Лекция 5

1. Определитель третьего порядка

1.1. **Определение.** Определитель третьего порядка (сокращенно det-3) должен состоять из трех строк и трех столбцов чисел; будем считать его функцией его столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |A, B, C|, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Det-3 должен обладать свойствами, аналогичными свойствам det-2:

(1) линейность по столбцам:

$$|A_1 + A_2, B, C| = |A_1, B, C| + |A_2, B, C|$$

$$|\alpha A, B, C| = \alpha\,|A, B, C|,$$

и аналогично для всех остальных столбцов;

(2) кососимметричность: определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю,

$$|A, A, C| = 0$$

и аналогично для других столбцов;

(3) нормировка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отметим свойство кососимметричность-2: при перестановке любых двух столбцов det-3 меняет знак.

$$\underbrace{|A+B,\ A+B,\ C|}_{=0} = |A,\ A+B,\ C| + |B,\ A+B,\ C| =$$

$$= \underbrace{|A, A, C|}_{=0} + |A, B, C| + |B, A, C| + \underbrace{|B, B, C|}_{=0},$$

откуда

$$|A, B, C| = -|B, A, C|.$$

Из кососимметричности и линейности получается также следующее свойство: det-3 не изменится, если к любому его столбцу прибавить произвольную ЛК остальных столбцов.

$$|A + \beta B + \gamma C,\ B,\ C| = |A,\ B,\ C| + \beta \underbrace{|B,\ B,\ C|}_{=0} + \gamma \underbrace{|C,\ B,\ C|}_{=0}.$$

1.2. **Формулы Крамера.** Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3. \end{cases}$$

Таблицы коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

называются основной и расширенной матрицами системы соответственно.

Введя столбцы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

систему можно записать в виде

$$Ax + By + Cz = P.$$

Пусть (x, y, z) — решение системы. Это означает, что столбец P является ЛК столбцов A, B, C с коэффициентами x, y, z:

$$P = Ax + By + Cz.$$

Рассмотрим det-3 $|P, B, C|$:

$$\begin{aligned} |P, B, C| &= \left| \underbrace{Ax + By + Cz}_{=P},\ B,\ C \right| = \\ &= |Ax, B, C| + |By, B, C| + |Cz, B, C| = \\ &= x\,|A, B, C| + y\,\underbrace{|B, B, C|}_{=0} + z\,\underbrace{|C, B, C|}_{=0}, \end{aligned}$$

откуда, при условии $|A, B, C| \neq 0$, получаем

$$x = \frac{|P, B, C|}{|A, B, C|} = \frac{\det A_x}{\det A}.$$

Аналогично получаются формулы для y, z:

$$y = \frac{|A, P, C|}{|A, B, C|} = \frac{\det A_y}{\det A}, \quad z = \frac{|A, B, P|}{|A, B, C|} = \frac{\det A_z}{\det A},$$

где определители $\det A_x$, $\det A_y$, $\det A_z$ получены из определителя $\det A$ заменой соответствующего столбца на столбец правых частей системы.

Формулы Крамера дают решение в случае, когда определитель $|A, B, C|$ основной матрицы системы отличен от нуля, и при этом доказывают единственность этого решения. Если же $|A, B, C| = 0$, то формулы Крамера неприменимы; в этом случае система может либо не иметь решений, либо иметь более одного решения.

1.3. **Разложение det-3 по первому столбцу.** Рассмотрим столбцы

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, любой столбец из трех элементов можно представить в виде ЛК этих трех столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3.$$

Преобразуем det-3:

$$|A,\ B,\ C| = |a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3,\ B,\ C| =$$
$$= a_1 \underline{|I_1,\ B,\ C|} + a_2 \underline{|I_2,\ B,\ C|} + a_3 \underline{|I_3,\ B,\ C|}.$$

Подчеркнутые det-3 называются алгебраическими дополнениями (АД) элементов a_1, a_2, a_3; обозначим их A_1, A_2, A_3. Очевидно, эти АД не зависят от элементов a_1, a_2, a_3.

