линейной независимости решений однородного уравнения.
 - 4⁰. Теорема о существовании фундаментальной системы решений (ФСР).
 - 5⁰. Теорема о представлении общего решения через ФСР.
- 8.3. Неоднородное уравнение.
- 1⁰. Общее решение неоднородного уравнения.
 - 2⁰. Функция Коши: построение частного решения неоднородного уравнения.
- 8.3. Уравнения с постоянными коэффициентами.
- 1⁰. Структура ФСР.

9. Системы линейных уравнений.

- 9.1. Общие свойства.
- 1⁰. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
 - 2⁰. Следствия линейности векторного уравнения.
- 9.2. Однородная система уравнений.
- 1⁰. Линейная зависимость системы вектор-функций. Определитель Вронского.
 - 2⁰. Теорема о линейной зависимости системы вектор-функций.
 - 3⁰. Теорема о линейной независимости решений однородной системы.
 - 4⁰. ФСР. Фундаментальная матрица. Теорема о существовании ФСР.
 - 5⁰. Теорема о представлении общего решения через ФСР.
- 9.3. Неоднородная система.
- 1⁰. Общее решение неоднородной системы.
 - 2⁰. Метод вариации постоянной. Матрица Коши.
- 9.4. Системы с постоянными коэффициентами.
- 1⁰. Структура ФСР в случае простых собственных значений матрицы системы.
 - 2⁰. Структура ФСР в случае кратных собственных значений матрицы системы.

10. Краевые задачи.

- 10.1. Линейные задачи.
- 1⁰. Постановка задачи.
 - 2⁰. Формулы Грина. Тождество Лагранжа.
 - 3⁰. Теорема единственности решения краевой задачи.
 - 4⁰. Теоремы о достаточных условиях существования только тривиального решения у однородной задачи.
 - 5⁰. Функция Грина и ее свойства. Теорема о представлении решения с помощью функции Грина.
- 10.2. Нелинейные задачи.
- 1⁰. Постановка задачи.
 - 2⁰. Теорема существования решения в случае ограниченной правой части (метод стрельбы).
 - 3⁰. Понятие нижнего и верхнего решений краевой задачи, теорема Нагумо о существовании решения.

11. Теория устойчивости.

- 11.1. Постановка задачи.
 - 1⁰. Основные понятия. *Устойчивость решения по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.*
- 11.2. Первый метод Ляпунова – исследование устойчивости решения по первому приближению.
 - 1⁰. Теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости решения системы уравнений (без док.).
 - 2⁰. Теорема об асимптотической устойчивости решения скалярного уравнения.
- 11.3. Второй метод Ляпунова – метод функций Ляпунова.
 - 1⁰. Функция Ляпунова. Формулировка теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости.
 - 2⁰. Доказательство устойчивости.
 - 3⁰. Доказательство асимптотической устойчивости.
- 12. Классификация точек покоя системы двух линейных уравнений первого порядка.**
- 13. Фазовая плоскость для нелинейных автономных уравнений второго порядка.**
 - 13.1. Постановка задачи.
 - 13.2. Фазовые траектории.
 - 13.3. Уравнение с квадратичной нелинейностью.
 - 13.4. Уравнение с кубической нелинейностью.
- 14. Асимптотические методы.**
 - 14.1. Понятие регулярно и сингулярно возмущенных задач.
 - 14.2. Регулярные возмущения. *Теорема об асимптотическом приближении решения регулярно возмущенной задачи (без док).*
 - 14.3. Сингулярные возмущения.
- 15. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.**
 - 15.1. Линейные однородные уравнения.
 - 1⁰. Характеристическая система – уравнения характеристик, характеристики, первые интегралы.
 - 2⁰. Теорема о взаимосвязи первого интеграла характеристической системы и решения линейного однородного уравнения.
 - 3⁰. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения.
 - 4⁰. Задача Коши – постановка и схема решения в двумерном и общем случаях.
 - 15.2. Квазилинейные уравнения.
 - 1⁰. Теорема о решении квазилинейного уравнения.
 - 2⁰. Задача Коши – постановка и схема решения.
- 16. Численные методы.**
 - 16.1. Основные понятия.
 - 1⁰. Понятие разностной схемы.
 - 2⁰. Разностная схема Эйлера для начальной задачи.
 - 3⁰. Разностная схема для краевой задачи.
 - 4⁰. Сходимость разностной схемы.
 - 5⁰. Аппроксимация разностной схемы.
 - 6⁰. Порядок аппроксимации разностной схемы Эйлера и разностной схемы для краевой задачи.
 - 7⁰. Устойчивость разностной схемы.
 - 16.2. Теорема о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости разностной схемы.
 - 16.3. Устойчивость схемы Эйлера.