

Лекция 4

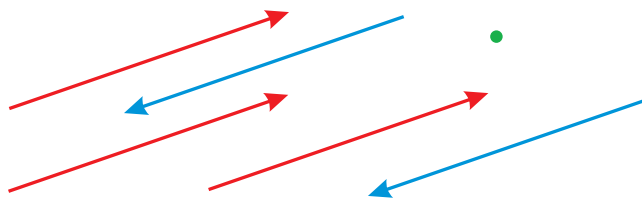
1. ВЕКТОРЫ

Вектор — направленный отрезок.

Равные векторы: имеют одинаковые длины и совпадающие направления (параллельны и направлены в одну сторону)

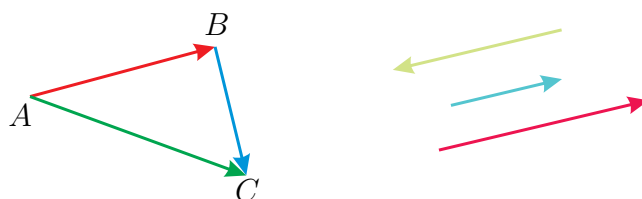
Противоположные векторы: имеют одинаковые длины и противоположные направления (параллельны и направлены в разные стороны).

Нулевой вектор: имеет нулевую длину, направление не определено, начало и конец совпадают.



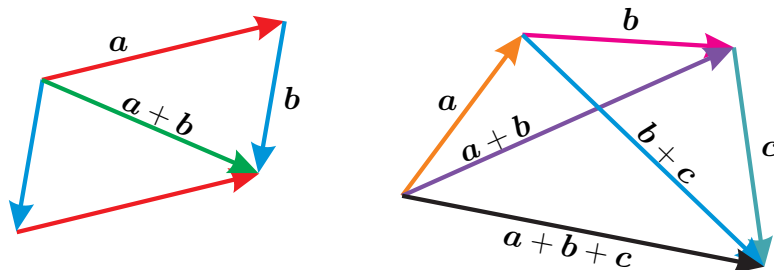
Операции над векторами: сложение и умножение на число.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$



Сложение векторов коммутативно и ассоциативно:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$



1.1. Свойства операций над векторами.

Теорема.

Сложение векторов и умножение векторов на числа обладают следующими свойствами:

(1) коммутативность сложения: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$

(2) ассоциативность сложения: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c});$$

(3) свойство нулевого вектора: $\exists \mathbf{0}$:

$$\forall \mathbf{a} : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a};$$

(4) существование противоположного вектора:

$$\forall \mathbf{a} \quad \exists \mathbf{a}' : \mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0};$$

(5) свойство единицы: $\forall \mathbf{a}$:

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$$

(6) ассоциативность умножения на число: $\forall \mathbf{a}, \forall \alpha, \beta$

$$(\alpha\beta) \mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a});$$

(7) дистрибутивность-1: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \forall \alpha$

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b};$$

(8) дистрибутивность-3: $\forall \mathbf{a}, \forall \alpha, \beta$

$$(\alpha + \beta) \mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}.$$

1.2. Коллинеарные и компланарные векторы. Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых. Если коллинеарные векторы привести к общему началу, то они окажутся лежащими на одной прямой.

Два вектора называются компланарными, если они лежат в параллельных плоскостях. Если компланарные векторы привести к общему началу, то они окажутся лежащими в одной плоскости.

Теорема.

(1) Для того, чтобы два вектора \mathbf{a}, \mathbf{b} были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа α, β , не равные одновременно нулю, что

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

(2) Для того, чтобы три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа α, β, γ не равные одновременно нулю, что

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

◀ 1. Пусть векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны; тогда один из них можно выразить через два остальных, например,

$$\mathbf{a} = x\mathbf{b} + y\mathbf{c}.$$

Мы можем положить

$$\alpha = 1, \quad \beta = -x, \quad \gamma = -y.$$

2. Пусть в равенстве

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

один из коэффициентов отличен от нуля, например, $\alpha \neq 0$. Тогда можно записать

$$\mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\mathbf{c},$$

и векторы оказываются компланарными. ▶

Теорема.

