Лекция 10

1. Евклидово пространство

1.1. Определение.

Пусть $V(\mathbb{R})$ — ЛП над полем вещественных чисел.

Скалярное произведение на V — это произвольная функция

$$V \times V \to \mathbb{R},$$

ставящая в соответствие упорядоченной паре векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ вещественное число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и обладающая следующими свойствами:

(1) симметричность (коммутативность): $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x});$$

(2) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}),$$

(3) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

(линейность);

(4) положительность: $\forall \boldsymbol{x} \neq 0$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0.$$

Евклидово линейное пространство (ЕЛП) — это линейное пространство над ЧП $\mathbb{R}$, на котором зафиксировано некоторое скалярное произведение.

Евклидово точечное пространство (ЕТП) — это аффинное пространство над ЧП $\mathbb{R}$, на ассоциированном линейном пространстве которого зафиксировано некоторое скалярное произведение.

1.2. Неравенство Коши—Буняковского.

Пусть E — ЕЛП.

Теорема.

Для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ имеет место неравенство

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leqslant (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

◀ Имеем:

$$0 \leqslant (\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + t^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

Квадратный трехчлен может принимать только неотрицательные значения лишь в случае, когда его дискриминант неположителен:

$$D = 4(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - 4(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}),$$

откуда вытекает требуемое неравенство. ▶

1.3. **Длины и углы.**

Пусть E — ЕЛП.

Длина (модуль, норма) вектора $\boldsymbol{x} \in E$ — это число

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$

Используется также обозначение $|\boldsymbol{x}|$.

Неравенство Коши—Буняковского можно переписать в виде

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$$

и в виде

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|.$$

Теорема.

Имеют место соотношения:

(1) $\forall \boldsymbol{x} \in E$: $\|\boldsymbol{x}\| \geqslant 0$, *причем* $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|.$$

(3) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$:

$$\big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big| \leqslant \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

(*неравенства треугольника*).

◀ Утверждение (1) очевидно.

(2) Имеем:

$$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\alpha \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{x})} = \sqrt{\alpha^2 (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|.$$

(3) Имеем:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2,$$

откуда $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Аналогично,

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|)^2,$$

откуда $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \geqslant \big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big|$. ▶

В ЕТП расстояние между двумя точками A, B определяется как

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}.$$

Если A, B, C — три произвольные точки в ЕТП и $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$, то $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$, и мы получаем

$$\big||AB| - |BC|\big| \leqslant |AC| \leqslant |AB| + |BC|$$

— обычные неравенства треугольника.

Угол между ненулевыми векторами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — это число φ ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$), определяемое формулой

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}.$$

Из неравенства Коши—Буняковского следует, что угол определен для любых двух ненулевых векторов.

Направляющий вектор прямой может быть выбран с точностью до произвольного множителя.

Угол между двумя прямыми — это острый угол между их направляющими векторами, выбранными надлежащим образом.

1.4. **Примеры ЕЛП.** 1. ЛП $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ становится ЕЛП, если для векторов

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

определить СП по формуле

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x^j y^j = X^T Y.$$

2. В $\mathbb{R}^{n\times m}(\mathbb{R})$ можно ввести СП по формуле

$$(X, Y) = \operatorname{tr}(X^T Y).$$

Задача. Докажите.

3. В $\mathrm{Pol}(n, \mathbb{R})$ можно ввести СП векторов

$$\boldsymbol{x} = x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n,$$
$$\boldsymbol{y} = y(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$$

по формуле

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=0}^{n} a_j b_j.$$

4. В $\mathrm{Pol}(n, \mathbb{R})$ можно определить СП иначе:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t) y(t) dt.$$

Задача. Докажите.

1.5. **Ортогональные векторы.**

Пусть E — ЕЛП.

Векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ называются ортогональными, если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Обозначение $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

Пусть $P \Subset E$ — ЛПП в ЕЛП E. Вектор $\boldsymbol{x}$ называется ортогональным подпространству $P \Subset E$, если он ортогонален любому вектору из P:

$$\boldsymbol{x} \perp P \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \ \forall \boldsymbol{y} \in P.$$

Теорема.

(1) *$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{x}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.*

(2) *Если $\boldsymbol{x} \in P$ и $\boldsymbol{x} \perp P$, то $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.*

(3) *Если $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}_k$, то $\boldsymbol{y} \perp L(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k)$.*

(4) *Если $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, то $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$ (теорема Пифагора).*

(5) *Если ненулевые векторы $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p$ попарно ортогональны, т.е. $\boldsymbol{x}_j \perp \boldsymbol{x}_k$, $j \neq k$, то они линейно независимы.*

◀ (1), (2), (3), (4) — докажите самостоятельно.

