Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет, кафедра математики

Вопросы по линейной алгебре, весенний семестр 2007–2008 учебного года (I поток, лектор А.А. Шишкин)

1. Понятие линейного пространства, примеры линейных пространств. Линейная зависимость и линейная независимость элементов линейного пространства, свойства линейно зависимых и линейно независимых элементов. Размерность линейного пространства, базис линейного пространства, связь базиса и размерности.

2. Координаты элемента линейного пространства, преобразование базиса, преобразование координат элемента линейного пространства при преобразовании базиса. Изоморфизм линейных пространств, сохранение размерности при изоморфизме.

3. Понятие подпространства, теорема о том, что подпространство является линейным пространством, размерность подпространства. Линейная оболочка конечного набора элементов линейного пространства. Прямая сумма подпространств. Теорема о достраивании базиса подпространства до базиса пространства.

4. Теорема Кронекера–Капелли. Однородная система линейных алгебраических уравнений и фундаментальная совокупность решений. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений.

5. Понятие тензора, примеры тензоров. Сумма тензоров, умножение тензора на число, перестановка индексов, прямое произведение тензоров.

6. Понятие тензора, примеры тензоров. Сумма тензоров, умножение тензора на число, перестановка индексов свертка тензора.

7. Понятие линейного оператора, примеры линейных операторов. Ядро и образ линейного оператора. Обратный оператор.

8. Сумма линейных операторов, умножение линейного оператора на число, произведение линейных операторов. Матрица линейного оператора, преобразование матрицы линейного оператора при преобразовании базиса.

9. Инвариантные подпространства линейного оператора. Собственные значения, собственные векторы, собственные подпространства, геометрическая кратность собственного значения.

10. Характеристическое уравнение линейного оператора, алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора, приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

11. Присоединенные векторы. Жорданов базис, жорданова форма матрицы линейного оператора. Теорема о приведении матрицы линейного оператора к жордановой форме (без доказательства).

12. Линейная форма. Билинейная форма, симметричная билинейная форма, квадратичная форма.

13. Матрица билинейной формы, преобразование матрицы билинейной формы при преобразовании базиса. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.

14. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби.

15. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

16. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

17. Понятие евклидова (унитарного) пространства, примеры евклидовых (унитарных) пространств. Неравенство Коши–Буняковского. Норма элемента евклидова (унитарного) пространства, угол между элементами евклидова пространства.

18. Метрический тензор евклидова пространства, вычисление координат элемента евклидова пространства, подъем и опускание индексов.

19. Понятие псевдоевклидова пространства, примеры псевдоевклидовых пространств. Пространство Минковского $\mathrm{E}^{1,3}$ ($\mathrm{E}^{1,1}$). Преобразования Лоренца. Общий вид преобразований Лоренца в $\mathrm{E}^{1,1}$.

20. Ортогональное дополнение подпространства евклидова пространства. Разложение евклидова пространства в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств. Ортогональный базис, ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Шмидта.

21. Общий вид линейной формы в линейном евклидовом пространстве (связь между линейными формами и элементами линейного евклидова пространства). Общий вид билинейной формы в линейном евклидовом пространстве (связь между билинейными формами и линейными операторами).

22. Сопряженный оператор: определение и основные свойства.

23. Самосопряженный оператор: определение и основные свойства. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора. Теорема о приведении матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду. Спектральное разложение самосопряженного оператора.

24. Ортогональные (унитарные) операторы: определение и основные свойства. Ортогональные (унитарные) матрицы: определение и основные свойства.

25. Приведение матрицы симметричной билинейной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием. Одновременное приведение матриц двух квадратичных форм к диагональному виду.

26. Понятие аффинного пространства. Кривые второго порядка. Инварианты кривой второго порядка. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка.

27. Понятие группы, примеры групп. Группа перестановок, ортогональные группы, группа Лоренца.

Теоретические задачи, входящие в состав экзаменационных билетов

1. Доказать, что в линейном вещественном пространстве H_n^n (пространство всех матриц размера $n \times n$ с элементами из поля K) подмножество, состоящее из симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$), является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

2. Доказать, что в линейном вещественном пространстве H_n^n (пространство всех матриц размера $n \times n$ с элементами из поля K) подмножество, состоящее из антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$), является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

3. Доказать, что в линейном вещественном пространстве H_n^n (пространство всех матриц размера $n \times n$ с элементами из поля K) подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом, является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

4. Доказать, что линейное вещественное пространство H_n^n (пространство всех матриц размера $n \times n$ с элементами из поля K) представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$) и подпространства антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$).

