Лекция 12

1. Преобразование базисов и координат

1.1. **Преобразование базисов и координат в линейном пространстве.** Пусть $V(\mathbb{K})$ — линейное пространство над числовым полем $\mathbb{K}$, $\dim V = n$,
$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — старый базис в V,
$\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ — новый базис в V.

Вектор $\boldsymbol{e}_{k'} \in V$ можно разложить по базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{e}_{k'} = c^1_{k'}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c^n_{k'}\boldsymbol{e}_n$$

или, в обозначениях Эйнштейна

$$\boxed{\boldsymbol{e}_{k'} = c^k_{k'}\boldsymbol{e}_k, \qquad \begin{array}{c} k = 1, \ldots, n, \\ k' = 1', \ldots, n'. \end{array}} \tag{1}$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \ldots & c^1_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_{1'} & \ldots & c^n_{n'} \end{pmatrix} = (c^k_{k'})^n_{n'}$$

называется *матрицей перехода* **(МП)** от старого базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к новому базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$.

Столбцы матрицы перехода представляют собой столбцы координат векторов нового базиса относительно старого базиса.

Рассмотрим матрицу

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & \ldots & c^{n'}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{1'}_n & \ldots & c^{n'}_n \end{pmatrix} = (c^{k'}_k)^{n'}_n,$$

обратную к матрице C. Умножим обе части (1) на $c^{k'}_j$ и просуммируем по k':

$$c^{k'}_j \boldsymbol{e}_{k'} = c^{k'}_j c^k_{k'} \boldsymbol{e}_k.$$

Так как $c^{k'}_j c^k_{k'} = \delta^k_j$, получаем

$$c^{k'}_j \boldsymbol{e}_{k'} = \delta^k_j \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_j$$

или, меняя индекс k' на j',

$$\boxed{\boldsymbol{e}_j = c^{j'}_j \boldsymbol{e}_{j'}, \qquad \begin{array}{c} j = 1, \ldots, n, \\ j' = 1', \ldots, n'. \end{array}} \tag{2}$$

Эта формула выражает векторы старого базиса через векторы нового базиса.

Рассмотрим матрицы-строки

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n), \quad \boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{e}_{1'},\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_{n'}),$$

состоящие из векторов старого и нового базисов, соответственно. Тогда формулы преобразования базисов можно записать в матричной форме:

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}C, \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}'C^{-1}.$$

Задача. Докажите эти формулы, используя матричную технику.

Пусть $\boldsymbol{x} \in V$. Найдем связь между координатами x^k этого вектора относительно старого базиса и его координатами $x^{k'}$ относительно нового базиса. Имеем:

$$\boldsymbol{x} = x^k \boldsymbol{e}_k = x^{k'} \boldsymbol{e}_{k'} \tag{3}$$

(здесь подразумевается суммирование по индексам k, k'!).

Подставим в (3) соотношения (1):

$$x^k \boldsymbol{e}_k = x^{k'} \boldsymbol{e}_{k'} = x^{k'} c^k_{k'} \boldsymbol{e}_k.$$

В силу единственности разложения по базису имеем

$$\boxed{x^k = c^k_{k'} x^{k'}.} \tag{4}$$

Аналогично, подставляя в (3) соотношение (2), получим

$$\boxed{x^{k'} = c^{k'}_k x^k.} \tag{5}$$

Рассмотрим столбцы координат вектора $\boldsymbol{x}$ относительно старого и нового базисов:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы (4), (5) можно записать в виде

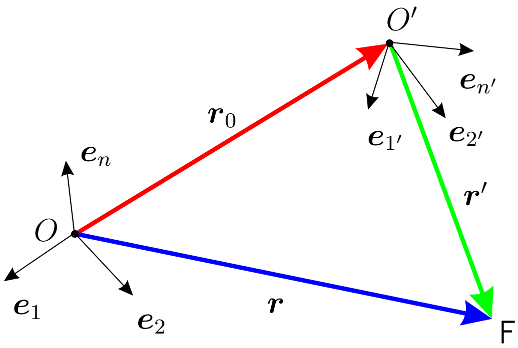
$$X = CX', \quad X' = C^{-1}X. \tag{6}$$

Задача. Докажите формулы (6), используя матричную технику.

1.2. **Преобразование координат в аффинном пространстве.** Пусть $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ и $O'\boldsymbol{e}_{1'} \ldots \boldsymbol{e}_{n'}$ — две аффинные системы координат в n-мерном аффинном пространстве $\mathcal{A}$ (старая и новая соответственно).

Пусть $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ — радиус-векторы точки M относительно старой и новой систем координат соответственно, $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор начала O' новой системы координат относительно старой системы координат. Очевидно, имеем

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'.$$



Обозначим через X столбец координат вектора $\boldsymbol{r}$ в старом базисе, через X' — столбец координат вектора $\boldsymbol{r}'$ в новом базисе, через X_0 — столбец координат вектора $\boldsymbol{r}_0$ в старом базисе. Тогда

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{E}X, \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{E}'X', \quad \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{E}X_0.$$

Отметим, что рассматривать координаты вектора $\boldsymbol{r}$ в новом базисе (равно как и координаты $\boldsymbol{r}'$ в старом базисе) большого смысла не имеет.

Поскольку $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'$, получаем

$$\boldsymbol{E}X = \boldsymbol{E}X_0 + \boldsymbol{E}'X',$$

и, используя соотношение $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}C$, где C — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$, запишем

$$\boldsymbol{E}X = \boldsymbol{E}X_0 + \boldsymbol{E}CX',$$

так что

$$X = X_0 + CX'$$

в силу единственности разложения по базису.

Нетрудно получить формулы обратного перехода:

$$CX' = X - X_0 \iff X' = C^{-1}X - C^{-1}X_0$$

так что

$$X' = C^{-1}X - X_0',$$

где X_0' — координаты вектора $\boldsymbol{r}_0$ в новом базисе.

Задача. Объясните геометрический смысл знака минус в последнем выражении.