(5) Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$, равную нулевому вектору:

$$\alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^s \boldsymbol{x}_s + \cdots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p = \mathbf{0}.$$

Умножая скалярно это равенство на вектор $\boldsymbol{x}_s$, получаем

$$\alpha^1 \underbrace{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_s)}_{=0} + \cdots + \alpha^s \underbrace{(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{x}_s)}_{=1} + \cdots + \alpha^p \underbrace{(\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{x}_s)}_{=0} = 0,$$

так что $\alpha^s = 0$, что и требовалось. ▶

1.6. **Ортонормированный базис.**

Система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ в ЕЛП E называется ортонормированной (ОНС), если

$$(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, p.$$

Векторы, образующие ОНС, линейно независимы.

Теорема.

В любом ЕЛП существует ортонормированный базис (*ОНБ*).

◀ Проведем построение ОНБ по индукции.

Пусть $\boldsymbol{y}_1 \in E$ — произвольный вектор. Система, состоящая из одного вектора $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{y}_1}{\|\boldsymbol{y}_1\|}$, является ортонормированной.

Допустим, что найдена ОНС $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{p-1}$, $p \leqslant \dim E$. Возьмем произвольный вектор

$$\boldsymbol{x}_p \notin L(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{p-1})$$

и рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{y}_p = \boldsymbol{x}_p - \sum_{j=1}^{p-1} (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{e}_j) \boldsymbol{e}_j.$$

Этот вектор обладает следующим свойством:

$$\boldsymbol{y}_p \perp L(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{p-1}).$$

Действительно, для любого $k = 1, \ldots, p$ имеем

$$(\boldsymbol{y}_p, \boldsymbol{e}_k) = (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{e}_k) - \sum_{j=1}^{p-1} (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{e}_j) \underbrace{(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)}_{=\delta_{jk}} = (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{e}_k) - (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{e}_k) = 0.$$

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{e}_p = \dfrac{\boldsymbol{y}_p}{\|\boldsymbol{y}_p\|}$. Система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{p-1}, \boldsymbol{e}_p$ является ортонормированной.

Продолжая процесс, получим ОНБ $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. ▶

Теорема.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ОНБ ЕЛП E. Координаты x^k произвольного вектора $\boldsymbol{x} \in E$ относительно этого ОНБ могут быть вычислены по формулам

$$x^k = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k).$$

◀ Умножая разложение вектора $\boldsymbol{x}$ по базису

$$\boldsymbol{x} = x^j \boldsymbol{e}_j$$

(здесь подразумевается суммирование по j) скалярно на вектор $\boldsymbol{e}_k$, получаем

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k) = x^j(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = x^j\delta_{jk} = x^k. \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ОНБ в ЕЛП E, то СП векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ выражается через их координаты относительно этого базиса по формуле

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1} x^j y^j.$$

◀ Пусть

$$\boldsymbol{x} = x^j\boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{y} = y^k\boldsymbol{e}_k$$

— разложения векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ по ОНБ $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. (Использовано правило суммирования Эйнштейна.) Имеем:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x^j\boldsymbol{e}_j, y^k\boldsymbol{e}_k) = x^jy^k(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) =$$
$$= x^jy^k\delta_{jk} = \sum_{j=1} x^jy^j. \qquad \blacktriangleright$$

1.7. **Изоморфизм ЕЛП.** Пусть E и F — два ЕЛП. Отображение $\varphi : E \to F$ называется изоморфизмом ЕЛП, если оно является изоморфизмом ЛП и обладает свойством

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_E = (\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y}))_F$$

для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$.

ЕЛП E и F называются изоморфными, если существует хотя бы один изоморфизм $\varphi : E \to F$.

Теорема.

Любые два ЕЛП одинаковой размерности изоморфны.

◀ Зафиксируем в ЕЛП E ОНБ $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, в ЕЛП F — ОНБ $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$. Отображение

$$\varphi : E \to F,$$

которое ставит в соответствие вектору

$$\boldsymbol{x} = x^j\boldsymbol{e}_j \in E$$

вектор

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = x^j\boldsymbol{f}_j \in F,$$

является изоморфизмом ЕЛП, поскольку во всех ОНБ СП выражается одной и той же формулой:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_E = \sum_{j=1} x^jy^j = (\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y}))_F. \qquad \blacktriangleright$$

2. Двумерная евклидова геометрия

Евклидова геометрия — раздел геометрии, изучающий евклидовы пространства.