Вычислим АД элемента a_1:

$$A_1 = |I_1, B, C| = |I_1, b_1 I_1 + b_2 I_2 + b_3 I_3, C| =$$

$$= b_1 \underbrace{|I_1, I_1, C|}_{=0} + b_2 \, |I_1, I_2, C| + b_3 \, |I_1, I_3, C| =$$

$$= b_2 \left| I_1, I_2, \underline{c_1 I_1 + c_2 I_2} + c_3 I_3 \right| + b_3 \left| I_1, I_3, \underline{c_1 I_1} + c_2 I_2 + \underline{c_3 I_3} \right| =$$

$$= b_2 c_3 \, |I_1, I_2, I_3| + b_3 c_2 \, |I_1, I_3, I_2| =$$

$$= b_2 c_3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} + b_3 c_2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=-1} = b_2 c_3 - b_3 c_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что АД элемента a_1 равно det-2, который получается, если из исходного det-3 вычеркнуть строку и столбец, на пересечении которых стоит элемент a_1.

Аналогичное вычисление АД элементов a_2 и a_3 дает:

$$A_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3 = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$A_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Обратите внимание на знак A_2.

Итак, получена формула разложения det-3 по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Det-2, фигурирующие в этой формуле, называются минорами этих элементов. Они представляют собой det-2, получающиеся из исходного det-3 вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоят элементы a_1, a_2, a_3 соответственно.

Аналогичные формулы могут быть получены и для разложения det-3 по элементам второго и третьего столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Анализ этих формул позволяет сделать следующий вывод: АД элемента равно минору этого элемента, взятому со знаком «+» или «−» согласно следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Итак, det-3 равен сумме произведений элементов столбца на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3.$$

Рассмотрим сумму произведений элементов второго столбца на алгебраические дополнения элементов первого столбца:

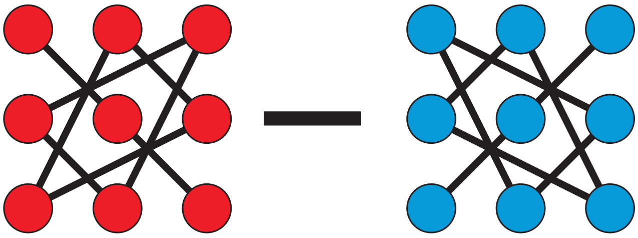
$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

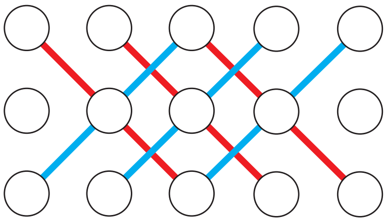
Аналогично и для других столбцов. Итак, сумма произведений элементов некоторого столбца на алгебраические дополнения другого столбца равна нулю.

1.4. **Полное разложение det-3.** Вычисляя АД, входящие в разложение det-3 по элементам какой-либо строки, получаем следующую формулу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

Мнемонические правила для запоминания:





Сгруппируем иначе слагаемые в полном разложении det-3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{a_1b_2c_3} + a_2b_3c_1 + \underline{\underline{a_3b_1c_2}} - \underline{a_1b_3c_2} - \underline{\underline{a_2b_1c_3}} - a_3b_2c_1 =$$

$$= a_1\left(b_2c_3 - b_3c_2\right) - b_1\left(a_2c_3 - a_3c_2\right) + c_1\left(a_2b_3 - a_3b_3\right) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Это означает, что строки и столбцы det-3 равноправны: любое утверждение, сформулированное для столбцов, имеет аналог, справедливый для строк. В частности, можно производить разложение det-3 не только по элементам столбцов, но и по элементам строк.

1.5. **Примеры.**

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Из второй строки вычтем первую, умноженную на 2, а к четвертой строке прибавим первую, умноженную на 4, после чего разложим получившийся det-3 по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow 4 \end{array} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 13 & 13 \end{vmatrix} = 0 \cdot 13 - (-13) \cdot 7 = 91.$$

Пример.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ 2x + 4y - z = 7, \\ -4x + 5y + z = 9. \end{cases}$$

Воспользуемся формулами Крамера, для чего вычислим нужные det-3:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 13 \end{vmatrix} = 91$$

(см. пример выше).