Задача. Получите приведенные формулы, используя координатно-индексные обозначения.

1.3. **Преобразование ортонормированных базисов.** Пусть E — евклидово линейное пространство, $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{e}_{1'}, \dots, \boldsymbol{e}_{n'}$ — два ортонормированных базиса в нем (старый и новый соответственно), C — матрица перехода от старого базиса к новому:

$$\boldsymbol{e}_{k'} = c^k_{k'}\boldsymbol{e}_k, \quad \boldsymbol{e}_k = c^{k'}_k \boldsymbol{e}'_{k'}, \quad k = 1, \dots, n, \quad k' = 1', \dots, n'.$$

В матричной форме формулы замены базиса имеют вид

$$\boldsymbol{E}' = C\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} = C^{-1}\boldsymbol{E}'.$$

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому называется ортогональной матрицей. Установим свойства ортогональных матриц.

Рассмотрим скалярное произведение $(\boldsymbol{e}_{k'}, \boldsymbol{e}_{l'})$:

$$\delta_{k'l'} = (\boldsymbol{e}_{k'}, \boldsymbol{e}_{l'}) = (c^k_{k'}\boldsymbol{e}_k, c^l_{l'}\boldsymbol{e}_l) =$$

$$= c^k_{k'}c^l_{l'} \underbrace{(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l)}_{=\delta_{kl}} = c^k_{k'}c^l_{l'}\delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n} c^k_{k'}c^k_{l'},$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} c^k_{k'}c^k_{l'} = \delta_{k'l'}.$$

Аналогично получаем соотношение

$$\sum_{k'=1'}^{n'} c^k_{k'}c^l_{k'} = \delta_{kl}.$$

Полученные соотношения называются соотношениями ортогональности: строки (столбцы) ортогональной матрицы, рассматриваемые как векторы евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, попарно ортогональны и имеют единичную длину.

В матричной форме соотношения ортогональности получаются следующим образом. Введем обозначение

$$(\boldsymbol{E}^T, \boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} \cdot (\boldsymbol{e}_1 \ \dots \ \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & \dots & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n) \\ (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & \dots & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_2) & \dots & (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix},$$

Поскольку

$$(\boldsymbol{E}^T, \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{E}'^T, \boldsymbol{E}') = I,$$

имеем:

$$I = \boldsymbol{E}'^T \boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{E}C)^T (\boldsymbol{E}C) = C^T \underbrace{\boldsymbol{E}^T \boldsymbol{E}}_{=I} C = C^T C,$$

так что окончательно

$$C^T C = I.$$

Из этого соотношения легко получаем

$$CC^T = I, \quad C^{-1} = C^T.$$

Пользуясь теоремой об определителе произведения матриц, получаем

$$\det(C^T C) = \det C^T \cdot \det C = (\det C)^2 = 1,$$

откуда

$$\det C = \pm 1.$$

Ортогональные матрицы с определителем $+1$ называются собственными, с определителем -1 — несобственными. Геометрический смысл преобразования, задаваемого собственной ортогональной матрицей — вращение.

Задача. Выясните геометрический смысл преобразования, задаваемого несобственной ортогональной матрицей.

Преобразования координат относительно ОНБ получаются весьма простыми в силу того, что для ортогональной матрицы $C^{-1} = C^T$: если для произвольной пары базисов

$$X = CX' \iff X' = C^{-1} X,$$

то для пары ортонормированных базисов

$$X' = C^T X.$$

Получим общий вид ортогональной матрицы порядка 2:

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Подставляя эту матрицу в уравнение $C^T C = I$, находим

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

Первые два уравнения допускают решения

$$a = \cos\varphi, \quad c = \sin\varphi, \quad b = \cos\theta, \quad d = \sin\theta.$$

Подставляя это в третье уравнение, находим

$$\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta = 0 \iff \cos(\theta - \varphi) = 0$$
$$\iff \theta = \varphi + \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

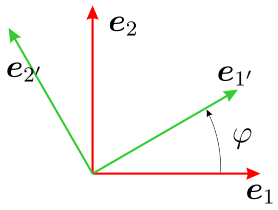
Поэтому

$$b = \cos\theta = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -(-1)^k \sin\varphi = \mp\sin\varphi,$$
$$d = \sin\theta = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2} + \pi k\right) = (-1)^k \cos\varphi = \pm\cos\varphi.$$

Итак,

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \mp\sin\varphi \\ \sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

При выборе верхнего знака получается собственная ортогональная матрица, при выборе нижнего — несобственная. Видим, что любая ортогональная матрица порядка 2 вполне определяется одним параметром φ, геометрический смысл которого — угол поворота.



2. Кривые второго порядка (квадрики)

2.1. **Постановка задачи.** Кривая, задаваемая в декартовой системе координат уравнением вида

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ — многочлен степени n от переменных x, y, называется кривой порядка n.

Эллипс, гипербола и парабола представляют собой кривые второго порядка (квадрики).

Пусть $F(x, y)$ — произвольный многочлен второй степени:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c.$$

Наша задача — выяснить, какие кривые могут быть заданы уравнением $F(x, y) = 0$.

Введем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_{12} = a_{21}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение квадрики можно записать в виде

$$X^T AX + 2BX + c = 0. \tag{7}$$

Задача состоит в том, чтобы найти систему координат, в которой уравнение квадрики имеет наиболее простой вид, не содержащий слагаемого $2a_{12}xy$ и (по возможности) линейных членов $2b_1x + 2b_2y$.

2.2. **Преобразование уравнения при повороте.** Выясним, как изменится уравнение (7) при повороте системы координат. Пусть матрица перехода от исходного базиса к повернутому имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix};$$

здесь φ — угол поворота.

