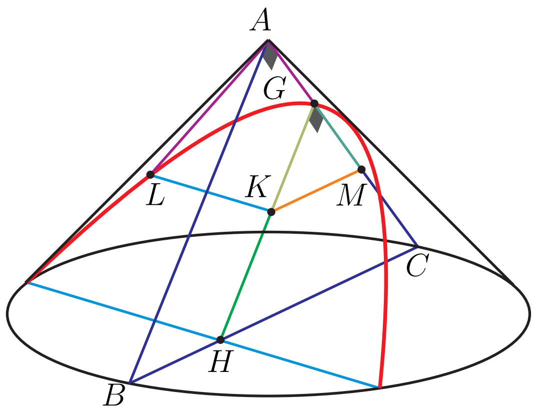
Лекция 11

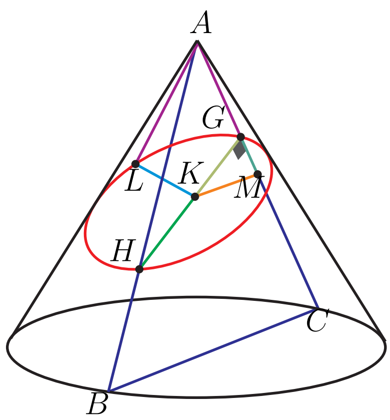
1. Конические сечения

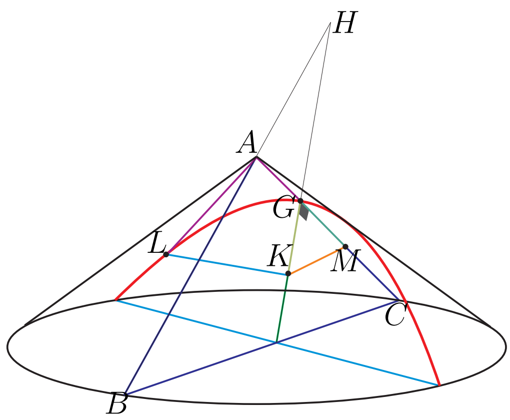
1.1. **Определение.**

Рассмотрим сечение прямого кругового конуса плоскостью, перпендикулярной к образующей этого конуса. При различных значениях угла α при вершине в осевом сечении конуса получаем кривые трех типов:

(1) параболу, если $\alpha = 90^\circ$;
(2) эллипс, если $\alpha < 90^\circ$;
(3) гиперболу, если $\alpha > 90^\circ$.







Пусть A — вершина конуса, BC — диаметр основания, 2α — угол при вершине в осевом сечении конуса. Рассмотрим сечение конуса плоскостью, проходящей через точку G на прямолинейной образующей AC перпендикулярно AC. Эта плоскость пересекается с плоскостью ABC по прямой GK, которая является осью симметрии конического сечения (назовем ее главной осью).

Из произвольной точки L сечения опустим перпендикуляр LK на ось симметрии. Введем обозначения

$$AG = r, \quad GK = x, \quad KL = y.$$

Эти три отрезка взаимно перпендикулярны, поэтому

$$AL^2 = r^2 + x^2 + y^2.$$

Отложим на прямой AC отрезок $AM = AL$.

В случае параболы $GM = GK = x$, поэтому

$$AM = AG + GM = r + x,$$

$$r^2 + x^2 + y^2 = (r + x)^2 = r^2 + 2rx + x^2,$$

т.е.

$$y^2 = 2rx.$$

Это — каноническое уравнение параболы.

Рассмотрим случай эллипса и гиперболы. Обозначим

$$H = GK \cap AB, \quad 2a = GH.$$

Отрезок GH называется большой осью эллипса (вещественной осью гиперболы).