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix};$$

для вычисления этого det-3 прибавим к первой строке утроенную вторую строку, а к третьей строке прибавим вторую строку, после чего разложим полученный det-3 по третьему столбцу:

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 16 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 35 & 14 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 35 - 2 \cdot 16 & 14 - 2 \cdot 9 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 16 = 91.$$

При вычислении $\det A_y$ и $\det A_z$ будем из второй строки вычитать удвоенную первую строку, а к третьей строке прибавлять первую строку, умноженную на 4, как это делалось при вычислении $\det A$; после этого каждый из полученных det-3 разложим по элементам первого столбца:

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ -4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 0 & -21 & -7 \\ 0 & 65 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -21 & -7 \\ 65 & 13 \end{vmatrix} = 182,$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 4 & 7 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -21 \\ 0 & 13 & 65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -21 \\ 13 & 65 \end{vmatrix} = 273.$$

Решение системы:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{91}{91} = 1, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{182}{91} = 2, \quad z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{273}{91} = 3.$$

1.6. **Критерий равенства нулю det-3.**

Теорема.

Det-3 равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы.

◀ 1. Пусть det-3 равен нулю. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = 0. \end{cases}$$

Формулы Крамера к ней неприменимы, но она имеет очевидное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Поэтому решение системы не единственно, и она имеет какое-либо другое решение, в котором хотя бы одна из неизвестных отлична от нуля. Компоненты этого решения и являются коэффициентами нетривиальной линейной комбинации столбцов, равной нулевому столбцу.

2. Пусть столбцы ЛЗ; тогда один из них можно представить в виде ЛК остальных, например, $C = \alpha A + \beta B$. Тогда

$$|A, B, C| = |A, B, C - \alpha A - \beta B| = |A, B, O| = 0. \qquad ▶$$

2. Матрицы

2.1. **Основные определения.**

Матрица размера $m \times n$ — прямоугольная таблица из чисел (элементов матрицы), состоящая из m строк и n столбцов.

Нумерация элементов матрицы:

(1) верхний индекс — номер строки, нижний индекс — номер столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix};$$

(2) первый индекс — номер строки, а второй — номер столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сокращенные обозначения:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = (a_j^i)_n^m, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{mn}.$$

Множество всех матриц размера $m \times n$, элементы которых принадлежат множеству X, обозначается $X^{m\times n}$. Для нас наиболее интересен случай, когда X — некоторое числовое поле $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Специальные виды матриц:

- нулевая матрица: все элементы равны нулю; обозначение O;
- квадратная матрица: количество строк равно количеству столбцов); порядок квадратной матрицы — это количество ее строк (столбцов);
- диагональная матрица: квадратная матрица, у которой $a_j^i = 0$ для всех $i \neq j$,

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1^1, \ldots, a_n^n);$$

- верхнетреугольная (правая треугольная) матрица: квадратная матрица, у которой $a^i_j = 0$ для всех $i > j$,

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix};$$

- нижнетреугольная (левая треугольная) матрица: квадратная матрица, у которой $a^i_j = 0$ для всех $i < j$,

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются равными, $A = B$, если

(1) их размеры равны:

$$A = (a^i_j)^m_n, \quad B = (b^i_j)^m_n;$$

(2) элементы, стоящие на соответственных местах, равны между собой:

$$a^i_j = b^i_j \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

2.2. **Линейные операции и их свойства.**

Сумма матриц $A = (a^i_j)^m_n$ и $B = (b^i_j)^m_n$ одинакового размера $m \times n$:

$$C = A + B \quad \Longleftrightarrow \quad c^i_j = a^i_j + b^i_j \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Произведение матрицы $A = (a^i_j)^m_n$ на число α:

$$D = \alpha A \quad \Longleftrightarrow \quad d^i_j = \alpha a^i_j \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Теорема.

Операции над матрицами обладают следующими свойствами.

(1) *коммутативность сложения*: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$A + B = B + A;$$

(2) *ассоциативность сложения*: $\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

(3) *свойство нулевой матрицы*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$A + O = A,$$

где $O \in \mathbb{K}^{m\times n}$;

(4) *существование противоположной матрицы*:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \exists A' \in \mathbb{K}^{m\times n} : A + A' = O;$$

(5) *свойство единицы*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$1 \cdot A = A;$$

(6) *ассоциативность умножения на число*: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A;$$

(7) *дистрибутивность*-1: $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

(8) *дистрибутивность*-2: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

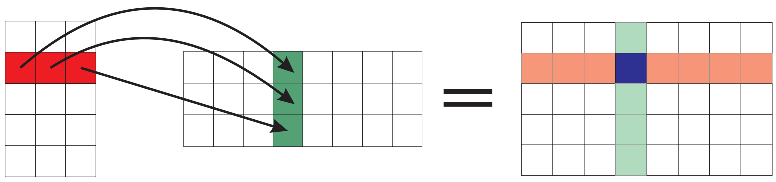
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

2.3. **Умножение матриц.**

Произведение матриц $A \in \mathbb{K}^{m\times s}$ и $B \in \mathbb{K}^{s\times}$ — матрица $C = AB \in \mathbb{K}^{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c^i_j = \sum_{k=1}^{s} a^i_k b^k_j.$$

Перемножить матрицы можно лишь в том случае, когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй.



Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix};$$

произведение

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

не существует;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot 5 & 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 4 & 3\cdot 2 + 4\cdot 5 & 3\cdot 3 + 4\cdot 6 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 4 & 5\cdot 2 + 6\cdot 5 & 5\cdot 3 + 6\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix};$$

здесь

$$AB \neq BA.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $AB = BA$.

Единичная матрица — диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1. Элементы единичной матрицы обозначаются

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

δ^i_j называется символом Кронекера.

Обозначения: I, E; если нужно указать размер — I_n, E_n.

Теорема.

Операция умножения матриц обладает следующими свойствами:

(1) *ассоциативность умножения*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $\forall B \in \mathbb{K}^{s\times p}$, $\forall C \in \mathbb{K}^{p\times n}$

$$A(BC) = (AB)C;$$

(2) *дистрибутивность*-1: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $\forall B, C \in \mathbb{K}^{s\times n}$

$$A(B + C) = AB + AC;$$

(3) *дистрибутивность*-2: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $\forall C \in \mathbb{K}^{s\times n}$

$$(A + B)C = AC + BC;$$

(4) *свойство единичной матрицы*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$I_m A = A I_n = A.$$

◀ Докажем соотношение

$$\underbrace{A(\overbrace{B\ C}^{D})}_{X} = \underbrace{(\overbrace{A\ B}^{F})C}_{Y}.$$

Пусть

$$A = (a^i_j)^m_s, \quad B = (b^j_k)^s_p, \quad C = (c^k_l)^p_n.$$

Рассмотрим произведение

$$D = BC = (d^j_l)^s_n, \quad d^j_l = \sum_{k=1}^{p} b^j_k\ c^k_l.$$

Далее,

$$X = AD = (x^i_l)^m_n,$$

$$x^i_l = \sum_{j=1}^{s} a^i_j\ d^j_l = \sum_{j=1}^{s} a^i_j \left(\sum_{k=1}^{p} b^j_k\ c^k_l \right) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{p} a^i_j\ b^j_k\ c^k_l.$$

Произведения в правой части равенства:

$$F = AB = (f_k^i)_p^m, \quad f_k^i = \sum_{j=1}^{s} a_j^i\ b_k^j,$$

$$Y = FC = (y_l^i)_n^m,$$

$$y_l^i = \sum_{k=1}^{p} f_k^i\ c_l^k = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{s} a_j^i\ b_k^j \right)\ c_l^k = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{s} a_j^i\ b_k^j\ c_l^k.$$

Ясно, что $x_l^i = y_l^i$, так как выражения этих величин отличаются лишь порядком суммирования. ▶

2.4. **Структура произведения матриц.** Рассмотрим матрицы

$$A = (a_l^j)_p^m \in \mathbb{K}^{m\times p}, \quad B = (b_k^l)_n^p \in \mathbb{K}^{p\times n},$$

Наша задача — описать структуру столбцов матрицы $C = AB$.

Представим матрицу A в виде совокупности столбцов

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_p],$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_p = \begin{pmatrix} a_p^1 \\ a_p^2 \\ \vdots \\ a_p^m \end{pmatrix}.$$

Произведением матриц $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ является матрица $C \in \mathbb{K}^{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_k^j = \sum_{l=1}^{p} a_l^j\ b_k^l, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, m, \\ k = 1, \dots, n. \end{matrix}$$

Представим матрицу C в виде совокупности столбцов:

$$C = [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n].$$

Обсудим строение k-го столбца:

$$C_k = \begin{pmatrix} c_k^1 \\ \vdots \\ c_k^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{l=1}^{p} a_l^1\ b_k^l \\ \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{p} a_l^m\ b_k^l \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{p} \begin{pmatrix} a_l^1 \\ \vdots \\ a_l^m \end{pmatrix} b_k^l = \sum_{l=1}^{p} A_l\ b_k^l = A \cdot B_k.$$

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

(1) k-й столбец матрицы AB равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам k-го столбца матрицы B.