Координаты точки относительно старой (X) и новой (X') систем координат связаны соотношением

$$X = RX'.$$

Поставляя это соотношение в уравнение (7), получим

$$(RX')^T X(RX') + 2B(RX') + c = 0 \iff$$

$$\iff X'^T(R^T AR)X' + 2(BR)X' + c = 0.$$

Вводя обозначения

$$A' = R^T AR, \quad B' = BR, \quad c' = c, \tag{8}$$

видим, что уравнение сохраняет свой вид:

$$X'^T A'X' + 2B'X' + c' = 0,$$

а коэффициенты уравнения преобразуются по формулам (8).

2.3. **Преобразование уравнения при переносе начала координат.** Пусть новая система координат получена из старой сдвигом начала координат на вектор $\boldsymbol{r}_0$, имеющий столбец координат X_0. Тогда старые и новые координаты связаны соотношением

$$X = X' + X_0.$$

Поставляя это соотношение в уравнение (7), получим

$$(X' + X_0)^T A(X' + X_0) + 2B(X' + X_0) + c = 0 \iff$$

$$X'^T AX' + X'^T AX_0 + X_0^T AX' + X_0^T AX_0 + 2BX' + 2BX_0 + c = 0.$$

Поскольку $A^T = A$, имеем

$$X'^T AX_0 = (X'^T AX_0)^T = X_0^T A^T X' = X_0^T AX',$$

так что уравнение принимает вид

$$X'^T AX' + 2BX' + 2X_0^T AX' + X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c = 0.$$

Вводя обозначения

$$A' = A, \quad B' = B + X_0^T A, \quad c' = X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c, \tag{9}$$

видим, что при переносе начала системы координат уравнение сохраняет свой вид:

$$X'^T A'X' + 2B'X' + c' = 0,$$

а коэффициенты уравнения преобразуются по формулам (9). Отметим, что коэффициенты старших членов уравнения при переносе не изменяются.

2.4. **Уничтожение членов вида $2a_{12}xy$ с помощью поворота.** Попытаемся подобрать поворот таким образом, чтобы слагаемое вида $2a_{12}xy$ в преобразованном уравнении исчезло, т.е. чтобы матрица A' уравнения, отнесенного к новой системе координат, была диагональной:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Согласно (8)

$$A' = R^T AR \iff A' = R^{-1}AR \iff RA' = AR. \tag{10}$$

По теореме о произведении определителей

$$\det A' = \det(R^{-1}AR) = \det R^{-1} \cdot \det A \cdot \det R = \det A.$$

Поскольку $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, имеем

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(R^{-1}AR) = \operatorname{tr}(RR^{-1}A) = \operatorname{tr} A.$$

Задача. Докажите, что $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. [Указание: напишите выражение для элементов матриц $C = AB$ и $D = BA$ и вычислите $\operatorname{tr} C = \sum\limits_i c_{ii}$ и $\operatorname{tr} D = \sum\limits_i d_{ii}$.]

Таким образом, определитель и след матрицы A не меняются при повороте системы координат. Отметим, что при переносе начала координат не изменяется сама матрица A. Итак, $\det A$ и $\operatorname{tr} A$ являются инвариантами уравнения (7) относительно поворотов и сдвигов; обозначим их

$$\operatorname{tr} A = S, \quad \det A = \delta.$$

Замечание. Заметим, что при повороте не изменяется также свободный член уравнения (см. формулы (8)).

Для матрицы

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

получаем:

$$\det A' = \lambda_1\lambda_2 = \det A = \delta, \quad \operatorname{tr} A' = \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = S.$$

Таким образом, λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0, \tag{11}$$

называемого характеристическим уравнением. Многочлен $\lambda^2 - S\lambda + \delta$ называется характеристическим многочленом квадрики (а также матрицы A).

Характеристическое уравнение всегда имеет вещественные корни, поскольку его дискриминант

$$D = S^2 - 4\delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0.$$

Векторы нового (повернутого) базиса имеют относительно старого базиса координаты

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix};$$

эти столбцы являются столбцами матрицы поворота R: $R = [R_1, R_2]$.

Поскольку должно выполняться соотношение (10), имеем:

$$AR = RA' \iff A[R_1, R_2] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos\varphi & -\lambda_2 \sin\varphi \\ \lambda_1 \sin\varphi & \lambda_2 \cos\varphi \end{pmatrix} = [\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2],$$

так что

$$AR_1 = \lambda_1 R_1, \quad AR_2 = \lambda_2 R_2.$$

Эти уравнения можно переписать в виде

$$(A - \lambda_1 I)R_1 = 0, \quad (A - \lambda_2 I)R_2 = 0,$$

где I — единичная матрица. Таким образом, R_1 и R_2 являются решениями однородных систем линейных уравнений, которые имеют нетривиальные решения лишь в случае

$$\det(A - \lambda_1 I) = 0, \quad \det(A - \lambda_2 I) = 0.$$

Проверим, что эти соотношения выполняются.

$$\det(A - \lambda_1 I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} - \lambda_1)(a_{22} - \lambda_1) - a_{12}a_{21} =$$

$$= \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{=\delta} - \lambda_1(\underbrace{a_{11} + a_{22}}_{=S}) + \lambda_1^2 =$$

$$= \delta - S\lambda_1 + \lambda_1^2;$$

это выражение равно нулю, поскольку λ_1 является корнем характеристического многочлена (см. (11)); для λ_2 проверка аналогична.

Нетрудно найти выражение для угла поворота φ:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Задача. Докажите самостоятельно.

Итак, для уничтожения слагаемого $2a_{12}xy$ в уравнении квадрики (7) необходимо от исходного ОНБ перейти к новому ОНБ, векторы которого являются решениями ОСЛУ

$$(A - \lambda_k I)R_k = 0, \quad k = 1, 2,$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

(Отметим, что найденные векторы R_1, R_2 необходимо нормировать!)