В $\triangle GKM$ имеем: $\angle KGM = 90^\circ$, $\angle GKM = \alpha$. Поэтому

$$GM = x \operatorname{tg} \alpha.$$

И для эллипса, и для гиперболы получаем

$$r^2 + x^2 + y^2 = (r + x \operatorname{tg} \alpha)^2 = r^2 + 2xr \operatorname{tg} \alpha + x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

т.е.

$$y^2 = 2xr \operatorname{tg} \alpha + x^2(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1).$$

Введем обозначение $p = r \operatorname{tg} \alpha$. Величина p называется параметром конического сечения.

В $\triangle AGH$ имеем: $\angle AGH = 90^\circ$,

- $\angle GAH = 2\alpha$ в случае эллипса,
- $\angle GAH = \pi - 2\alpha$ в случае гиперболы.

Для эллипса получаем

$$\frac{2a}{r} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

так что

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Для гиперболы получаем:

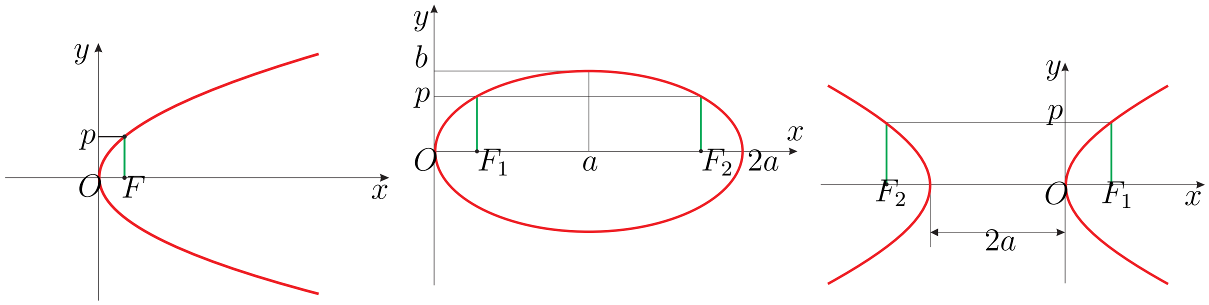
$$\frac{2a}{r} = \operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1},$$

так что

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Фокальная хорда параболы, эллипса, гиперболы — это отрезок, перпендикулярный главной оси конического сечения и имеющий длину $2p$. Точки пересечения фокальных хорд с главной осью называются фокусами.

Итак, получены уравнения параболы, эллипса и гиперболы в прямоугольной системе координат, одна из осей которой является осью симметрии конического сечения, а вторая проходит через вершину конического сечения.



$y^2 = 2px$ $\qquad$ $y^2 = 2px - \dfrac{p}{a}x^2.$ $\qquad$ $y^2 = 2px + \dfrac{p}{a}x^2.$

1.2. **Парабола.** Рассмотрим каноническое уравнение параболы

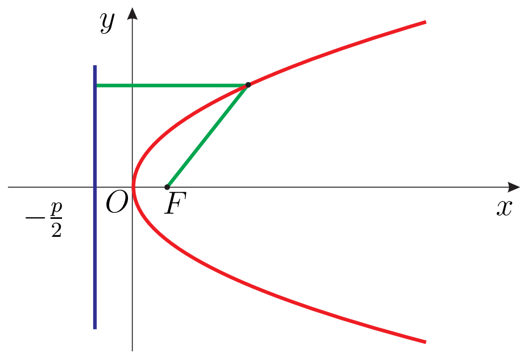
$$y^2 = 2px.$$

Имеем:

$$y^2 = 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

т.е. точка (x, y) параболы равноудалена от прямой $x = -p/2$ и точки $(p/2, 0)$, которая является фокусом параболы, поскольку при $x = p/2$ имеем $y^2 = p^2$. Это — директориальное свойство параболы.



Основные термины, связанные с параболой:

(1) p — (фокальный) параметр;
(2) $p/2$ — фокусное расстояние
(3) точка $F(p/2, 0)$ — фокус;
(4) прямая $x = -p/2$ — директриса.

