

Лекция 6

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БАЗИСОВ И ОРИЕНТАЦИЯ

Пусть на плоскости заданы два произвольных базиса (условно назовем их старым и новым)

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2.$$

Векторы нового базиса можно выразить через векторы старого базиса:

$$\mathbf{f}_1 = c_1^1 \mathbf{e}_1 + c_1^2 \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{f}_2 = c_2^1 \mathbf{e}_1 + c_2^2 \mathbf{e}_2.$$

Введем матрицы

$$E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad F = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2), \quad C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда можно записать

$$F = EC.$$

Матрица C называется матрицей перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ к базису $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$. Определитель матрицы перехода отличен от нуля в силу линейной независимости векторов базиса.

Базис $F = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ называется одноименным (разноименным) с базисом $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, если матрица перехода C от E к F имеет положительный (отрицательный) определитель. Если базис F является одноименным с базисом E , мы пишем $F \simeq E$.

Теорема.

Отношение одноименности базисов обладает следующими свойствами:

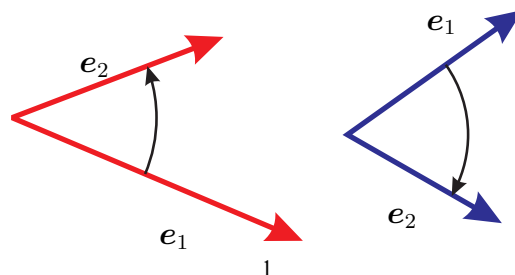
- (1) $E \simeq E$;
- (2) если $F \simeq E$, то $E \simeq F$;
- (3) если $E \simeq F$ и $F \simeq H$, то $E \simeq H$.

Множество всех базисов на плоскости разбивается на два класса следующим образом. Пусть E — некоторый базис. К одному классу относятся все базисы, одноименные с E (и при этом одноименные между собой), к другому — разноименные с E (и при этом одноименные между собой).

Каждый из двух классов одноименных базисов называется ориентацией плоскости. На плоскости существует ровно две ориентации, одна из которых называется положительной, а вторая — отрицательной.

Соглашение об ориентации.

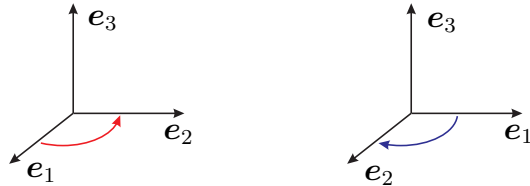
Базис на плоскости $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ называется правым, если кратчайший поворот, переводящий вектор \mathbf{e}_1 в вектор \mathbf{e}_2 , осуществляется против часовой стрелки.



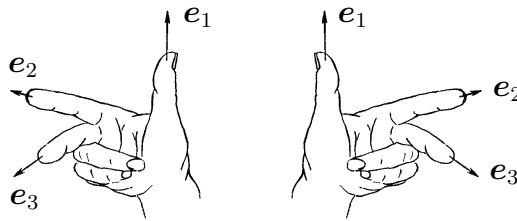
Аналогичные рассуждения можно провести и для базисов в пространстве. В пространстве также существует ровно две ориентации.

Базис в пространстве e_1, e_2, e_3 называется правым, если выполнено одно из следующих условий:

- (1) если смотреть из конца вектора e_3 , то кратчайший поворот, переводящий вектор e_1 в вектор e_2 , осуществляется против часовой стрелки;
- (2) векторы e_1, e_2, e_3 удовлетворяют правилу винта: если вращать винт в направлении поворота, переводящего (кратчайшим образом) вектор e_1 в вектор e_2 , то поступательное движение винта происходит в направлении вектора e_3 ;



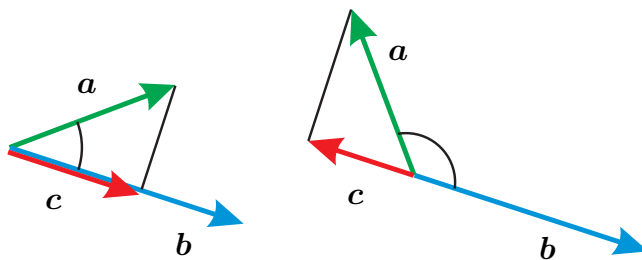
- (3) векторы e_1, e_2, e_3 удовлетворяют правилу правой руки: их расположение совпадает с естественным положением большого, указательного и среднего пальцев правой руки.



2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

2.1. Определение.