Матрица поворота (перехода к новому базису)

$$R = [R_1, R_2].$$

В новой системе координат

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B' = BR, \quad c' = c.$$

Уравнение имеет прежний вид

$$X'^T A' X' + 2B' X' + c' = 0,$$

но группа старших членов уравнения теперь не содержит перекрестных членов:

$$X'^T A X' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

2.5. **Уничтожение линейных членов с помощью переноса.** Попытаемся теперь подобрать перенос таким образом, чтобы уничтожить линейные слагаемые, т.е. в преобразованном уравнении $B'' = O$ (O — нулевая матрица). Поскольку коэффициенты линейных слагаемых уравнения (7) при переносе преобразуются по формулам (9), получаем:

$$B'' = X_0'^T A' + B' = O \iff A' X_0' = -B'^T$$

(использован тот факт, что $A'^T = A'$).

Используя соотношения (8), найдем

$$(R^T A R)(R^T X_0) = -(BR)^T \iff R^T A X_0 = -R^T B^T \iff$$

$$\iff AX_0 = -B^T.$$

Последнее уравнение позволяет определить координаты X_0 вектора сдвига относительно исходной системы координат. Однако оно не всегда разрешимо, так что уничтожение линейных слагаемых в уравнении (7) возможно не во всех случаях.

2.6. **Классификация.**

Случай I. $\delta = \det A \neq 0$. В этом случае

$$X_0 = -A^{-1} B^T,$$

вектор переноса однозначно определен, так что возможно уничтожение как перекрестных, так и линейных членов. После поворота и сдвига системы координат уравнение принимает вид

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \gamma = 0.$$

Ясно, что начало новой системы координат является центром симметрии кривой; по этой причине квадрики с $\delta \neq 0$ называются центральными.

I.1. Эллиптический тип. Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения имеют один знак, т.е. $\delta = \det A > 0$.

I.1.a. $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1\gamma < 0$. Уравнение приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

и определяет эллипс.

I.1.b. $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1\gamma = 0$. Уравнение приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0.$$

Уравнение имеет единственное вещественное решение $x = y = 0$, однако в поле комплексных чисел оно может быть записано в виде

$$\left(\frac{x''}{a} + i\frac{y''}{b}\right)\left(\frac{x''}{a} - i\frac{y''}{b}\right) = 0.$$

Это уравнение называют уравнением пары мнимых пересекающихся прямых

$$\frac{x''}{a} + i\frac{y''}{b} = 0, \quad \frac{x''}{a} - i\frac{y''}{b} = 0.$$

I.1.c. $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1\gamma > 0$. Уравнение приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1$$

и называется уравнением мнимого эллипса. Мнимый эллипс не содержит ни одной вещественной точки.

I.2. Гиперболический тип. Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения имеют разные знаки, т.е. $\delta = \det A < 0$.

I.2.a. $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $\gamma \neq 0$. Уравнение приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

и определяет гиперболу.

I.2.b. $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $\gamma = 0$. Уравнение приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0.$$

Записывая уравнение в виде

$$\left(\frac{x''}{a} + \frac{y''}{b}\right)\left(\frac{x''}{a} - \frac{y''}{b}\right) = 0,$$

обнаруживаем, что оно определяет пару пересекающихся прямых

$$\frac{x''}{a} + \frac{y''}{b} = 0, \quad \frac{x''}{a} - \frac{y''}{b} = 0.$$

Случай II. $\delta = \det A = 0$, так что один из корней характеристического уравнения равен нулю; будем считать, что $\lambda_1 = 0$. В этом случае уравнение

$$AX_0 = -B^T \tag{12}$$

либо несовместно, либо имеет бесконечно много решений. Соответствующие квадрики называются нецентральными, или квадрики параболического типа. Такая квадрика либо не имеет центра симметрии, либо имеет их бесконечно много (все центры симметрии заполняют прямую).

Уравнение (7) после поворота системы координат принимает вид

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1'x' + 2b_2'y' + c = 0.$$

Слагаемое $2b_2'y'$ может быть уничтожено с помощью процедуры выделения полного квадрата:

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_2'y' = \lambda_2\left(y' + \frac{b_2'}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{b_2'^2}{\lambda_2},$$

так что получим

$$\lambda_2 y''^2 + 2b_1'x' + \gamma = 0, \tag{13}$$

где

$$y'' = y' + \frac{b_2'}{\lambda_2}, \quad \gamma = c - \frac{b_2'^2}{\lambda_2}.$$

Случай II.1. Уравнение (12) несовместно. Это возможно, когда

$$\operatorname{rk} A \neq \operatorname{rk}[A, -B^T] \iff \operatorname{rk} A' \neq \operatorname{rk}[A', -B'^T]$$

$$\iff \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b_1' \\ 0 & \lambda_2 & -b_2' \end{pmatrix}$$

т.е. при $b_1' \neq 0$. Уравнение (13) с помощью сдвига приводится к виду

$$y''^2 = 2px'',$$

т.е. определяет параболу.

Случай II.2. Уравнение (12) имеет бесконечно много решений. Это возможно, когда

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}[A, -B^T] \iff \operatorname{rk} A' = \operatorname{rk}[A', -B'^T]$$

$$\iff \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b_1' \\ 0 & \lambda_2 & -b_2' \end{pmatrix}$$

т.е. при $b_1' = 0$. Уравнение (13) приводится к виду

$$y''^2 = \gamma',$$

т.е. определяет, в зависимости от знака γ',

II.2.a. пару параллельных прямых

$$y''^2 = a^2,$$

II.2.b. пару мнимых параллельных прямых

$$y''^2 = -a^2,$$

II.2.c. пару совпадающих прямых

$$y''^2 = 0.$$

2.7. **Примеры.**

Пример.

Привести к каноническому виду уравнение квадрики

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Для данной квадрики

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -7 \end{pmatrix}, \quad c = -13.$$

Характеристический многочлен имеет вид

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -16 - 6\lambda + \lambda^2,$$

его корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$.

Найдем вектор сдвига:

$$AX_0 = -B^T \iff \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix},$$

так что

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, начало новой системы координат находится в точке $O'(2, -1)$.