По сравнению с аффинной геометрией в евклидовой геометрии имеется одно дополнительное первоначальное понятие — скалярное произведение — и три дополнительных аксиомы.

Рассмотрим евклидову геометрию в двумерном евклидовом точечном пространстве E. Считаем, что в E зафиксирована ортогональная система координат (ОСК) $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = O\boldsymbol{ij}$; координаты обозначаем x^1, x^2 или x, y.

2.1. Уравнение прямой на плоскости.

Теорема.

Прямая на евклидовой плоскости, проходящая через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$, задается уравнением

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})=0 \quad \text{или} \quad (\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D.$$

Вектор $\boldsymbol{n}$ называется нормальным вектором прямой.

◀ В произвольной ортогональной системе координат

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})=A(x-x_0)+B(y-y_0).$$

Приравнивая нулю последнее выражение, получаем уравнение прямой

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \iff Ax+By=D. \qquad \blacktriangleright$$

2.2. Основные формулы.

Теорема.

Даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и прямая l, заданная уравнением $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D$.

(1) *Ортогональная проекция $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую l выражается формулой*

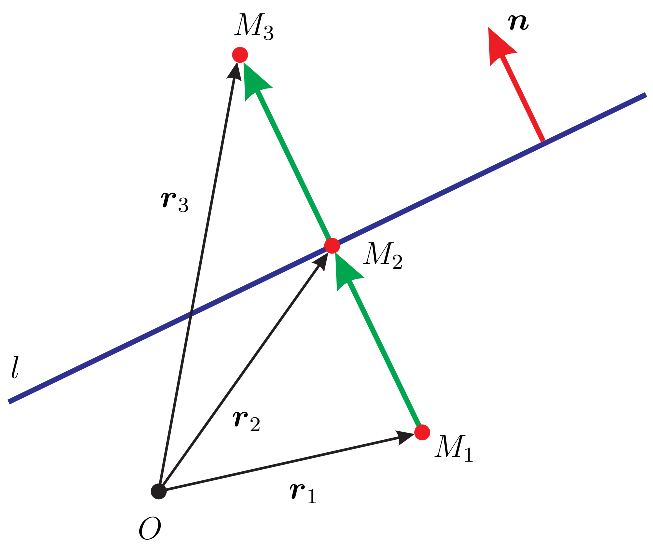
$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1+\frac{D-(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

(2) *Расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой l, выражается формулой*

$$d(M_1,l)=\frac{|D-(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})|}{\|\boldsymbol{n}\|}.$$

(3) *Точка $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, симметричная точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно прямой l, выражается формулой*

$$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1+2\frac{D-(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$



◀ Имеем:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda\boldsymbol{n}.$$

Умножим обе части равенства скалярно на вектор $\boldsymbol{n}$:

$$\underbrace{(\overrightarrow{OM_2}, \boldsymbol{n})}_{=D} - \underbrace{(\overrightarrow{OM_1}, \boldsymbol{n})}_{=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})} = \lambda(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}),$$

откуда

$$\lambda = \frac{D - (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}.$$

Для радиус-вектора $\boldsymbol{r}_2$ проекции M_2 точки M_1 на прямую имеем:

$$\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_1 + \frac{D - (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Расстояние от точки M_1 до прямой l:

$$d(M_1, l) = d(M_1, M_2) = \|\overrightarrow{M_1, M_2}\| = \left\|\frac{D - (\boldsymbol{r}_1, n)}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}\right\| =$$

$$= \frac{|D - (\boldsymbol{r}_1, n)|}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\|\boldsymbol{n}\| = \frac{|D - (\boldsymbol{r}_1, n)|}{\|\boldsymbol{n}\|}.$$

Для радиус-вектора $\boldsymbol{r}_3$ точки M_3, симметричной точке M_1 относительно прямой, имеем:

$$\boldsymbol{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_1} + 2\overrightarrow{M_1M_2} =$$

$$= \boldsymbol{r}_1 + 2\lambda\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{D - (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}. \qquad ▶$$

3. Трехмерная евклидова геометрия

Считаем, что в трехмерном евклидовом точечном пространстве E зафиксирована ортогональная система координат (ОСК) $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = O\boldsymbol{ijk}$; координаты обозначаем x^1, x^2, x^3 или x, y, z.