1.3. **Эллипс.** Рассмотрим уравнение эллипса

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Выражение $2px - \frac{p}{a}x^2$ достигает максимума при $x = a$; этот максимум равен pa; обозначим $pa = b^2$.

Сделаем замену переменных

$$x = X + a, \quad y = Y.$$

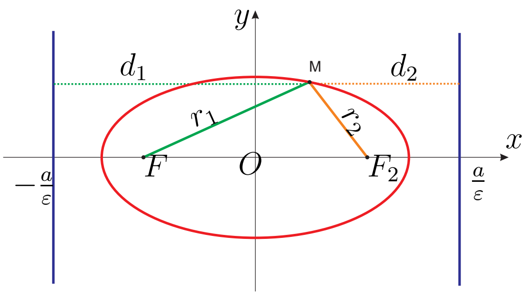
Уравнение эллипса примет вид

$$Y^2 = 2p(X + a) - \frac{p}{a}(X + a)^2 = -\frac{p}{a}X^2 + pa.$$

Отсюда получаем
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1.$$
Это — каноническое уравнение эллипса.

Основные термины, связанные с эллипсом:

(1) a — большая полуось;
(2) b — малая полуось;
(3) $c=\sqrt{a^2-b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(4) точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ — фокусы;
(5) $2c$ — фокусное расстояние;
(6) $\varepsilon=c/a<1$ — (числовой) эксцентриситет;
(7) прямые $x=\pm a/\varepsilon$ — директрисы;
(8) $p=b^2/a$ — (фокальный) параметр;
(9) ось OX — большая (фокальная) ось;
(10) ось OY — малая ось;
(11) точки $(\pm a,0)$, $(0,\pm b)$ — вершины эллипса;
(12) точка $O(0,0)$ — центр эллипса.



Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка эллипса. Отрезки F_1M, F_2M называются фокальными радиусами точки M.

Теорема.

Фокальное свойство эллипса: Эллипс является геометрическим местом точек, сумма расстояний от которых до фокусов равно $2a$: $F_1M+F_2M=\mathrm{const}$.

◀ Рассмотрим эллипс
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$
Длины фокальных радиусов точки $M(x,y)$ равны
$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Поэтому
$$r_1^2=(x+c)^2+y^2=(x+c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=$$
$$=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+c^2+b^2=\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2=$$
$$=\varepsilon^2x^2+2\varepsilon^2ax+a^2=(\varepsilon x+a)^2.$$

Поскольку $|x|\leqslant a$, $\varepsilon<1$, имеем $|\varepsilon x|<a$, так что
$$r_1=a+\varepsilon x.$$

Аналогично находим
$$r_2=a-\varepsilon x.$$

Следовательно,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Обратно, пусть $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой сумма $F_1M + F_2M$ постоянна и равна $2a$, т.е.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Уничтожив радикалы, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Директориальное свойство эллипса: Эллипс является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до одноименной с фокусом директрисы равно ε.

◀ Расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ эллипса до левой и правой директрис равны

$$d_1 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_1}{\varepsilon},$$

$$d_2 = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Обратно, если

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = \varepsilon \left|x \pm \frac{a}{\varepsilon}\right|,$$

то

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (\varepsilon x \pm a)^2$$

и поэтому

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

1.4. **Гипербола.** Рассмотрим уравнение гиперболы

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Сделаем замену переменных

$$x = X - a, y = Y.$$

Уравнение гиперболы примет вид

$$Y^2 = 2p(X - a) + \frac{p}{a}(X + a)^2 = \frac{p}{a}X^2 - pa.$$

Отсюда получаем

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

где введено обозначение $pa = b^2$. Это — каноническое уравнение гиперболы.