Найдем свободный член уравнения после преобразований поворота и сдвига:

$$c' = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 13 = -8.$$

Таким образом, уравнение может быть записано в одной из двух возможных форм:

$$-2x'^2 + 8y'^2 - 8 = 0 \quad \text{или} \quad 8x'^2 - 2y'^2 - 8 = 0.$$

Перенося свободный член второго из этих уравнений в правую часть равенства и деля на него, получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Базисные векторы новой системы координат нужно выбирать так, чтобы первый из них соответствовал λ_2, а второй — λ_1.

Для $\lambda_2 = 8$ имеем

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix},$$

так что для нахождения первого базисного вектора получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

нормированное решение которой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для $\lambda_1 = -2$ находим

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$

второй базисный вектор удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

так что

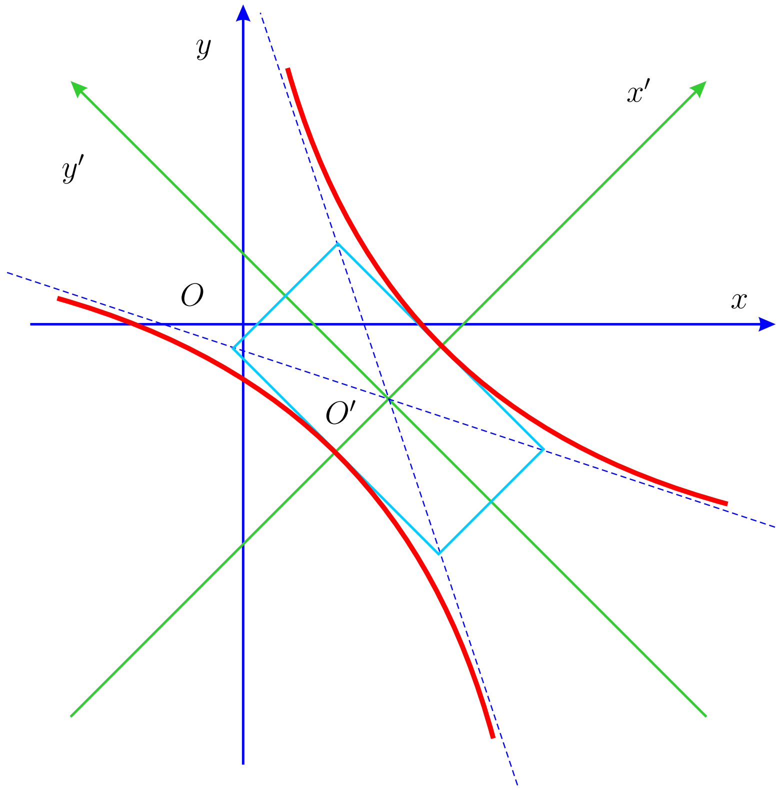
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что выбирать векторы нового базиса следует так, чтобы ориентация плоскости сохранялась.

Матрица поворота

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет определитель $\det R = 1$, так что ориентация плоскости сохранена. Поскольку $\cos\varphi = \sin\varphi = 1/\sqrt{2}$, угол поворота системы координат $\varphi = \pi/4$.



Пример.

Привести к каноническому виду уравнение квадрики

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$$

Для данной квадрики

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 & 55 \end{pmatrix}, \quad c = -50.$$

Корни характеристического многочлена

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 9-\lambda & -12 \\ -12 & 16-\lambda \end{pmatrix} = -25\lambda + \lambda^2$$

равны $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25$, т.е. мы имеем квадрику параболического типа.

Найдем векторы повернутого базиса. При $\lambda_1 = 0$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix},$$

и нормированное решение однородной системы с этой матрицей

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 25$

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix},$$

и нормированное решение однородной системы с этой матрицей

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица поворота равна

$$R = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем уравнение квадрики в системе координат $Ox'y'$, связанной с повернутым базисом; для этого нужно вычислить B':

$$B' = BR = \begin{pmatrix} -10 & 55 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 50 \end{pmatrix}.$$

Уравнение квадрики в системе координат $Ox'y'$ принимает вид

$$25y'^2 + 50x' + 100y' - 50 = 0 \iff y'^2 + 2x' + 4y' - 2 = 0;$$

легко видеть, что это уравнение описывает параболу. Однако коэффициенты при y'^2 и x' имеют одинаковый знак, поэтому получить каноническое уравнение параболы не удастся.

Изменим выбор матрицы поворота:

$$R_1 = -R = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

это соответствует дополнительному повороту на $180°$. В этом случае

$$B' = BR_1 = \begin{pmatrix} -10 & 55 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (-25, -50).$$

Уравнение квадрики в повернутой системе координат принимает вид

$$25y'^2 - 50x' - 100y' - 50 = 0, \iff y'^2 - 2x' - 4y' - 2 = 0.$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$(y' - 2)^2 = 2(x' + 3).$$

Полагая

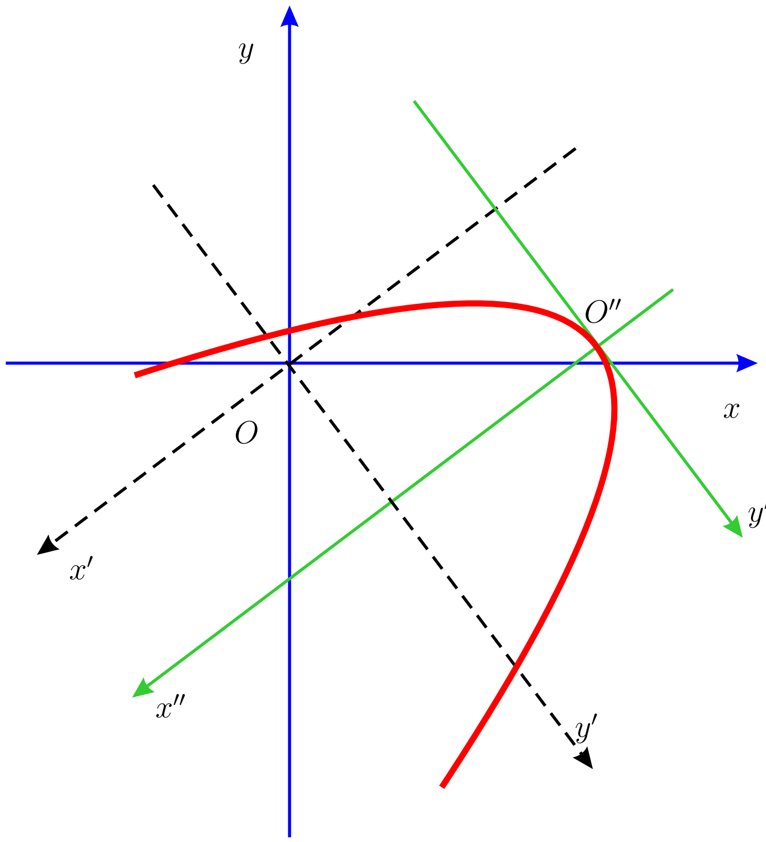
$$\begin{cases} x'' = x' + 3, \\ y'' = y' - 2, \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x'' - 3, \\ y' = y'' + 2, \end{cases}$$