5. Доказать, что линейное вещественное пространство H_n^n (пространство всех матриц размера $n \times n$ с элементами из поля K) представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства матриц с нулевым следом и подпространства матриц вида λE, где: $\lambda \in K$, E — единичная матрица.

6. Доказать, что линейное вещественное пространство T_n представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства столбцов, сумма элементов которых равна нулю и подпространства столбцов вида $\lambda \cdot (1, \ldots, 1)^T$, где $\lambda \in K$.

7. Рассматривается линейное вещественное пространство $P_{2N}(K)$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше $2N$). Является ли подпространством пространства $P_{2N}(K)$ множество всех полиномов F, удовлетворяющих условиям: $F(-1) = 0$, $F(1) = 0$? В случае положительного ответа найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

8. Рассматривается линейное пространство L, $\dim(L) = N \in \mathbb{N}$. Матрица C_1 является матрицей перехода от базиса e к базису e', а матрица C_2 — матрицей перехода от базиса e' к базису e''. Найти матрицу перехода от базиса e'' к базису e.

9. Доказать, что в линейном вещественном пространстве H_n^m (пространство всех матриц размера $m \times n$ с элементами из поля K) можно ввести скалярное произведение по формуле: $(X, Y) = \operatorname{tr}(X^T Y)$ при $X, Y \in H_n^m$ (здесь $\operatorname{tr}(X^T Y)$ — след матрицы $X^T Y$).

10. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_N$. Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор в пространстве H. Доказать равенство: $[\hat{A}]_m^k = (e_k, \hat{A} e_m)$ при $k, m = \overline{1, N}$ (здесь $[\hat{A}]$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе e).

11. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_N$. Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор в пространстве H. Доказать равенство $\operatorname{tr}(\hat{A}) = \sum\limits_{k=1}^{N} (e_k, \hat{A} e_k)$ (здесь $\operatorname{tr}(\hat{A})$ — след оператора $\hat{A}$).

12. Рассматривается линейное евклидово пространство H. Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор в пространстве H. Доказать, что оператор $\hat{A}$ является ортогональным оператором тогда и только тогда, когда: $\left\| \hat{A} x \right\| = \|x\|$ при $x \in H$.

13. Рассматривается линейное евклидово пространство H. Пусть $\hat{A}$, $\hat{B}$ — линейные самосопряженные операторы в пространстве H. Доказать, что оператор $\hat{A}\hat{B}$ является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$.

14. Рассматривается линейное пространство L. Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор в пространстве L. Доказать, что сумма двух различных собственных подпространств оператора $\hat{A}$ является инвариантным подпространством оператора $\hat{A}$. Является ли эта сумма собственным подпространством оператора $\hat{A}$? Ответ обосновать.

15. Рассматривается линейное евклидово пространство H с правым ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3 (здесь H — ориентированное пространство). Пусть: $a \in H$; $Ax = [x, a]$ при $x \in H$ (здесь $[x, a]$ — векторное произведение векторов x, a). Доказать, что $\hat{A}$ — линейный оператор в пространстве H. Найти: матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе e; ядро, образ, собственные значения, собственные векторы оператора $\hat{A}$.

16. Рассматривается линейное унитарное пространство H. Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор в пространстве H. Доказать, что $i(\hat{A} - \hat{A}^*)$ — самосопряженный оператор.

17. Найти общий вид ортогональной матрицы размера 2×2.

18. В линейном пространстве R_3 в базисе e_1, e_2, e_3 задана матрица $G_e = (g_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ дважды ковариантного тензора $[G]_2^0$. Доказать, что этот тензор можно трактовать как метрический тензор пространства R_3.

19. В ортонормированном базисе e_1, e_2 евклидова пространства элемент f_1 имеет координаты 1 и 0, а элемент f_2 - координаты $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2}$. Найдите координаты метрического тензора $[G]_2^0$ в базисе f_1, f_2.

20. В ортонормированном базисе e_1, e_2 евклидова пространства элемент f_1 имеет координаты 1 и 0, а элемент f_2 - координаты $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2}$. Найдите координаты контравариантного метрического тензора $[G]_2^0$ в базисе f_1, f_2.

21. Пусть G - множество всех комплексных чисел, по модулю равных 1, а групповая операция есть умножение комплексных чисел. Докажите, что множество G с указанной операцией образует абелеву группу.