- (1) Для того, чтобы два вектора \mathbf{a}, \mathbf{b} были неколлинеарны, необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

было возможно лишь при $\alpha = \beta = 0$.

- (2) Для того, чтобы три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ были некопланарны, необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

было возможно лишь при $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

1.3. Базис и координаты вектора.

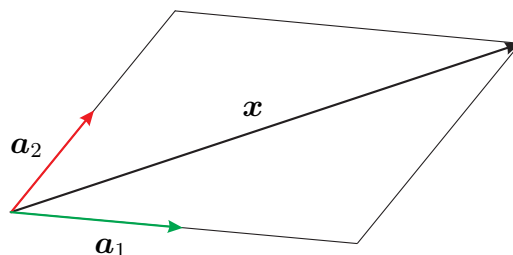
Базис на плоскости — упорядоченный набор двух неколлинеарных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

Любой вектор на плоскости можно представить в виде комбинации

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2;$$

это соотношение называется разложением вектора \mathbf{x} по базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, а числа x_1, x_2 — координатами вектора \mathbf{x} в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Координаты вектора записываем в виде столбца

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$



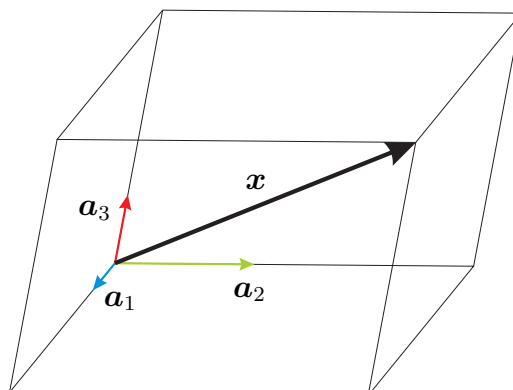
Базис в пространстве — упорядоченный набор трех некопланарных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

Любой вектор пространства можно представить в виде комбинации

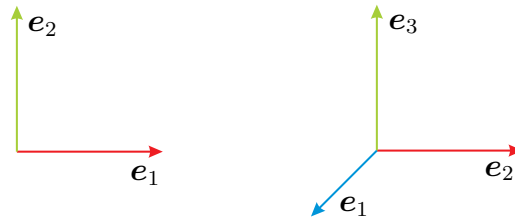
$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3;$$

это соотношение называется разложением вектора \mathbf{x} по базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, а числа x_1, x_2, x_3 — координатами вектора \mathbf{x} в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Координаты вектора записываем в виде

столбца $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.



В аналитической геометрии используются преимущественно ортонормированные базисы, т.е. базисы, состоящие из единичных попарно ортогональных векторов.



Теорема.

Разложение вектора по базису единственно, т.е. набор координат векторов в данном базисе определен однозначно.

◀ Предположим, что вектор \mathbf{x} имеет в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ два различных набора координат:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + y_3\mathbf{a}_3.$$

Вычитая второе разложение из первого, получим

$$\mathbf{0} = (x_1 - y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{a}_2 + (x_3 - y_3)\mathbf{a}_3.$$

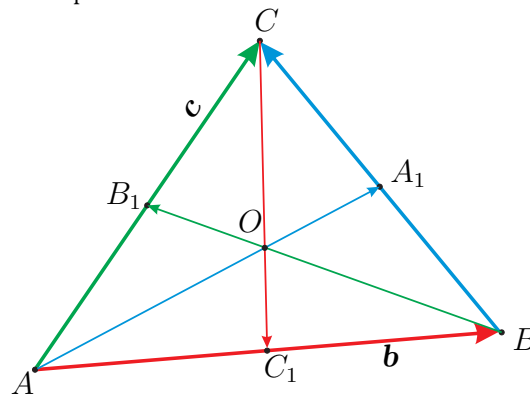
Так как векторы базиса некопланарны, то это равенство возможно лишь при нулевых коэффициентах, т.е.