т.е. выполняя перенос начала координат в точку O'' с координатами $(-3, 2)$ (относительно повернутой системы координат), получим каноническое уравнение параболы

$$y'' = 2x''.$$

Вычислим координаты точки O'' относительно исходной системы координат Oxy (см. (6)):

$$O'' = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$



2.8. **Инварианты квадрик.** Выше было доказано, что

$$S = \operatorname{tr} A, \quad \delta = \det A$$

инвариантны относительно поворотов и сдвигов системы координат, а свободный член уравнения квадрики (7) инвариантен относительно поворотов. Уравнение квадрики обладает и другими инвариантами.

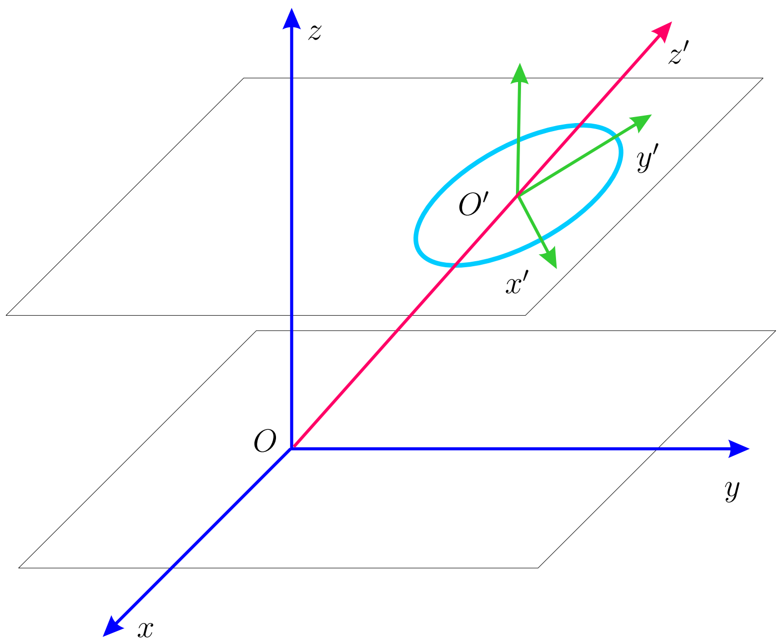
Введем матрицы

$$D = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & c \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array}\right), \quad Z = \begin{pmatrix} X \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнение

$$Z^T D Z = 0 \iff X^T A X + 2BXz + cz^2 = 0. \tag{14}$$

Если Z — решение этого уравнения, то αZ, $\alpha \in \mathbb{R}$ также является решением, т.е. уравнение определяет в пространстве коническую поверхность с вершиной в начале координат. При $z = 1$ уравнение (14) превращается в уравнение квадрики (7), т.е. кривая является сечением конуса плоскостью $z = 1$.



Преобразования поворота и сдвига

$$X = RX' + X_0$$

можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} R & X_0 \\ O & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица D в уравнении (14) после поворота и сдвига принимает вид

$$D' = P^T DP,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} R & X_0 \\ O & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Поскольку

$$\det P = \det \begin{pmatrix} R & X_0 \\ O & 1 \end{pmatrix} = \det R = 1,$$

с помощью теоремы об определителе произведения матриц получаем

$$\det D' = \det D,$$

т.е. $\det D$ инвариантен относительно поворотов и сдвигов систем координат. Этот инвариант обозначают

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}.$$

Инварианты квадрик позволяют получить каноническое уравнение квадрики без нахождения преобразования системы координат.

Пусть дано уравнение квадрики (7); вычислим величины

$$S = \operatorname{tr} A, \quad \delta = \det A, \quad \Delta = \det D.$$

Центральные квадрики: $\delta \neq 0$**.** В центральном случае уравнение квадрики приводится к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \gamma = 0.$$

Этому уравнению отвечает матрица

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = S, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \delta, \quad \lambda_1 \lambda_2 \gamma = \Delta.$$

Поэтому λ_1, λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0,$$

причем $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Вырожденный центральный случай $\Delta = 0$**.** Получаем $\gamma = 0$, т.е. уравнение квадрики принимает вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0.$$

Если λ_1 и λ_2 одного знака, т.е. $\delta > 0$, получаем каноническое уравнение

$$\frac{x'^2}{|\lambda_2|} + \frac{y'^2}{|\lambda_1|} = 0.$$

Если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, т.е. $\delta > 0$, положив $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, получаем каноническое уравнение

$$\frac{x'^2}{\lambda_2} - \frac{y'^2}{|\lambda_1|} = 0.$$

Невырожденный центральный случай $\Delta \neq 0$**.** Получаем

$$\gamma = \frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\Delta}{\delta},$$

т.е. уравнение квадрики преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \iff \frac{x'^2}{-\Delta/\delta\lambda_1} + \frac{y'^2}{-\Delta/\delta\lambda_2} = 1.$$

Эллиптический случай ($\delta > 0$, т.е. λ_1 и λ_2 одного знака):

(1) если $\Delta\lambda_1 < 0$, получаем каноническое уравнение эллипса;
(2) если $\Delta\lambda_1 > 0$, получаем каноническое уравнение мнимого эллипса.