Понятия векторного и смешанного произведений вводятся так же, как это было сделано ранее. Все формулы для вычисления векторного и смешанного произведений в ортонормированном базисе сохраняются.

3.1. **Уравнение плоскости в пространстве.**

Теорема.

Плоскость в евклидовом пространстве, проходящая через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$, задается уравнением

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0 \quad \text{или} \quad (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D.$$

Вектор $\boldsymbol{n}$ называется нормальным вектором плоскости.

3.2. **Основные формулы.**

Теорема.

Даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и плоскость π, заданная уравнением $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

(1) *Ортогональная проекция $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на плоскость π выражается формулой*

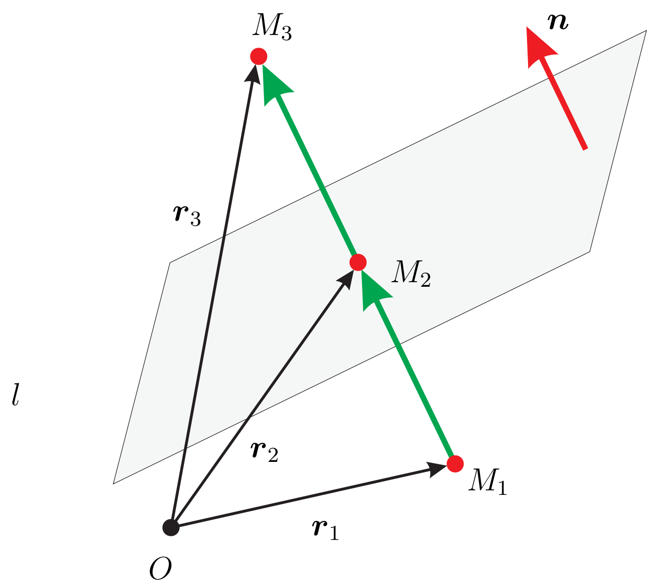
$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \frac{D - (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

(2) *Расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до плоскости π выражается формулой*

$$d(M_1, \pi) = \frac{|D - (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})|}{\|\boldsymbol{n}\|}.$$

(3) *Точка $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, симметричная точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно плоскости π, выражается формулой*

$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{D - (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$



3.3. **Уравнение прямой в пространстве.**

Умножая векторное параметрическое уравнение прямой

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$$

векторно на вектор $\boldsymbol{a}$, получаем

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] + t\underbrace{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}]}_{=\boldsymbol{0}}.$$

Обозначим $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]$; отметим, что $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$. Получим уравнение прямой в виде

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}, \quad \text{где} \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0.$$

Задача 1.

Записать уравнение прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

Решение. Направляющий вектор прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ можно выбрать равным $\boldsymbol{a}$. Найдем такую опорную точку $\boldsymbol{r}_0$ прямой, что ее радиус-вектор ортогонален вектору $\boldsymbol{a}$. Умножим соотношение $[\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ прямой векторно на $\boldsymbol{a}$:

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\,\underbrace{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}_0)}_{=0} = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],$$

откуда

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}.$$

Получаем параметрическое уравнение прямой

$$\boldsymbol{r} = \frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} + t\boldsymbol{a}.$$

3.4. **Основные формулы.**

Теорема.

Даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и прямая l, заданная уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

(1) *Ортогональная проекция $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую l выражается формулой*

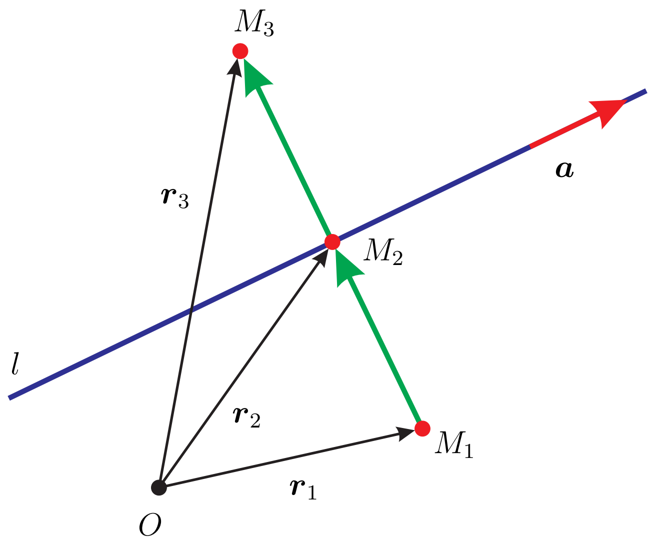
$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