(2) k-й столбец матрицы AB равен произведению матрицы A на k-й столбец матрицы B.

2.5. **Транспонирование.** Дана матрица $A = (a^i_j)^m_n \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Матрица

$$B = (b^j_i)^n_m \in \mathbb{K}^{n\times m}, \quad b^j_i = a^i_j,$$

называется транспонированной для A. Обозначения:

$$B = A^T = A^{\text{tr}} = {}^{\text{tr}}A.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Теорема.
Операция транспонирования обладает следующими свойствами:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$;
3. $(A^T)^T = A$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

◀ Докажите самостоятельно. ▶
Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$.
Матрица A называется кососимметричной, если $A = -A^T$.
Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множества всех симметричных и кососимметричных матриц порядка n обозначаются

$$S\mathbb{K}^{n\times n}, \quad A\mathbb{K}^{n\times n}.$$

Теорема.
Любую квадратную матрицу A можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\textit{симм.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\textit{кососимм.}}.$$

Отметим, что такое представление единственно.

2.6. **Определитель произведения матриц.** В этом разделе матрицы A, B имеют следующую структуру:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}.$$

Теорема.

Если A, B — матрицы второго или третьего порядка, то

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

1. Доказательство для det-2.

$$\det(AB) = \det[AB_1, AB_2] =$$

$$= \det\left[A\left(b_1^1 I_1 + b_1^2 I_2\right),\ A\left(b_2^1 I_1 + b_2^2 I_2\right)\right] =$$

$$= b_1^1 \det\left[AI_1,\ A\left(b_2^1 I_1 + b_2^2 I_2\right)\right] + b_1^2 \det\left[AI_2,\ A\left(b_2^1 I_1 + b_2^2 I_2\right)\right] =$$

$$= b_1^1 b_2^1 \underbrace{\det\left[AI_1, AI_1\right]}_{=0} + b_1^1 b_2^2 \underbrace{\det\left[AI_1, AI_2\right]}_{=\det A} +$$

$$+ b_1^2 b_2^1 \underbrace{\det\left[AI_2, AI_1\right]}_{=-\det A} + b_1^2 b_2^2 \underbrace{\det\left[AI_2, AI_2\right]}_{=0} =$$

$$= \det A\left(b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1\right) = \det A \cdot \det B.$$

2. Доказательство для det-3. Прежде всего запишем формулу полного разложения det-3:

$$\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{vmatrix} = b_1^1\ b_2^2\ b_3^3 + b_1^2\ b_2^3\ b_3^1 + b_1^3\ b_2^1\ b_3^2 - b_1^1\ b_2^3\ b_3^2 - b_1^2\ b_2^1\ b_3^3 - b_1^3\ b_2^2\ b_3^1.$$

Структура этой формулы такова: в каждом слагаемом нижние индексы следуют в естественном порядке $1, 2, 3$, а верхние образуют некоторую перестановку чисел $1, 2, 3$; всего слагаемых 6, по числу возможных перестановок из 3 элементов, $3! = 6$.

Слагаемое входит в формулу со знаком «+», если последовательность верхних индексов в нем получена из последовательности $1, 2, 3$ четным числом перестановок соседних элементов, и со знаком «−» в противном случае:

$$\begin{array}{ccccc} & & 123 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 213 & & & & 132 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 231 & & & & 312 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & 321 & & \end{array}$$

Для определителя произведения матриц имеем:

$$\det(AB) = \det\left[AB_1,\ AB_2,\ AB_3\right] =$$

$$= \det\left[\underbrace{A\left(\sum_{i=1}^{3} b_1^i I_i\right)}_{B_1},\ \underbrace{A\left(\sum_{j=1}^{3} b_2^j I_j\right)}_{B_2},\ \underbrace{A\left(\sum_{k=1}^{3} b_3^k I_k\right)}_{B_3}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} b_1^i \det \left[AI_i,\ A\left(\sum_{j=1}^{3} b_2^j I_j\right),\ A\left(\sum_{k=1}^{3} b_3^k I_k\right)\right] = \cdots =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\ b_1^i\ b_2^j\ b_3^k \det\left[AI_i,\ AI_j,\ AI_k\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\ b_1^i\ b_2^j\ b_3^k\ \det\left[A_i,\ A_j,\ A_k\right].$$

В этой сумме $3^3 = 27$ слагаемых, но большинство из них равно нулю, так как содержат в качестве множителя det-3 вида $\det[A_i, A_j, A_k]$ с одинаковыми столбцами. Далее, если все столбцы A_i, A_j, A_k различны, то

$$\det[A_i, A_j, A_k] = \pm \det A,$$

где знак «$+$» или «$-$» зависит от того, четным или нечетным числом перестановок столбцов получен $\det[A_i, A_j, A_k]$ из $\det[A_1, A_2, A_3] = \det A$.