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3. \quad \blacktriangleright$$

Даже этих несложных средств достаточно для решения некоторых задач.

Пример.

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.



Рассмотрим базис на плоскости, образованный векторами $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$.

Сначала докажем, что медианы AA_1 и BB_1 делятся точкой их пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины.

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \mathbf{b} + \left(\frac{1}{2}\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{b}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c};$$

$$\overrightarrow{AO} = \alpha \overrightarrow{AA_1} = \frac{\alpha}{2} \mathbf{b} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{c};$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2} \mathbf{c} - \mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{BO} = \beta \overrightarrow{BB_1} = \frac{\beta}{2} \mathbf{c} - \beta \mathbf{b}.$$

Векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BO} , \overrightarrow{AO} удовлетворяют соотношению

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO},$$

откуда

$$\mathbf{b} + \frac{\beta}{2} \mathbf{c} - \beta \mathbf{b} = \frac{\alpha}{2} \mathbf{b} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{c}.$$

Это эквивалентно равенству

$$\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \mathbf{c} = \left(1 - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) \mathbf{b}.$$

Поскольку векторы \mathbf{b} и \mathbf{c} линейно независимы, то равенство возможно лишь при нулевых значениях коэффициентов, т.е.

$$\alpha = \beta, \quad \frac{\alpha}{2} + \beta = 1.$$

Решением этой системы уравнений является

$$\alpha = \beta = \frac{2}{3},$$

что и требовалось:

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA_1}, \quad \overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AA_1}, \quad \overrightarrow{BO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BB_1}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AA_1}.$$

Теперь докажем, что медиана CC_1 также проходит через точку O и делится этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2} \mathbf{b} - \mathbf{c} = \frac{1}{2} (\mathbf{b} - 2\mathbf{c});$$

$$\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1O} = -\frac{1}{2} \mathbf{c} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \mathbf{c} - \mathbf{b}\right) = \frac{1}{3} (\mathbf{b} - 2\mathbf{c}) = \frac{2}{3} \overrightarrow{CC_1}.$$

2. Столбцы и операции над ними

2.1. Арифметическое пространство столбцов. Рассмотрим множество \mathbb{R}^n , состоящее из упорядоченных наборов n вещественных чисел, которые будем записывать в виде столбцов:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Нулевой столбец — столбец, все элементы которого нули; обозначается O .

Два столбца называются равными, если они состоят из одинакового числа элементов и попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах:

$$\text{для } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$X = Y \iff x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n.$$

Определим операции сложения столбцов и умножения столбцов на вещественные числа:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Теорема.

Операции сложения столбцов и умножения столбцов на числа обладают следующими свойствами:

(1) коммутативность сложения: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$X + Y = Y + X;$$

(2) ассоциативность сложения: $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z);$$

(3) свойство нулевого столбца:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : X + O = X;$$

(4) существование противоположного столбца:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \exists X' \in \mathbb{R}^n : X + X' = O;$$

(5) свойство единицы: $\forall X \in \mathbb{R}^n$:

$$1 \cdot X = X;$$

(6) ассоциативность умножения на число: $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha\beta) X = \alpha(\beta X);$$

(7) дистрибутивность-1: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y;$$

(8) дистрибутивность-2: $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X.$$

2.2. Линейная комбинация, линейная оболочка. Пусть даны столбцы $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Линейная комбинация — это выражение вида

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k.$$

Будем пользоваться сокращением ЛК.

ЛК называется тривиальной, если все ее коэффициенты равны нулю:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Очевидно, тривиальная ЛК любых столбцов равна нулевому столбцу.

Линейная оболочка столбцов $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$ — это множество

$$L(X_1, X_2, \dots, X_k) = \left\{ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Сокращение — ЛО.

2.3. Линейная зависимость и независимость. Тривиальная ЛК любых столбцов равна нулевому столбцу. Может ли быть равна нулевому столбцу нетривиальная ЛК, т.е. такая, в которой хотя бы один коэффициент ненулевой?