22. Докажите, что если для любого элемента x группы G выполнено условие $xox = e$, то G - абелева группа.

Образцы вычислительных задач, входящих в состав экзаменационных билетов

1. В линейном вещественном пространстве $P_2(K)$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы: $x_1(t) = -1 + 3t + 2t^2$, $x_2(t) = 2t + 3t^2$, $x_3(t) = -1 + 7t + 8t^2$ при $t \in K$. Найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3 по найденному базису.

2. В линейном вещественном пространстве $P_2(K)$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы: $x_1(t) = 1+t^2$, $x_2(t) = 5+2t+3t^2$, $x_3(t) = 2+t+t^2$, $x_4(t) = 4+t+3t^2$ при $t \in K$. Найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространства $P_2(K)$.

3. В линейном евклидовом пространстве T_3 (скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$) заданы элементы: $x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (1, 0, 0)^T$, $x_3 = (0, 1, 0)^T$. Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Шмидта (без нормировки).

4. В линейном евклидовом пространстве $P_2\big([-1, 1]\big)$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1, 1]$ степени не выше 2; скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$) заданы элементы: $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2$ при $t \in [-1, 1]$. Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Шмидта (без нормировки).

5. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Заданы столбцы координат элементов x_1, x_2, x в базисе e: $[x_1] = (1, 0, 0, 1)^T$, $[x_2] = (1, 1, 0, 0)^T$, $[x] = (1, 0, 0, 0)^T$. Найти: проекцию элемента x на подпространство $L(x_1, x_2)$, перпендикуляр элемента x к подпространству $L(x_1, x_2)$.

6. В линейном евклидовом пространстве $P_1\big([-1, 1]\big)$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1, 1]$ степени не выше 1; скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$) заданы элементы: $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$ при $t \in [-1, 1]$. Доказать, что элементы e_1, e_2 образуют базис пространства $P_1\big([-1, 1]\big)$. Найти ковариантный метрический тензор в базисе e.

7. Для каждого $p \in K$ выполнить задания: найти базис линейной оболочки симметричных матриц: $X_{1,p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_{2,p} = \begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X_{3,p} = \begin{pmatrix} -p & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; найти размерность линейной оболочки $L\big(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}\big)$; разложить элементы $X_{1,p}$, $X_{2,p}$, $X_{3,p}$ по найденному базису.

8. В линейном вещественном пространстве T_2 заданы элементы: $e_1 = (1, 2)^T$, $e_2 = (2, 5)^T$, $e'_1 = (2, 1)^T$, $e'_2 = (-1, 3)^T$. Доказать, что: элементы e_1, e_2 образуют базис пространства T_2; элементы e'_1, e'_2 образуют базис пространства T_2. Найти: матрицу перехода от базиса e к базису e'; матрицу перехода от базиса e' к базису e.

9. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2. Пусть: $x = 2e_1 + e_2$, $y = e_1 + 3e_2$. Найти: нормы элементов x, y; угол между элементами x, y. Применить к последовательности x, y процесс ортогонализации Шмидта.

10. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Подпространство Q задано уравнением $x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0$. Найти базис ортогонального дополнения к подпространству Q. Ответ обосновать.

11. В линейном вещественном пространстве $P_1([0,2])$ (пространство всех полиномов на сегменте $[0,2]$ степени не выше 1) задан линейный оператор, действующий по правилу: $(\hat{A}x)(t) = \int\limits_0^2 (t-\tau)x(\tau)\,d\tau$ при: $x \in P_1([0,2])$, $t \in [0,2]$. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе: $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$ при $t \in [0,2]$.

12. Для каждого $p \in K$ исследовать на совместность неоднородную СЛАУ, заданную расширенной матрицей $\left(\begin{array}{cc|c} 1+p & 1+p & 0 \\ p & 1 & -p \end{array}\right)$. Найти общее решение во всех случаях, когда система совместна.

13. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Заданы: матрица $[\hat{A}](e)$ линейного оператора $\hat{A}$ в базисе e; матрица перехода $\alpha(e,e')$ от базиса e к базису e'. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе e'. $[\hat{A}](e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha(e,e') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

14. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Задана матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе e: $[\hat{A}] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти все собственные значения оператора $\hat{A}$. Для каждого собственного значения найти: алгебраическую кратность собственного значения; базис собственного подпространства; геометрическую кратность собственного значения (размерность собственного подпространства); общий вид собственного вектора.

15. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Задана матрица линейного самосопряженного оператора $\hat{A}$ в базисе e: $[A](e) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найти: ортонормированный базис e' из собственных векторов оператора $\hat{A}$; матрицу перехода от базиса e к базису e'; матрицу перехода от базиса e' к базису e; матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе e'.

16. Рассматривается линейное евклидово двумерное пространство H. Известно, что одна из двух данных матриц является матрицей некоторого линейного самосопряженного оператора в некотором (неортогональном) базисе. Установить, какая именно. $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

17. В линейной оболочке $L(\cos, \sin)$ задан линейный оператор, действующий по правилу: $(\hat{A}x)(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$ при: $x \in L(\cos, \sin)$, $t \in K$. Найти: матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\cos$, $\sin$; собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

18. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2. Заданы выражения для билинейных форм F_1, F_2, F_3 в базисе e. Какие из этих билинейных форм можно принять за скалярное произведение в пространстве L? Какие из этих билинейных форм нельзя принять за скалярное произведение в пространстве L, но можно принять за псевдоскалярное произведение в пространстве L? Ответ обосновать. $F_1(x,y) = 3x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + 2x^2y^2$, $F_2(x,y) = 2x^1y^1 + x^1y^2 - x^2y^1 + 3x^2y^2$, $F_3(x,y) = x^1y^1 + 3x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2$.

19. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2. Для каждого $\lambda \in K$ задана матрица билинейной формы F_λ в базисе e: $[F_\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}$. При каких $\lambda \in K$ билинейную форму F_λ можно принять за скалярное произведение в пространстве L? При каких $\lambda \in K$ билинейную форму F_λ нельзя принять за скалярное произведение в пространстве L, но можно принять за псевдоскалярное произведение в пространстве L? Ответ обосновать.

20. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2. Для каждого $\lambda \in K$ задана матрица квадратичной формы Q_λ в базисе e: $[Q_\lambda](e) = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}$. Для каждого $\lambda \in K$ исследовать квадратичную форму Q_λ на знакоопределчнность и записать еч канонический вид.

21. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе e: $Q(x) = x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3$. Найти матрицу квадратичной формы Q в базисе e. Используя метод Лагранжа, привести квадратичную форму Q к каноническому виду: найти матрицу квадратичной формы Q в каноническом базисе e'; найти матрицу перехода от базиса e к базису e'; найти матрицу перехода от базиса e' к базису e.

22. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе e: $Q(x) = 3(x^1)^2 - 4x^1x^3 + (x^2)^2 + 3(x^3)^2$. Найти: матрицу квадратичной формы Q в базисе e; ортонормированный базис e', в котором матрица квадратичной формы Q имеет диагональный вид; матрицу перехода от базиса e к базису e'; матрицу перехода от базиса e' к базису e; матрицу квадратичной формы Q в базисе e'.

23. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Заданы выражения для квадратичных форм Q_1, Q_2 в базисе e: $Q_1(x) = 2(x^1)^2 - 6x^1x^2 - 4x^1x^3 + 9(x^2)^2 + 8x^2x^3 + 2(x^3)^2$, $Q_2(x) = 3(x^1)^2 - 2x^1x^2 - 2x^1x^3 + 5(x^2)^2 + 4x^2x^3 + (x^3)^2$. Найти матрицы квадратичных форм Q_1, Q_2 в базисе e. Одновременно привести квадратичные формы Q_1, Q_2 к каноническому виду: найти матрицы квадратичных форм Q_2, Q_2 в каноническом базисе e'; найти матрицу перехода от базиса e к базису e'; найти матрицу перехода от базиса e' к базису e.

24. Рассматривается аффинное евклидово двумерное пространство E^2 с началом отсччта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 5(x^2)^2 + 8x^1 - 2x^2 + 9 = 0$. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования базиса и смещения начала отсччта: найти уравнение кривой второго порядка в канонической системе координат; найти матрицу перехода от «старого» базиса к «новому»; найти матрицу перехода от «нового» базиса к «старому»; найти начало отсччта канонической системы координат.

25. Рассматривается аффинное евклидово двумерное пространство E^2 с началом отсччта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 5(x^2)^2 + 8x^1 - 2x^2 + 9 = 0$. Используя инварианты уравнения Y_1, Y_2, Y_3, найти уравнение кривой второго порядка в канонической системе координат.

Структура экзаменационного билета по линейной алгебре

1. Вычислительная задача.
2. Теоретическая задача.
3. Вопрос по линейной алгебре.
4. Вопрос по линейной алгебре.