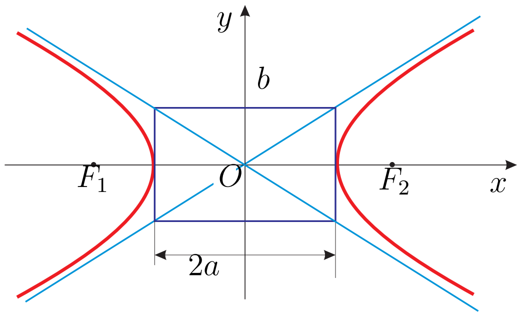
Выразим из уравнения гиперболы y:

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Имеем:

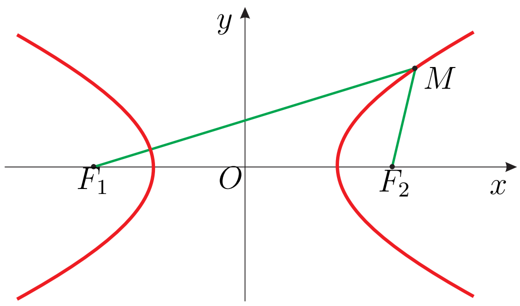
$$y = \pm b\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \pm b\frac{x}{a}\left(1 - \frac{a^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \pm\frac{b}{a}x + o(1).$$

Таким образом, прямые $ay \pm bx = 0$ являются асимптотами гиперболы.



Основные термины, связанные с гиперболой:

(1) a — вещественная полуось;
(2) b — мнимая полуось;
(3) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(4) точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы;
(5) $2c$ — фокусное расстояние;
(6) $\varepsilon = c/a > 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(7) прямые $x = \pm a/\varepsilon$ — директрисы;
(8) $p = b^2/a$ — (фокальный) параметр;
(9) ось OX — вещественная (фокальная) ось;
(10) ось OY — мнимая ось;
(11) точки $(\pm a, 0)$ вершины гиперболы;
(12) точка $O(0, 0)$ — центр гиперболы;
(13) прямые $ay \pm bx = 0$ — асимптоты гиперболы.



Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы. Отрезки F_1M, F_2M называются фокальными радиусами точки M.

Теорема.

Фокальное свойство гиперболы: Гипербола является геометрическим местом точек, разность расстояний от которых до фокусов равна по абсолютной величине $2a$: $|F_1M - F_2M| = \mathrm{const}$.

◀ Рассмотрим гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Длины фокальных радиусов точки $M(x, y)$ равны

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Поэтому

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) =$$

$$= \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right) x^2 + 2xc + c^2 - b^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 + 2cx + a^2 =$$
$$= \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon^2 ax + a^2 = (\varepsilon a + x)^2.$$

Поскольку $|\varepsilon x| > |x| \geqslant a$, имеем

$$r_1 = \begin{cases} x\varepsilon + a, & x > 0, \\ -x\varepsilon - a, & x < 0. \end{cases}$$

Аналогично получаем

$$r_2 = \begin{cases} x\varepsilon - a, & x > 0, \\ -x\varepsilon + a, & x < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|r_1 - r_2| = \begin{cases} 2a, & x > 0, \\ -2a, & x < 0. \end{cases}$$

Обратно, пусть $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой $|F_1M - F_2M| = 2a$, т.е.

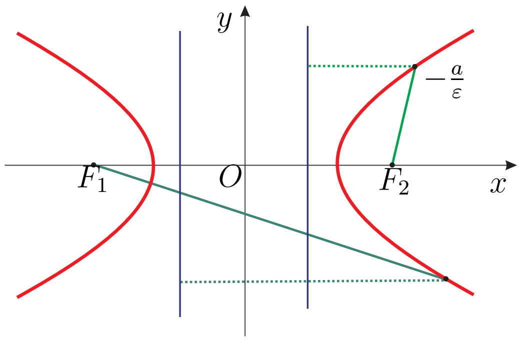
$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Уничтожив радикалы, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Директориальное свойство гиперболы: Гипербола является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до одноименной с фокусом директрисы равно ε.