Пример.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad 2X_1 - X_2 = O.$$

Столбцы X_1, \dots, X_n называются линейно зависимыми (ЛЗ), если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевому столбцу.

Столбцы X_1, \dots, X_n называются линейно независимыми (ЛН), если равенство нулевому столбцу их ЛК возможно лишь в случае, если эта ЛК тривиальна.

Теорема.

- (1) Если в системе столбцов X_1, \dots, X_k имеется нулевой столбец, то эта система ЛЗ.
- (2) Если система столбцов X_1, \dots, X_k ЛЗ, то один из этих столбцов можно представить в виде ЛК остальных.
- (3) Если в системе столбцов $X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_r$ столбцы X_1, \dots, X_k ЛЗ, то и вся система также ЛЗ.

◀ 1. Пусть в системе столбцов X_1, \dots, X_k один столбец нулевой, например, $X_k = O$. Нетривиальная ЛК

$$0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \dots + 1 \cdot X_k$$

равна, очевидно, нулевому столбцу.

2. Пусть столбцы X_1, \dots, X_k ЛЗ; тогда существует их нетривиальная ЛК, равная нулевому столбцу:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k = O.$$

Для определенности будем считать, что $\alpha_k \neq 0$; тогда

$$X_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} X_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} X_2 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} X_{k-1},$$

что и требовалось.

3. Если подсистема X_1, \dots, X_k ЛЗ, то существует ЛК

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = O,$$

в которой имеется хотя бы один ненулевой коэффициент. Если теперь к этой ЛК добавить тривиальную ЛК столбцов X_{k+1}, \dots, X_r , то получится нетривиальная ЛК

$$\overbrace{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k}^{\text{нетривиальная ЛК}} + \underbrace{0 \cdot X_{k+1} + \dots + 0 \cdot X_r}_{\text{тривиальная ЛК}} = O,$$

что и требовалось. ►

2.4. Векторы и столбцы.

Пусть на плоскости (в пространстве) зафиксирован некоторый базис.

Тогда каждому вектору ставится единственным образом в соответствие столбец его координат.

Наоборот, если задан некоторый столбец, то существует единственный вектор, координаты которого совпадают с элементами этого столбца.

Таким образом, в случае, если базис зафиксирован, между векторами и столбцами существует взаимно однозначное соответствие

$$\mathbf{x} \leftrightarrow X.$$

Теорема.

Указанное соответствие обладает следующими свойствами: если $\mathbf{x} \leftrightarrow X$, $\mathbf{y} \leftrightarrow Y$, то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \leftrightarrow X + Y, \quad \alpha \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha X.$$

Такое соответствие называется изоморфизмом.

3. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.1. Система двух уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} ax + by = p, \\ cx + dy = q, \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, c, d, p, q — заданные числа, x, y — неизвестные. Решим систему методом исключения неизвестных.

Умножая первое уравнение на d , второе на $-b$ и складывая полученные уравнения, найдем

$$- \begin{cases} ax + by = p & \times d \\ cx + dy = q & \times b \end{cases} \implies (ad - bc)x = pd - qb.$$

Аналогично, умножая первое уравнение на $-c$, второе на a и складывая полученные уравнения, найдем

$$- \begin{cases} ax + by = p, & \times c \\ cx + dy = q, & \times a \end{cases} \implies (ad - bc)y = qa - pc.$$

Если $ad - bc \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x = \frac{pd - qb}{ad - bc}, \quad y = \frac{qa - pc}{ad - bc}.$$

3.2. Определитель второго порядка. Запишем коэффициенты системы в виде таблицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

она называется основной матрицей системы.

Поставим в соответствие этой матрице число $ad - bc$; оно называется определителем (детерминантом) матрицы A и обозначается

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Такой определитель называется определителем второго порядка (по количеству его строк и столбцов); сокращенно \det -2.