Проекция вектора a на вектор b — это вектор c , коллинеарный b , начало (конец) которого представляет собой ортогональную проекцию начала (конца) вектора a на прямую, параллельную b . Обозначение: $c = \text{pr}_b a$.



Величиной $\text{Pr}_b a$ проекции $\text{pr}_b a$ называется ее длина, взятая со знаком «+», если векторы $c = \text{pr}_b a$ и b сонаправлены, и со знаком «-» в противном случае. Ясно, что

$$\text{Pr}_b a = |a| \cos \varphi,$$

где φ — угол между векторами a и b .

Скалярное произведение (СП) двух векторов — это число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi.$$

Ясно, что СП равно

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}|.$$

Для СП используется также обозначение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Скалярный квадрат вектора:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2.$$

Длина вектора может быть выражена через его скалярный квадрат:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Вычислим проекцию \mathbf{c} вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} .

Вектор \mathbf{c} коллинеарен \mathbf{b} , поэтому

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{b}.$$

Кроме того,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}| = (\mathbf{c}, \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{b}, \mathbf{b}),$$

откуда

$$\alpha = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})}.$$

Окончательный результат:

$$\mathbf{c} = \text{pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} \mathbf{b}.$$

Величина этой проекции

$$\text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|}.$$

2.2. Свойства скалярного произведения.

Теорема.

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

(1) *симметричность*:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a});$$

(2) *линейность*:

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}), \quad (\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{b});$$

(3) *положительная определенность*:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

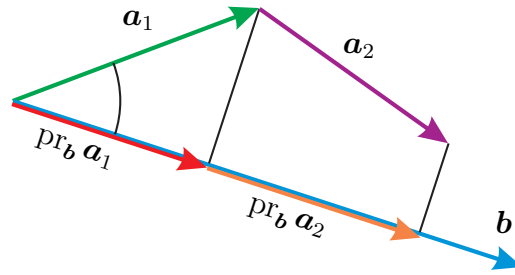
Отметим, что из линейности по первому аргументу и симметричности следует линейность по второму аргументу.

◀ Докажем, что $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$. Это следует из того факта, что

$$\text{pr}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}_1 + \text{pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}_2,$$

а следовательно,

$$\text{Pr}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}_1 + \text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}_2. \quad \blacktriangleright$$



2.3. Вычисление СП в ортонормированном базисе. Пусть в пространстве задан ОНБ e_1, e_2, e_3 . Попарные СП векторов этого базиса равны

$$\begin{aligned} (e_1, e_1) &= (e_2, e_2) = (e_3, e_3) = 1, \\ (e_1, e_2) &= (e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0. \end{aligned}$$

Символ Кронекера:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Тогда можно записать

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}.$$

Разложим векторы a, b по базису e_1, e_2, e_3 :

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3.$$

Вычислим СП:

$$\begin{aligned} (a, b) &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = \\ &= (a_1 e_1, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) + \\ &+ (a_2 e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) + \\ &+ (a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = \\ &= a_1 b_1 \underbrace{(e_1, e_1)}_{=1} + a_1 b_2 \underbrace{(e_1, e_2)}_{=0} + a_1 b_3 \underbrace{(e_1, e_3)}_{=0} + \\ &+ a_2 b_1 \underbrace{(e_2, e_1)}_{=0} + a_2 b_2 \underbrace{(e_2, e_2)}_{=1} + a_2 b_3 \underbrace{(e_2, e_3)}_{=0} + \\ &+ a_3 b_1 \underbrace{(e_3, e_1)}_{=0} + a_3 b_2 \underbrace{(e_3, e_2)}_{=0} + a_3 b_3 \underbrace{(e_3, e_3)}_{=1} = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned}$$

Итак, скалярное произведение векторов выражается через их координаты в ортонормированном базисе формулой

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Длина вектора равна

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Угол между векторами может быть найден по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Пример.

Найти проекцию вектора $\mathbf{a} = (1, 3, -2)^T$ на $\mathbf{b} = (3, -6, 2)^T$, величину этой проекции и угол между векторами.

Имеем:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = 7,$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-6) + (-2) \cdot 2 = -19,$$

$$\text{pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} \mathbf{b} = \frac{-19}{49} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|} = -\frac{19}{7},$$

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = -\frac{19}{7\sqrt{14}}.$$

3. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

3.1. Определение.

Векторным произведением (ВП) векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется вектор \mathbf{c} , удовлетворяющий следующим требованиям:

- (1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$;
- (2) вектор \mathbf{c} перпендикулярен векторам \mathbf{a} , \mathbf{b} ;
- (3) векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} образуют правую тройку.