◀ Расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы до левой и правой директрис равны

$$d_1 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_1}{\varepsilon},$$

$$d_2 = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Обратно, если

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = \varepsilon \left|x \pm \frac{a}{\varepsilon}\right|,$$

то

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (\varepsilon x \pm a)^2$$

и поэтому

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \blacktriangleright$$

1.5. **Касательные к параболе, эллипсу, гиперболе.**

Касательная к параболе — это прямая, непараллельная оси параболы, имеющая с параболой одну общую точку.

Пусть (x_0, y_0) — точка касания параболы $y^2 = 2px$ и прямой

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad m \neq 0.$$

Имеем:

$$(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt) \iff$$

$$\iff y_0^2 + 2my_0t + m^2t^2 = 2px_0 + 2plt \iff$$

$$\iff m^2t^2 + 2t(my_0 - pl) = 0.$$

Это квадратное уравнение должно иметь один (двойной) корень, что возможно лишь при выполнении условия

$$my_0 - pl = 0 \iff l = m\frac{y_0}{p}.$$

Каноническое уравнение касательной имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \iff$$

$$\iff y_0(y - y_0) = p(x - x_0) \iff$$

$$\iff y_0y - 2px_0 = px - px_0$$

и окончательно

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Касательная к эллипсу (гиперболе) — это прямая, имеющая с эллипсом (гиперболой) одну общую точку.

Пусть (x_0, y_0) — точка касания эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и прямой

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt.$$

Имеем:

$$\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}_{=1} + 2t\left(\frac{x_0l}{a^2} + \frac{y_0m}{b^2}\right) + t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) = 1,$$

$$t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) + 2t\left(\frac{x_0l}{a^2} + \frac{y_0m}{b^2}\right) = 0.$$

Это квадратное уравнение должно иметь один (двойной) корень, что возможно при выполнении условия

$$\frac{x_0l}{a^2} + \frac{y_0m}{b^2} = 0,$$

так что можно положить

$$l = \frac{y_0}{b^2}, \quad m = -\frac{x_0}{a^2}.$$

Каноническое уравнение касательной к эллипсу имеет вид

$$\frac{x-x_0}{y_0/b^2}=\frac{y-y_0}{-x_0/a^2} \iff \frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)=0,$$

откуда, учитывая соотношение $x_0^2/a^2+y_0^2/b^2=1$, получаем

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Аналогично получаем уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

в точке (x_0,y_0):

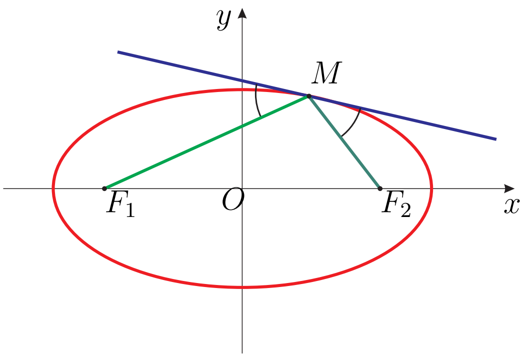
$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

1.6. **Оптические свойства конических сечений.**

Теорема.

Оптическое свойство эллипса: фокальные радиусы произвольной точки M_0 эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке M_0.

Физическая интерпретация: если в фокусе эллипса поместить точечный источник света, а эллипс считать зеркалом, то после отраженный эллипсом луч попадет во второй фокус.



◀ Найдем синусы углов α_1 и α_2, которые фокальные радиусы произвольной точки $M_0(x_0,y_0)$ составляют с касательной к эллипсу в точке M_0.