С помощью определителей формулы для решения системы могут быть записаны в виде

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det A_x}{\det A}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det A_y}{\det A}, \quad (2)$$

где матрица A_x (соответственно, A_y) получается из матрицы A заменой первого (соответственно, второго) столбца на столбец, состоящий из свободных членов уравнений. Полученные формулы называются формулами Крамера.

Теорема.

Определитель $\det A$ обладает следующими свойствами:

(1) *линейность:*

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b \\ c_1 + c_2 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix};$$

(2) *кососимметричность: \det -2 с одинаковыми столбцами равен нулю,*

$$\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0;$$

(3) *нормировка:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Из этих основных свойств определителя можно вывести ряд новых свойств, полезных при вычислениях.

1. Кососимметричность-2: при перестановке столбцов \det -2 меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \quad \underbrace{\begin{vmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{vmatrix}}_{=0} &= \begin{vmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a+b \\ d & c+d \end{vmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix}}_{=0} \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

2. Det-2 не изменится, если к любому из его столбцов прибавить другой столбец, умноженный на произвольное число.

$$\blacktriangleleft \quad \begin{vmatrix} a+\alpha b & b \\ c+\alpha d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \alpha \underbrace{\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix}}_{=0} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

3. Определитель не изменится, если его строки и столбцы поменять ролями:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Это означает, что строки и столбцы det-2 равноправны: любое утверждение, справедливое для столбцов, будет справедливым и для строк.

3.3. Примеры.

Пример.

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 & 24695 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из второй строки удвоенную первую строку:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 - 2 \cdot 12345 & 24695 - 2 \cdot 12347 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12345 \cdot 1 - 12347 \cdot 1 = -2. \end{aligned}$$

Пример.

Вычислить det-2

$$\begin{vmatrix} 1-i & 2+3i \\ 3-2i & 2+i \end{vmatrix} = (1-i)(2+i) - (2+3i)(3-2i) =$$

$$= (3 - i) - (12 + 5i) = -9 - 6i.$$

Пример.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (1 - i)x + (2 + 3i)y = 12 + 8i, \\ (3 - 2i)x + (2 + i)y = 14 + 5i. \end{cases}$$

Воспользуемся формулами Крамера; для этого вычислим необходимые определители:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 - i & 2 + 3i \\ 3 - 2i & 2 + i \end{vmatrix} = -9 - 6i$$

(см. предыдущий пример),

$$\begin{vmatrix} 12 + 8i & 2 + 3i \\ 14 + 5i & 2 + i \end{vmatrix} = 3 - 24i, \quad \begin{vmatrix} 1 - i & 12 + 8i \\ 3 - 2i & 14 + 5i \end{vmatrix} = -33 - 9i.$$

Теперь находим

$$x = \frac{3 - 24i}{-9 - 6i} = 1 + 2i, \quad y = \frac{-33 - 9i}{-9 - 6i} = 3 - i.$$

3.4. Критерий равенства нулю $\det-2$.

Теорема.

Det-2 равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы.

◀ 1. Пусть $\det-2$ равен нулю. Имеем:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \implies ad = bc \implies \implies \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \alpha \implies \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

2. Пусть столбцы $\det-2$ ЛЗ; тогда

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha b & b \\ \alpha d & d \end{vmatrix} = 0. \quad \blacktriangleright$$

4. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1. Используя методы векторной алгебры, доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Задача 2. Используя методы векторной алгебры, найти координаты центра масс однородной пластинки, имеющей форму четырехугольника $ABCD$ с вершинами в точках $A(3, 1)$, $B(7, 3)$, $C(0, 4)$, $D(-1, 2)$.

Задача 3. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $|AM| : |BM| = m_1 : n_1$, $|AN| : |CN| = m_2 : n_2$, O — точка пересечения отрезков BN и CM . Найти отношения $|BO| : |ON|$ и $|CO| : |OM|$. Решить задачу, используя методы векторной алгебры.

Задача 4. Используя методы векторной алгебры, доказать, что четыре отрезка, соединяющие вершины произвольного тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

Задача 5. Используя методы векторной алгебры, доказать, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер произвольного тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.