(2) *Расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой l, выражается формулой*

$$d(M_1, l) = \frac{\big\|[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|}.$$

(3) *Точка $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, симметричная точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно прямой l, выражается формулой*

$$\boldsymbol{r}_3 = 2\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$



◀ Умножим обе части равенства

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

скалярно на вектор $\boldsymbol{a}$:

$$\underbrace{(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{a})}_{=0} - \underbrace{(\overrightarrow{OM_2}, \boldsymbol{n})}_{=(\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} - \underbrace{(\overrightarrow{OM_1}, \boldsymbol{n})}_{=(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})} =$$

$$= (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}),$$

откуда

$$t_0 = \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

— значение параметра, отвечающее точке $M_2 \in l$.

Для проекции M_2 точки M_1 на прямую l имеем:

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + t_0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Для точки M_3, симметричной точке M_1 относительно прямой l, имеем

$$\boldsymbol{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + 2\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_1 + 2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) =$$

$$= 2\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Найдем расстояние от точки M_1 до прямой l:

$$d(M_1, l) = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\| = \left\|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\right\| =$$

$$= \left\|\frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\right\| = \left\|\frac{[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\right\| =$$

$$= \frac{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \big\|[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big\| \cdot \sin\varphi}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \frac{\big\|[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|},$$

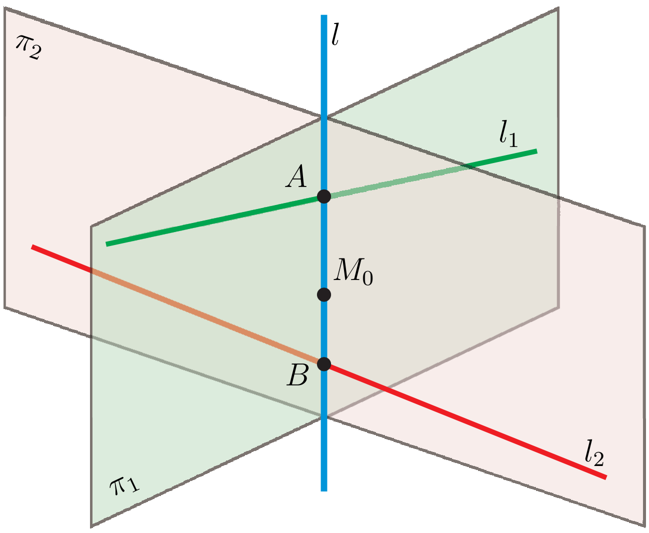
где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]$; здесь учтено, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]$ ортогональны, т.е. $\sin\varphi = 1$. ▶

3.5. **Скрещивающиеся прямые.**

Задача 2.

Составить уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$ и проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$, не лежащую ни на одной из этих прямых.

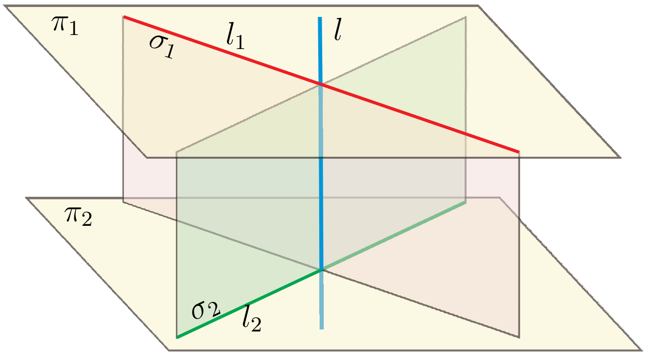
Ответ: $\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}_1) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}_2) = 0. \end{cases}$



Задача 3.

Составить уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$ под прямыми углами (общего перпендикуляра к этим прямым).

Ответ: $\begin{cases} (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]) = 0, \\ (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_2, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]) = 0. \end{cases}$



Задача 4.
Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$.
Ответ: $\dfrac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)|}{\|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\|}$.
Задача 5.
Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{b}_2$.
Ответ: $\dfrac{|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)|}{\|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\|}$.