Поэтому, продолжая выкладку, получаем

$$\det(AB) \;=\; \det A \cdot \left(b_1^1 b_2^2 b_3^3 + b_1^2 b_2^3 b_3^1 + b_1^3 b_2^1 b_3^2 - b_1^1 b_2^3 b_3^2 - b_1^2 b_2^1 b_3^3 - b_1^3 b_2^2 b_3^1\right) \;=\; \det A \cdot \det B.$$

2.7. **Обратная матрица.** Понятие обратной матрицы определено только для квадратных матриц.

Дана матрица $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Матрица $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ называется обратной к матрице A, если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Матрица A в этом случае называется обратимой.

Уже на примере матрицы 1×1 ясно, что обратная матрица существует не для любой матрицы: матрица (0) необратима.

Теорема.

Если для матрицы A существует обратная A^{-1}, то она единственна.

◀ Предположим, что матрица A имеет две различные обратные матрицы B и C, т.е.

$$AB = BA = I, \quad AC = CA = I.$$

Имеем:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C,$$

т.е. $B = C$. ▶

Теорема.

Матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$, что эквивалентно условию линейной независимости столбцов (строк) матрицы A.

Замечание. Сейчас нас интересует вопрос о существовании обратных матриц для матриц порядка 2 и 3. Всюду далее в доказательстве считаем, что $n = 3$. На самом деле теорема вместе с доказательством справедлива для матрицы A любого порядка.

◀ 1. Предположим, что существует A^{-1}. Имеем

$$A^{-1}A = I \quad\Longrightarrow\quad \det(A^{-1}A) = \det I \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \det A^{-1} \cdot \det A = 1 \quad\Longrightarrow\quad \det A \neq 0.$$

2. Пусть $\det A \neq 0$. Рассмотрим матрицу, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$B = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix} = (A_j^k)_n^n;$$

она называется присоединенной к матрице A. Вычислим произведение $C = A \cdot B^T$:

$$c_j^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i A_k^j = \begin{cases} \det A \neq 0, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Таким образом, матрица

$$\frac{1}{\det A} B^T$$

является обратной для A. Эта формула позволяет вычислить обратную матрицу A^{-1}. ▶

Пример.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов

$$\text{АД}(a) = d, \quad \text{АД}(b) = -c, \quad \text{АД}(c) = -b, \quad \text{АД}(d) = a,$$

присоединенная матрица

$$B = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

так что обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

3. Экзаменационные задачи

Задача 1. Доказать, что k-й столбец матрицы AB равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам k-го столбца матрицы B.

Задача 2. Доказать, что k-я строка матрицы AB равна линейной комбинации строк матрицы B с коэффициентами, равными элементам k-й строки матрицы A.

Задача 3. Доказать, что k-й столбец матрицы AB равен произведению матрицы A на k-й столбец матрицы B.

Задача 4. Доказать, что k-я строка матрицы AB равна произведению k-й строки матрицы A на матрицу B.

Задача 5. Доказать соотношение $(AB)^T = B^T A^T$.

Задача 6. Матрица A такова, что $A^2 + A + E = 0$. Доказать, что матрица A обратима и выразить A^{-1} через A.

Задача 7. Пусть $A^m = 0$. Доказать, что $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{m-1}$.

Задача 8. Пусть $f(t)$ — многочлен. Доказать, что $f(S^{-1}AS) = S^{-1}f(A)S$.

Задача 9. Доказать, что если A — невырожденная симметрическая матрица, то A^{-1} — также симметрическая матрица.

Задача 10. Доказать, что если A — невырожденная кососимметрическая матрица, то A^{-1} — также кососимметрическая матрица.

Задача 11. Пусть A, B — симметрические матрицы. Доказать, что AB является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

Задача 12. Пусть A, B — кососимметрические матрицы. Доказать, что AB является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

Задача 13. Пусть A, B — кососимметрические матрицы. Доказать, что AB является кососимметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = -BA$.