План семинарских занятий по линейной алгебре

1. **Линейные пространства и подпространства линейных пространств.** Основные задачи: дан вектор x, дан базис e, найти столбец координат вектора x в базисе e; даны базисы e, e', найти матрицу перехода от базиса e к базису e'; даны базисы e, e', дан столбец координат вектора x в базисе e, найти найти столбец координат вектора x в базисе e'; даны векторы $x_1, \dots, x_r$, найти базис и размерность линейной оболочки $L(x_1, \dots, x_r)$, разложить каждый из векторов $x_1, \dots, x_r$ по найденному базису линейной оболочки $L(x_1, \dots, x_r)$, найти базис и размерность линейного дополнения линейной оболочки $L(x_1, \dots, x_r)$ до объемлющего линейного пространства; даны векторы $x_1, \dots, x_{r_1}$, $y_1, \dots, y_{r_2}$, найти: базис и размерность линейной оболочки $L(x_1, \dots, x_{r_1})$, базис и размерность линейного дополнения линейной оболочки $L(x_1, \dots, x_{r_1})$ до линейной оболочки $L(x_1, \dots, x_{r_1}, y_1, \dots, y_{r_2})$.

2. **Линейные операторы.** Основные задачи: дан линейный оператор A, дан базис e, найти матрицу оператора A в базисе e; даны базисы e, e', дана матрица линейного оператора A в базисе e, найти матрицу оператора A в базисе e'; дан базис e, дана матрица линейного оператора A в базисе e, найти: базис и размерность ядра оператора A, базис и размерность образа оператора A; дан базис e, дана матрица линейного оператора A в базисе e, найти собственные значения оператора A, для каждого собственного значения найти: алгебраическую кратность, базис соответствующего собственного подпространства, геометрическую кратность; дан базис e, дана матрица линейного оператора A в базисе e, найти: базис e' из собственных векторов оператора A (если он существует), матрицу оператора A в базисе e', матрицы перехода $\alpha(e, e')$, $\alpha(e', e)$.

3. **Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.** Основные задачи: дан базис e, дана матрица линейного оператора A в базисе e, найти: базис Жордана e' оператора A, матрицу оператора A в базисе e', матрицы перехода $\alpha(e, e')$, $\alpha(e', e)$.

4. **Билинейные и квадратичные формы.** Основные задачи: дан базис e, дано выражение для билинейной формы A (квадратичной формы Q) в базисе e, найти матрицу билинейной формы A (квадратичной формы Q) в базисе e; дан базис e, дана матрица билинейной формы A (квадратичной формы Q) в базисе e, найти выражение для билинейной формы A (квадратичной формы Q) в базисе e; даны базисы e, e', дана матрица билинейной формы A в базисе e, найти матрицу билинейной формы A в базисе e'; дан базис e, дана матрица квадратичной формы Q в базисе e, используя критерий Сильвестра, исследовать квадратичную форму Q на знакоопределённость; дан базис e, дано выражение для квадратичной формы Q в базисе e, найти матрицу квадратичной формы Q в базисе e, используя метод Лагранжа, найти: канонический базис e', матрицу квадратичной формы Q в базисе e', матрицы перехода $\alpha(e, e')$, $\alpha(e, e')$.

5. **Евклидовы пространства.** Основные задачи: дан базис e, найти: компоненты ковариантного метрического тензора в базисе e, компоненты контравариантного метрического тензора в базисе e; даны векторы $x_1, \ldots, x_r$, применить к последовательности $x_1, \ldots, x_r$ процесс Грама–Шмидта (без нормировки); даны векторы $x_1, \ldots, x_r$, найти: ортонормированный базис линейной оболочки $L(x_1, \ldots, x_r)$, ортонормированный базис ортогонального дополнения $L(x_1, \ldots, x_r)^\perp$ к линейной оболочке $L(x_1, \ldots, x_r)$; даны векторы $x_1, \ldots, x_r$, дан вектор x, найти: проекцию вектора x на линейную оболочку $L(x_1, \ldots, x_r)$, перпендикуляр вектора x к линейной оболочке $L(x_1, \ldots, x_r)$; дан базис e, даны векторы $x_1, \ldots, x_r$, найти матрицу оператора ортогонального проектирования $P_{L(x_1,\ldots,x_r)}$ на линейную оболочку $L(x_1, \ldots, x_r)$ в базисе e.

6. **Сопряжённый оператор. Самосопряжённые линейные операторы.** Основные задачи: дан базис e (не ортонормированный), дана матрица линейного оператора A в базисе e, исследовать оператор

A на самосопряжённость; дан базис e (не ортонормированный), дана матрица линейного оператора A в базисе e, найти матрицу сопряжённого оператора A^* в базисе e; дан базис e, дана матрица линейного самосопряжённого оператора A в базисе e, найти: ортонормированный базис e' из собственных векторов оператора A, матрицу оператора A в базисе e', матрицы перехода $\alpha(e, e')$, $\alpha(e', e)$, для каждого собственного значения λ_k найти матрицу оператора ортогонального проектирования P_k на соответствующее собственное подпространство в базисе e, найти матрицу оператора $\sqrt{A}$ в базисе e (если все числа $\sqrt{\lambda_k}$ лежат в нужном числовом поле).

7. **Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах.** Основные задачи: дан базис e евклидова пространства H, дана матрица $[A](e)$ симметричной билинейной формы A в базисе e, найти: ортонормированный базис e' в котором матрица $[A](e')$ имеет диагональный вид, матрицу $[A](e')$, матрицы перехода $\alpha(e, e')$, $\alpha(e', e)$; дан базис e линейного пространства L, дана матрица $[A](e)$ симметричной билинейной формы A, дана матрица $[B](e)$ положительной симметричной билинейной формы B, найти: базис e' в котором матрицы $[A](e')$, $[B](e')$ имеют диагональный вид, матрицы $[A](e')$, $[B](e')$, матрицы перехода $\alpha(e, e')$, $\alpha(e', e)$.

8. **Кривые и поверхности второго порядка.** Основные задачи: дана точка O, дан ортонормированный базис e, дано уравнение кривой второго порядка в системе координат с началом отсчёта O и базисом e, используя ортогональные инварианты, найти каноническое уравнение кривой второго порядка; дана точка O, дан ортонормированный базис e, дано уравнение кривой (поверхности) второго порядка в системе координат с началом отсчёта O и базисом e, найти: начало отсчёта O' канонической системы координат, базис e' канонической системы координат, уравнение кривой (поверхности) второго порядка в системе координат с началом отсчёта O' и базисом e', матрицы перехода $\alpha(e, e')$, $\alpha(e', e)$.