4. Экзаменационные задачи

Задача 1. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2.$$

Ответ: $\arccos \dfrac{|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)|}{\|\boldsymbol{a}_1\| \cdot \|\boldsymbol{a}_2\|}$.

Задача 2. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \quad (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2.$$

Ответ: $\arccos \dfrac{|(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)|}{\|\boldsymbol{n}_1\| \cdot \|\boldsymbol{n}_2\|}$.

Задача 3. Найти необходимое и достаточное условие, при котором прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2$:

(1) пересекаются в единственной точке;
(2) параллельны, но не совпадают;
(3) совпадают.

Ответ: (1) $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны; (2) $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ не коллинеарны; (3) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ коллинеарны.

Задача 4. Найти условие, при котором прямые $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ пересекаются (в единственной точке), и радиус-вектор точки пересечения этих прямых.

Ответ: $\boldsymbol{r}_0 + \dfrac{D - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}$.

Задача 5. Записать уравнение плоскости $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ в виде $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

Ответ: $(\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Задача 6. Найти необходимое и достаточное условие, при котором плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$:

(1) пересекаются по прямой;
(2) параллельны, но не совпадают;
(3) совпадают.

Ответ: (1) $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] \neq \boldsymbol{0}$; (2) $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \boldsymbol{0}$, и если $\boldsymbol{n}_1 = \lambda \boldsymbol{n}_2$, то $D_1 \neq \lambda D_2$; (3) $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \boldsymbol{0}$, и если $\boldsymbol{n}_1 = \lambda \boldsymbol{n}_2$, то $D_1 = \lambda D_2$.

Задача 7. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_2$.

Ответ: $\dfrac{|D_1 - D_2|}{\|\boldsymbol{n}\|}$.

Задача 8. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$.

Ответ: $\dfrac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|}{\big\|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big\|}$.

Задача 9. Записать уравнение прямой

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \\ (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2 \end{cases}$$

в виде $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Ответ: $[\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]] = D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2$.

Задача 10. Записать уравнение прямой

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \\ (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2 \end{cases}$$

в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

Ответ: $\boldsymbol{r} = \dfrac{[\boldsymbol{a}, D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + t\boldsymbol{a}$.

Задача 11. Найти необходимое и достаточное условие, при котором прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$:

(1) пересекаются (т.е. имеют одну общую точку);
(2) скрещиваются;
(3) параллельны, но не совпадают;
(4) совпадают.

Ответ: (1) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$; (2) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \neq 0$; (3) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}$, $[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] \neq \boldsymbol{0}$; (4) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}$, $[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{0}$.

Задача 12. Найти расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Ответ: $\dfrac{\big\|[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}] - \boldsymbol{b}\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

Задача 13. Найти расстояние между параллельными прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}$.

Ответ: $\dfrac{\big\|[\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{a}]\big\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

Задача 14. Найти расстояние между параллельными прямыми $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{b}_2$.

Ответ: $\dfrac{\|\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

Задача 15. Даны прямая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}$ и плоскость $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D$. Найти необходимое и достаточное условие того, что:

(1) прямая и плоскость пересекаются (имеют единственную общую точку);
(2) прямая и плоскость параллельны (не имеют общих точек);
(3) прямая лежит в плоскости.

Ответ. (1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\neq 0$; (2) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})=0$, $(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})\neq D$; (3) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})=0$, $(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})=D$.

Задача 16. Найти радиус-вектор точки пересечения прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}$ с плоскостью $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D$.

Ответ. $\boldsymbol{r}_0+\dfrac{D-(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}$.

Задача 17. Найти радиус-вектор точки пересечения прямой $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{b}$ с плоскостью $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D$.

Ответ. $\dfrac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}+\dfrac{D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}$.

Задача 18. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно плоскости $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D$.

Ответ. $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t\boldsymbol{n}$.

Задача 19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}$.

Ответ. $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{a})=0$.

Задача 20. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}$ и точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, не лежащую на этой прямой.

Ответ. $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a})=0$.

Задача 21. Составить уравнение проекции прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}$ на плоскость $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D$ при условии, что прямая не перпендикулярна плоскости.

Ответ. $\begin{cases}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=D,\\(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})=0.\end{cases}$

Задача 22. Составить уравнение прямой, пересекающей прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}$ под прямым углом и проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, не лежащую на данной прямой (перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую).

Ответ. $\begin{cases}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{a})=0,\\(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{a})=0.\end{cases}$