3.2. Формула для вычисления векторного произведения. Пусть векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} заданы координатами относительно некоторого ортонормированного базиса:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что эти векторы ненулевые и неколлинеарные; в противном случае ВП равно нулевому вектору.

Найдем какой-либо ненулевой вектор \mathbf{p} , перпендикулярный \mathbf{a} и \mathbf{b} . Условие перпендикулярности:

$$\mathbf{p} \perp \mathbf{a} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{p}, \mathbf{a}) = 0.$$

Таким образом, координаты p_1, p_2, p_3 вектора \mathbf{p} должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0, \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = 0. \end{cases}$$

Так как $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, хотя бы одна из его координат отлична от нуля; предположим, что это p_3 . Тогда, разделив оба уравнения системы на p_3 и обозначив

$$x_1 = \frac{p_1}{p_3}, \quad x_2 = \frac{p_2}{p_3},$$

получим систему

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = -a_3, \\ b_1x_1 + b_2x_2 = -b_3, \end{cases}$$

Ее решение имеет вид

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Таким образом, в качестве вектора \mathbf{p} можно взять вектор

$$p_1 = \begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_3 \\ b_1 & -b_3 \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Вектор \mathbf{c} пропорционален вектору \mathbf{p} , $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{p}$. Подберем α так чтобы $|\alpha\mathbf{p}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi$.

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2 \varphi = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2 \varphi) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2; \end{aligned}$$

получили, что $|\mathbf{c}| = |\mathbf{p}|$. Таким образом, $\mathbf{c} = \pm\mathbf{p}$.

Для выяснения знака вычислим определитель матрицы перехода от исходного ОНБ к базису, состоящему из векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; этот $\det\text{-}3$ состоит из координат векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, тройка векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ имеет ту же ориентацию, что и исходный ОНБ. Поэтому в случае правого ОНБ $\mathbf{c} = \mathbf{p}$, а в случае левого ОНБ $\mathbf{c} = -\mathbf{p}$.

Итак, в случае правого ОНБ имеем

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что координаты вектора \mathbf{c} равны алгебраическим дополнениям элементов первой строки $\det-3$

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Поэтому можно формулу для вычисления ВП представить в виде

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{в правом ОНБ,}$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = - \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{в левом ОНБ.}$$

Очевидно, эти формулы справедливы и для случаев, когда один (или оба) вектора нулевой и когда векторы коллинеарны (эти случаи в начале рассуждения были исключены из рассмотрения).

3.3. Свойства векторного произведения.

Теорема.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

(1) *кососимметричность*:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}];$$

(2) *линейность*:

$$[\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}],$$

$$[\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}] = \alpha [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Из линейности по первому аргументу и кососимметричности вытекает линейность и по второму аргументу.

◀ Докажите самостоятельно, используя свойства определителей. ▶

3.4. **Двойное векторное произведение.** Двойное векторное произведение — это $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$ или $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]$.

Теорема.

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

◀ В фиксированном ОНБ векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ имеют координаты

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$:

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] &= \begin{vmatrix} & \mathbf{i} & & & \mathbf{j} & & & & \mathbf{k} \\ & a_1 & & & a_2 & & & & a_3 \\ & b_2c_3 - b_3c_2 & & & b_3c_1 - b_1c_3 & & & & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix} = \\
 &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \\
 &= (\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Теорема.

Имеет место тождество Якоби:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{0}.$$

◀ Складывая разложение

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

с аналогичными разложениями для $[\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]]$, $[\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]]$, получаем требуемое. ▶

4. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — это число

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

Другие обозначения:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle.$$

Теорема.

Если в ортонормированном базисе

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

где знак «+» выбирается в случае правого базиса, а знак «−» в случае левого.

◀ Введем обозначение

$$\mathbf{d} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 = \\ &= \pm \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Теорема.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:

(1) линейность:

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c});$$

(2) циклическая симметрия:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ &= -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}); \end{aligned}$$

(3)

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}).$$

◀ Докажите самостоятельно, используя свойства скалярного и векторного произведений и свойства $\det-3$. ▶

Теорема.

(1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ линейно зависимы.