В гиперболическом случае ($\delta < 0$, т.е. λ_1 и λ_2 разных знаков) уравнение

$$\frac{x'^2}{-\Delta/\delta\lambda_1} + \frac{y'^2}{-\Delta/\delta\lambda_2} = 1,$$

приводится к каноническому уравнению гиперболы, если выбрать λ_1 того же знака, что Δ; тогда

$$-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \quad -\frac{\Delta}{\delta\lambda_2} < 0.$$

Нецентральные квадрики: $\delta = 0$, т.е. один из корней характеристического уравнения равен нулю; положим $\lambda_1 = 0$. Уравнение можно привести либо к виду

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1' x' = 0, \quad b_1' \neq 0$$

(невырожденная параболическая квадрика — парабола), либо к виду

$$\lambda_2 y'^2 + \gamma = 0$$

(вырожденные параболические квадрики — пара вещественных или мнимых параллельных прямых или пара совпавших прямых).

В случае параболы уравнение имеет матрицу коэффициентов

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так что

$$\lambda_2 = S, \quad -b_1'^2\lambda_2 = \Delta,$$

откуда

$$b'_1 = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}.$$

Выбрав знак b'_1 противоположным знаку λ_2, получаем уравнение параболы в каноническом виде

$$y''^2 = 2px'',$$

где

$$p = \frac{1}{|\lambda_2|}\sqrt{-\frac{\Delta}{S}} = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}.$$

В случае пары прямых матрица коэффициентов уравнения

$$D'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$S = \lambda_2, \quad \delta = \Delta = 0;$$

имеющиеся инварианты не позволяют получить каноническое уравнение квадрики.

2.9. **Семиинвариант K вырожденных параболических квадрик.** Рассмотрим характеристический многочлен матрицы D:

$$f_D(\lambda) = \det(D - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} A - \lambda I & B^T \\ B & c - \lambda \end{pmatrix}$$

(обратите внимание, что I в одном случае обозначает единичную матрицу порядка 3, а в другом — порядка 2).

При преобразовании координат матрица D превращается в матрицу

$$D' = P^T D P, \quad P = \begin{pmatrix} R & X_0 \\ O & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае поворота без сдвига матрица преобразования

$$P = \begin{pmatrix} R & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

ортогональна, т.е. $P^T = P^{-1}$, поэтому характеристический многочлен матрицы D' совпадает с характеристическим многочленом матрицы D:

$$
\begin{gathered}
f_{D'}(\lambda)=\det(D'-\lambda I)=\det(P^TDP-\lambda I)=\\
=\det(P^{-1}DP-\lambda P^{-1}P)=\det(P^{-1}(D-\lambda I)P)=\\
=\det P^{-1}\det(D-\lambda I)\det P=\det(D-\lambda I)=f_D(\lambda).
\end{gathered}
$$

Итак, коэффициенты характеристического многочлена матрицы D инвариантны относительно поворотов.

Запишем развернутое выражение для $f_D(\lambda)$:

$$
f_D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & b_2\\ b_1 & b_2 & c-\lambda\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & b_2\\ b_1 & b_2 & c-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \lambda & a_{12} & b_1\\ 0 & a_{22}-\lambda & b_2\\ 0 & b_2 & c-\lambda\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & b_1\\ a_{21} & \lambda & b_2\\ b_1 & 0 & c-\lambda\end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & b_2\\ b_2 & c-\lambda\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ b_1 & b_2 & \lambda\end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ b_1 & c-\lambda\end{vmatrix}-
$$

$$
-\lambda\left[\begin{vmatrix} a_{22} & b_2\\ b_2 & c-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \lambda & b_2\\ 0 & c-\lambda\end{vmatrix}\right]=
$$

$$
=\Delta-\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}-\lambda\left[\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ b_1 & c\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & 0\\ b_1 & \lambda\end{vmatrix}\right]-
$$

$$
-\lambda\left[\begin{vmatrix} a_{22} & b_2\\ b_2 & c\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{22} & 0\\ b_2 & \lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \lambda & b_2\\ 0 & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{vmatrix}\right]=
$$

$$
=\Delta-\lambda\left[\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ b_1 & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & b_2\\ b_2 & c\end{vmatrix}\right]+\lambda^2\left(a_{11}+a_{22}+c\right)-\lambda^3=
$$

$$
=\Delta-\left[\delta+\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ b_1 & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & b_2\\ b_2 & c\end{vmatrix}}_{=K}\right]\lambda+S\lambda^2-\lambda^3.
$$

Поскольку S, δ и Δ инвариантны относительно поворотов (а также и сдвигов!), заключаем, что

$$
K=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ b_1 & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & b_2\\ b_2 & c\end{vmatrix}
$$

— инвариант относительно поворотов. Имеется еще одна величина, инвариантная относительно поворотов — свободный член c уравнения; c и K называются семиинвариантами (полуинвариантами).

Докажем, что K является инвариантом также и относительно сдвигов в случае $\delta=\Delta=0$.

Поскольку K — инвариант относительно поворотов, можем считать, что в уравнении квадрики мы с помощью поворота уже добились того, что $a_{12} = 0$. В этом случае

$$\delta = a_{11}a_{22} - a_{12} = a_{11}a_{22} = 0.$$

Будем считать, что $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, т.е.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix},$$

так что $\Delta = -b_1^2 a_{22}$. Поскольку по условию $\Delta = 0$, получаем $b_1 = 0$. Уравнение квадрики принимает вид

$$F(x, y) = a_{22}y^2 + 2b_2y + c = 0.$$

Рассмотрим сдвиг

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0.$$

В сдвинутой системе координат

$$F'(x', y') = a_{22}(y' + y_0)^2 + 2b_2(y' + y_0) + c =$$

$$= a_{22}y'^2 + 2(a_{22}y_0 + b_2)y' + (a_{22}y_0^2 + 2b_2y_0 + c),$$

т.е.

$$a'_{22} = a_{22}, \quad b'_2 = a_{22}y_0 + b_2, \quad c' = a_{22}y_0^2 + 2b_2y_0 + c$$

и, следовательно,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & b_2 \\ 0 & b_2 & c \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & b'_2 \\ 0 & b'_2 & c' \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$K = a_{22}c - b_2^2, \quad K' = a'_{22}c' - b_2'^2.$$

Имеем

$$K' = a'_{22}c' - b_2'^2 = a_{22}(a_{22}y_0^2 + 2b_2y_0 + c) - (a_{22}y_0 + b_2)^2 = a_{22}c - b_2^2 = K,$$

что и требовалось доказать.