Расстояние F_1D_1 от фокуса $F_1(-c,0)$ до касательной, имеющей уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

равно

$$F_1D_1=\frac{\left|\dfrac{(-c)\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{0\cdot y_0}{b^2}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{\varepsilon x_0+a}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{r_1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}},$$

так что

$$\sin\alpha_1=\frac{F_1D_1}{F_1M_0}=\frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Аналогично получаем

$$\sin\alpha_2=\frac{F_2D_2}{F_2M_0}=\frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

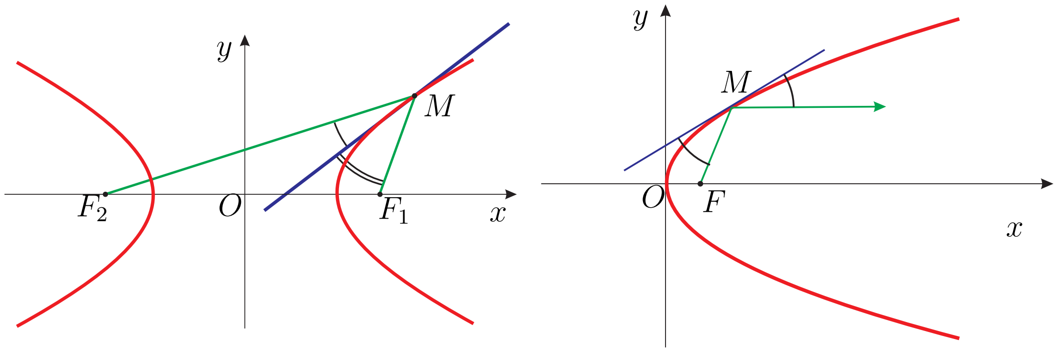
Таким образом, $\alpha_1=\alpha_2$. ▶

Теорема.

Оптическое свойство гиперболы: фокальные радиусы произвольной точки M_0 гиперболы составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке M_0.

Теорема.

Оптическое свойство параболы: фокальный радиус произвольной точки M_0 параболы составляет с касательной к параболе угол в точке M_0.



1.7. **Полярные уравнения конических сечений.**

Получим уравнения конических сечений в полярной системе координат, ось которой совпадает с главной осью кривой, а полюс находится в фокусе.

Поместим полюс в фокус параболы. Имеем:

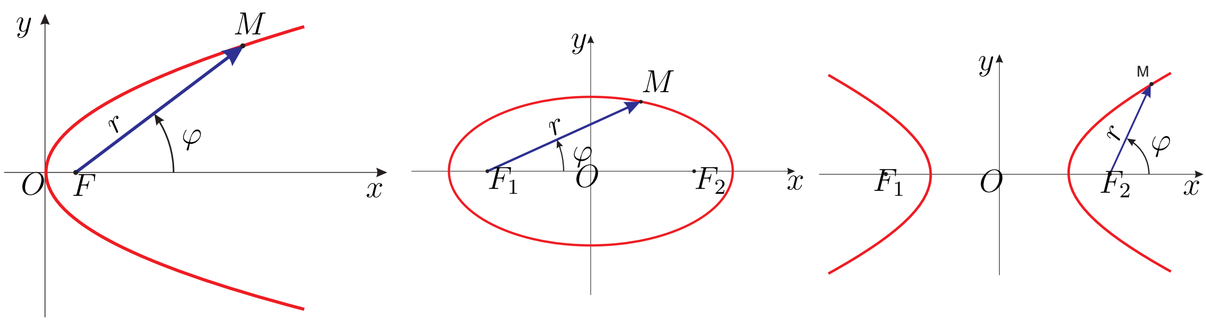
$$x - \frac{p}{2} = r\cos\varphi$$

(связь декартовых и полярных координат) и

$$r = x + \frac{p}{2}$$

(директориальное свойство параболы). Таким образом,

$$r\cos\varphi = r - p \iff r = \frac{p}{1-\cos\varphi}.$$



Поместим полюс в левый фокус эллипса. Имеем:

$$x + c = r\cos\varphi$$

(связь декартовых и полярных координат) и

$$r = \varepsilon x + a$$

(выражение для левого фокального радиуса). Таким образом,

$$r = \varepsilon(r\cos\varphi - c) + a \iff r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a - \varepsilon c = p,$$

так что

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

В случае гиперболы поместим полюс в правый фокус и ограничимся рассмотрением правой ветви гиперболы. Имеем:

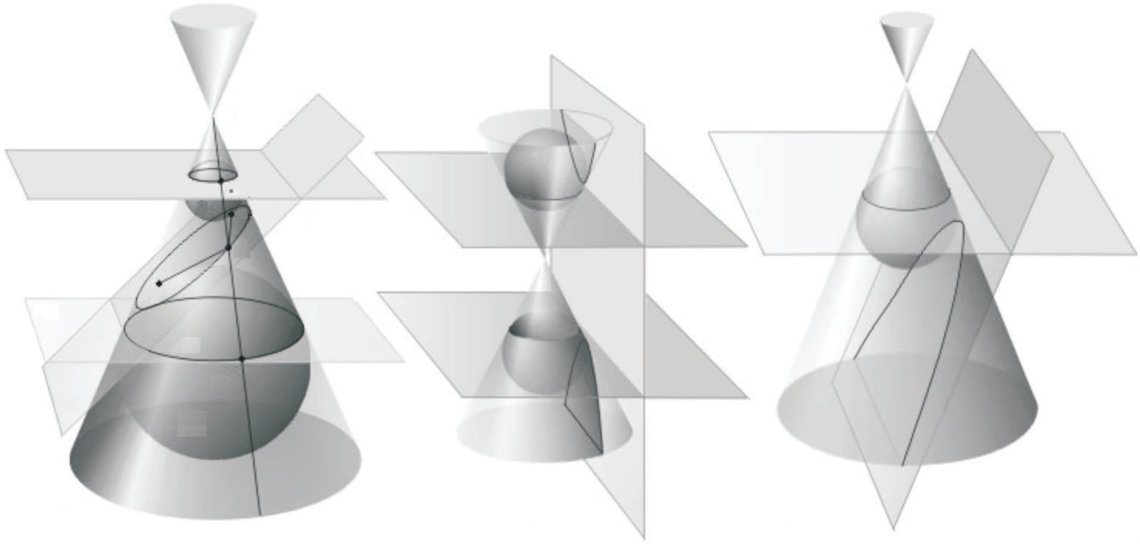
$$r = \varepsilon x - a, \quad x - c = r\cos\varphi,$$

откуда получаем

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Таким образом, парабола, эллипс и гипербола (вернее, одна ее ветвь) задаются в полярных координатах одним и тем же уравнением.

1.8. **Конструкция Данделена.**



2. Экзаменационные задачи

Задача 1. Пусть O — центр эллипса, a, b — его полуоси, A, B — такие точки эллипса, что прямые OA и OB взаимно перпендикулярны. Доказать, что величина $1/|OA|^2 + 1/|OB|^2$ постоянна для всех возможных пар точек A и B.

Задача 2. Пусть O — центр эллипса, a, b — его полуоси, A, B — такие точки эллипса, что прямые OA и OB взаимно перпендикулярны. Найти наибольшее и наименьшее значения длины отрезка AB.

Задача 3. Вычислить эксцентриситет равносторонней гиперболы (т.е. гиперболы, полуоси которой равны).

Задача 4. Доказать, что для данной гиперболы произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная.

Задача 5. Доказать, что для данной гиперболы площадь параллелограмма, одна из вершин которого лежит на гиперболе, а две стороны лежат на асимптотах, есть величина постоянная.

Задача 6. Доказать, что вершины гиперболы и четыре точки пересечения ее директрис с асимптотами лежат на одной окружности. Выразить радиус этой окружности через длину действительной полуоси гиперболы.

Задача 7. Две параболы, оси которых взаимно перпендикулярны, имеют четыре точки пересечения. Доказать, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

Задача 8. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам.

Задача 9. Доказать, что все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь.

Задача 10. Доказать, что касательные в точках пересечения эллипса и гиперболы, имеющих общие фокусы, взаимно перпендикулярны.

Задача 11. Доказать, что касательные в точках пересечения двух парабол с общим фокусом и противоположно направленными осями взаимно перпендикулярны.