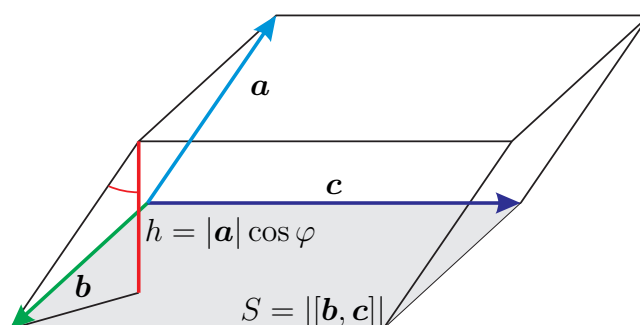
(2) Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют правую тройку при $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ и левую тройку при $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$.

◀ Докажите самостоятельно, используя выражение смешанного произведения через координаты векторов и то обстоятельство, что матрицу, составленную из координат векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, можно рассматривать как матрицу перехода от исходного ОНБ к базису $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (в случае, когда эти векторы линейно независимы). ▶

Теорема.

Величина $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, со знаком «+», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «−» в противном случае.

◀ Докажите самостоятельно. ▶



5. ЗАДАЧИ

Пример.

Доказать тождество

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) &= ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \underbrace{\mathbf{x}}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{x}]) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]]) = \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{c}(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{b}, \mathbf{c})) = (\mathbf{b}, \mathbf{d})(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{d}). \end{aligned}$$

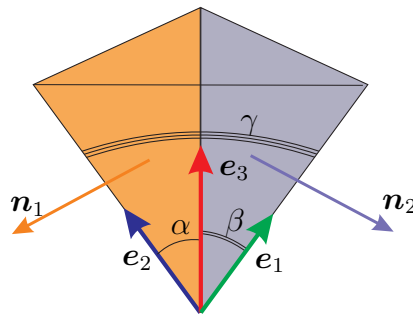
Пример.

Доказать тождество

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Решение.

$$\begin{aligned} [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] &= [\underbrace{\mathbf{x}}_{\mathbf{x}}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \\ &= \mathbf{c}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{d}) - \mathbf{d}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \end{aligned}$$

Пример.Даны плоские углы α, β, γ трехгранного угла. Найти его двугранные углы.

Решение.

Направим единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ вдоль ребер двугранного угла. Векторы \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 , перпендикулярные граням, могут быть выражены как

$$\mathbf{n}_1 = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \quad \mathbf{n}_2 = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1].$$

Очевидно,

$$|\mathbf{n}_1| = \sin \alpha, \quad |\mathbf{n}_2| = \sin \beta.$$

Угол между рассматриваемыми гранями равен углу между векторами \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 .

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) &= ([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \gamma \\ 1 & \cos \beta \end{vmatrix} = \cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma. \end{aligned}$$

Поэтому косинус искомого угла равен

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Пример.

Доказать, что если векторы $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ компланарны, то векторы a, b, c компланарны.

Решение. Вычислим смешанное произведение

$$\begin{aligned} ([a, b], [b, c], [c, a]) &= ([a, b], [[b, c], [c, a]]) = \\ &= ([a, b], c(b, c, a) - a \underbrace{(b, c, c)}_{=0}) = ([a, b], c)(b, c, a) = (a, b, c)^2. \end{aligned}$$

Итак, если $([a, b], [b, c], [c, a]) = 0$, то $(a, b, c) = 0$, т.е. векторы a, b, c компланарны.

6. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1. Доказать тождество $(a, b, c)^2 + |[[a, b], c]|^2 = |[a, b]|^2 \cdot |c|^2$.

Задача 2. Доказать тождество $([a, b], [b, c], [c, a]) = (a, b, c)^2$.

Задача 3. Доказать тождество $(a, b, c)[x, y] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ (a, x) & (b, x) & (c, x) \\ (a, y) & (b, y) & (c, y) \end{vmatrix}$.

Задача 4. Доказать тождество $(a, b, c)(x, y, z) = \begin{vmatrix} (a, x) & (b, x) & (c, x) \\ (a, y) & (b, y) & (c, y) \\ (a, z) & (b, z) & (c, z) \end{vmatrix}$.

Задача 5. Доказать, что если векторы $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ компланарны, то векторы a, b, c компланарны.

Задача 6. Доказать, что если векторы $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ компланарны, то они коллинеарны.

Задача 7. Известно, что $a = [b, c]$, $b = [c, a]$, $c = [a, b]$. Найти длины векторов a, b, c и углы между ними.

Задача 8. Три некопланарных вектора a, b, c отложены из одной точки. Найти объем треугольной призмы, основание которой построено на векторах a и b , а боковое ребро совпадает с вектором c .

Задача 9. Три некопланарных вектора a, b, c отложены из одной точки. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах a, b, c .