Закончим рассмотрение параболического случая, когда $\delta = \Delta = 0$. В этом случае уравнение квадрики

$$\lambda_2 y'^2 + \gamma = 0$$

имеет матрицу коэффициентов

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

так что

$$S = \lambda_2, \quad K = \lambda_2\gamma.$$

Каноническое уравнение получаем в виде

$$y'^2 = -\frac{\gamma}{\lambda_2},$$

т.е.

$$y'^2 = -\frac{K}{S^2}.$$

Классификация квадрик

1.	Эллипс	$\delta > 0, \quad S\Delta < 0$
2.	Мнимый эллипс	$\delta > 0, \quad S\Delta > 0$
3.	Пара мнимых пересек. прямых	$\delta > 0, \quad \Delta = 0$
4.	Гипербола	$\delta < 0, \quad \Delta \neq 0$
5.	Пара пересекающихся прямых	$\delta < 0, \quad \Delta = 0$
6.	Парабола	$\delta = 0, \quad \Delta \neq 0$
7.	Пара параллельных прямых	$\delta = \Delta = 0, \quad K < 0$
8.	Пара мнимых параллельных прямых	$\delta = \Delta = 0, \quad K > 0$
9.	Пара совпадающих прямых	$\delta = \Delta = 0, \quad K = 0$

Пример.

Получить каноническое уравнение квадрики

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$$

с помощью инвариантов.

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \\ 8 & 6 & -36 \end{pmatrix},$$

так что

$$S = \operatorname{tr} A = 3, \quad \delta = \det A = -4, \quad \Delta = \det D = 144.$$

Это невырожденная гиперболическая квадрика, т.е. гипербола. В канонической системе координат

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

поэтому

$$S = \lambda_1 + \lambda_2 = 3, \quad \delta = \lambda_1\lambda_2 = -4, \quad \Delta = \lambda_1\lambda_2\gamma = 144.$$

Отсюда получаем

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \gamma = -36.$$

Уравнение квадрики имеет вид

$$4x^2 - y^2 - 36 = 0,$$

и окончательно в канонической форме

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Пример.

Получить каноническое уравнение квадрики

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$$

с помощью инвариантов.

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 6 \\ 14 & 6 & 28 \end{pmatrix}.$$

поэтому

$$S = \operatorname{tr} A = 6, \quad \delta = \det A = -16, \quad \Delta = \det D = 0.$$

Это вырожденный гиперболический случай, квадрика представляет собой пару пересекающихся прямых. В канонической системе координат

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

так что

$$S = \lambda_1 + \lambda_2 = 6, \quad \delta = \lambda_1\lambda_2 = -16, \quad \Delta = \lambda_1\lambda_2\gamma = 0.$$

Отсюда получаем

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 8, \quad \gamma = 0.$$

Уравнение квадрики имеет вид

$$8x^2 - 2y^2 = 0 \iff 4x^2 - y^2 = 0.$$

Пример.

Получить каноническое уравнение квадрики

$$19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$$

с помощью инвариантов.

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 19 & 3 & 19 \\ 3 & 11 & 3 \\ 19 & 3 & 29 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$S = \operatorname{tr} A = 30, \quad \delta = \det A = 200, \quad \Delta = \det D = 2000.$$

Это невырожденный эллиптический случай. В канонической системе координат

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

так что

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 30, \quad \lambda_1\lambda_2 = 200, \quad \lambda_1\lambda_2\gamma = 2000.$$

Отсюда получаем

$$\lambda_1 = 20, \quad \lambda_2 = 10, \quad \gamma = 10.$$

Уравнение квадрики имеет вид

$$20x^2 + 10y^2 + 10 = 0 \iff 2x^2 + y^2 = -1.$$

Пример.

Получить каноническое уравнение квадрики

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$$

с помощью инвариантов.

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 12 & -9 \\ 12 & 16 & 113 \\ -9 & 113 & 209 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$S = \operatorname{tr} A = 25, \quad \delta = \det A = 0, \quad \Delta = \det D = -140\,625.$$

Это невырожденный параболический случай. В канонической системе координат

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так что

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 25, \quad \lambda_1\lambda_2 = 0, \quad -b_1^2\lambda_2 = -140\,625.$$

Отсюда получаем

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 25, \quad b_1 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}} = \pm 75.$$

Для того чтобы получить каноническое уравнение параболы, нужно взять $b_1 = -75$; тогда

$$25y^2 - 2 \cdot 75x = 0 \iff y^2 = 6x.$$

Пример.

Получить каноническое уравнение квадрики

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$$

с помощью инвариантов.

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 16 & -12 & -80 \\ -12 & 9 & 60 \\ -80 & 60 & 425 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$S = \operatorname{tr} A = 25, \quad \delta = \det A = 0, \quad \Delta = \det D = 0.$$

Имеем вырожденный параболический случай, для которого требуется вычислить семиинвариант K:

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -80 \\ -80 & 425 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 60 \\ 60 & 425 \end{vmatrix} = 625.$$

В канонической системе координат

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

так что

$$\lambda_2 = S = 25, \quad K = \lambda_2\gamma = 625, \quad \gamma = 25.$$

Уравнение квадрики имеет вид

$$25y^2 + 25 = 0 \iff y^2 + 1 = 0.$$