Лекция 7

1. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему, состоящую из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \dots + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \dots + a_n^2x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \dots + a_n^mx^n = b^m. \end{cases}$$

Сокращенно — СЛУ.

Введем основную и расширенную матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = [A_1, A_2, \dots, A_n],$$

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{array}\right) = [A, B], \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Систему можно записать в матричном виде

$$AX = B,$$

а также в виде

$$A_1x^1 + A_2x^2 + \dots + A_nx^n = B.$$

Набор чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$ (столбец $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$) называется решением СЛУ, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы получаем верное числовое равенство (при подстановке столбца в матричное уравнение получаем верное матричное равенство).

СЛУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Две совместные СЛУ называются эквивалентными, если множества их решений совпадают. Ясно, что эквивалентные СЛУ содержат одинаковое число неизвестных; число же уравнений в них может быть различным.

Следующие преобразования СЛУ переводят ее в эквивалентную СЛУ:

(1) перестановка двух уравнений местами;
(2) умножение любого уравнения СЛУ на число $\alpha \neq 0$;
(3) прибавление к любому уравнению СЛУ другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Эти преобразования СЛУ называются элементарными (ЭП).

Иногда к элементарным преобразованиям причисляют

(4) удаление из СЛУ уравнения вида

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n = 0.$$

1.1. **Однородные системы.** СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если столбец правых частей нулевой:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n = 0. \end{cases}$$

ОСЛУ всегда совместна: числа $x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0$ образуют ее решение, называемое тривиальным. Может ли ОСЛУ иметь нетривиальное решение?

Теорема.

ОСЛУ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы ее основной матрицы ЛЗ.

◀ 1. Пусть ОСЛУ имеет нетривиальное решение $x^1, \dots, x^n$; это означает, что

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = O,$$

где хотя бы один коэффициент $x^k \neq 0$; это и означает ЛЗ столбцов $A_1, A_2, \dots, A_n$.

2. Пусть столбцы основной матрицы ОСЛУ ЛЗ, т.е.

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = O,$$

где хотя бы один из коэффициентов $x^k \neq 0$. Этот набор коэффициентов и образует нетривиальное решение ОСЛУ. ▶

Теорема.

Если X_1, X_2 — два решения ОСЛУ $AX = 0$, то любая их ЛК также является решением этой ОСЛУ.

◀ Пусть c^1, c^2 — произвольные числа. Имеем:

$$AX_1 = O, \quad AX_2 = O \quad \Longrightarrow \quad c^1 A X_1 + c^2 A X_2 = A(c^1 X_1 + c^2 X_2) = 0,$$

т.е. ЛК $c^1 X_1 + c^2 X_2$ является решением ОСЛУ. ▶

Фундаментальная совокупность решений (ФСР) ОСЛУ — это такой упорядоченный набор линейно независимых решений $X_1, X_2, \dots, X_s$, что любое решение ОСЛУ можно представить в виде их линейной комбинации:

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + \dots + c^s X_s,$$

где $c^1, c^2, \dots, c^s$ — произвольные числа.

Матрица Φ, столбцами которой являются столбцы ФСР, называется фундаментальной матрицей (ФМ) ОСЛУ:

$$\Phi = [X_1, X_2, \dots, X_s].$$

Общее решение ОСЛУ выражается через ФМ по формуле

$$X = \Phi \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^s \end{pmatrix}.$$

1.2. **Неоднородные системы.** Система $AX = B$ называется неоднородной (НСЛУ), если $B \neq O$. Часто НСЛУ $AX = B$ рассматривают вместе с ОСЛУ $AX = O$.

Теорема.

Если X_1, X_2 — решения НСЛУ $AX = B$, то $X_1 - X_2$ — решение ОСЛУ $AX = O$.

◀ Пусть $AX_1 = B$, $AX_2 = B$. Тогда

$$A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = O. \qquad \blacktriangleright$$

Таким образом, любое решение НСЛУ можно представить в виде суммы некоторого частного решения НСЛУ и какого-либо решения ОСЛУ:

$$\text{ОРНС} = \text{ЧРНС} + \text{ОРОС}.$$

1.3. **Системы упрощенного вида.** Неизвестная x^k называется базисной, если она входит только в одно уравнение системы.

Система называется системой упрощенного вида, если в каждом уравнении имеется базисная неизвестная. В этом случае в каждом уравнении имеется неизвестная, входящая только в это уравнение, а число базисных неизвестных равно числу уравнений в системе.

Пример.

Рассмотрим ОСЛУ упрощенного вида:

$$\begin{cases} x^1 \qquad\quad + 3x^3 \qquad + x^5 = 0, \\ \qquad x^2 + 4x^3 \qquad + 2x^5 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\quad x^4 + 2x^5 = 0. \end{cases}$$

Базисные неизвестные выделены.

Запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = -3x^3 - x^5, \\ x^2 = -4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = -x^5. \end{cases}$$

Если вместо x^3 и x^5 подставлять произвольные числа и вычислять x^1, x^2, x^4 по указанным формулам, то полученный набор чисел x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 будет представлять собой некоторое решение ОСЛУ. Таким образом, полученные формулы доставляют нам описание всех решений исходной ОСЛУ.

Неизвестные, не являющиеся базисными, называются свободными; в общем решении системы они могут принимать произвольные значения.

Положив $x^3 = c^1$, $x^5 = c^2$, решение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c^1 - c^2 \\ -4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ -c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{c^1 \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{X_1} + c^2 \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{X_2}}_{\text{ОРОС}}.$$

Каждый из столбцов X_1, X_2, образующих ФСР ОСЛУ, можно получить, придавая одной из свободных неизвестных значение 1, а остальным — значение 0. ФСР, полученная таким образом, называется нормальной ФСР (НФСР). Фундаментальная матрица, составленная из столбцов НФСР, называется нормальной фундаментальной матрицей (НФМ).

Пример.

Рассмотрим НСЛУ упрощенного вида:

$$\begin{cases} x^1 \quad\quad + 3x^3 \quad + x^5 = 1, \\ \quad x^2 + 4x^3 \quad + 2x^5 = 2, \\ \quad\quad\quad\quad x^4 + 2x^5 = 3. \end{cases}$$

Базисные неизвестные выделены.

Запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = 1 - 3x^3 - x^5, \\ x^2 = 2 - 4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 3 - x^5. \end{cases}$$

Если вместо x^3 и x^5 подставлять произвольные числа и вычислять x^1, x^2, x^4 по указанным формулам, то полученный набор чисел x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 будет представлять собой некоторое решение системы. Таким образом, полученные формулы доставляют нам описание всех решений исходной системы.

Положив $x^3 = c^1$, $x^5 = c^2$, решение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3c^1 - c^2 \\ 2 - 4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 3 - c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ЧРНС}} + \underbrace{c^1 \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{X_1} + c^2 \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{X_2}}_{\text{ОРОС}}.$$

Здесь ЧРНС отвечает нулевым значениям свободных переменных (такое ЧРНС называется базисным), а столбцы X_1, X_2 представляют собой НФСР ОСЛУ.

Итак, если СЛУ имеет упрощенный вид, то ее общее решение немедленно выписывается. Чтобы решить СЛУ произвольного вида, нужно с помощью элементарных преобразований привести ее к упрощенному виду.

Теорема.

Если в ОСЛУ число неизвестных больше числа уравнений, то она имеет нетривиальное решение.

◀ Если число неизвестных больше числа уравнений, то найдется свободная неизвестная, которая может принимать любые значения. ▶

2. Алгоритм Гаусса

Вместо преобразований СЛУ удобно выполнять преобразования расширенной матрицы этой СЛУ; при этом ЭП СЛУ соответствуют ЭП строк расширенной матрицы:

(1) перестановка двух строк местами;

(2) умножение любой строки на число $\alpha \neq 0$;

(3) прибавление к любой строке другой строки, умноженной на произвольное число;

(4) [удаление из матрицы нулевых строк.]

Говорят, что матрица имеет упрощенный вид, если она является расширенной матрицей СЛУ упрощенного вида. Матрица упрощенного вида имеет следующую структуру:

(1) некоторые ее столбцы являются последовательными столбцами единичной матрицы; эти столбцы отвечают базисным неизвестным СЛУ и также называются базисными;

(2) каждый из остальных столбцов является ЛК предыдущих базисных столбцов.

$$\begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}*\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}**\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}***\\0\\\vdots\\0\\0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}\dots\\\dots\\\dots\\\dots\\\ddots\\\dots\\\dots\\\dots\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\\vdots\\1\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}****\\\vdots*\\0\\0\end{matrix}
\end{pmatrix}$$

Опишем один шаг алгоритма Гаусса, который позволяет произвольную матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ привести к упрощенному виду.

ШАГ № k.

(1) Среди строк с номерами $k, \dots, m$ выбираем одну из строк с наименьшим количеством нулей, считая от начала строки; эту строку назовем разрешающей строкой (РС), а ее первый ненулевой элемент — разрешающим элементом (РЭ).

(2) Переставляем РС на k-е место.

(3) Разделим РС на РЭ; в полученной строке на месте РЭ будет стоять 1.

(4) Вычитаем из каждой строки матрицы РС, умноженную на элемент обрабатываемой строки, который стоит в одном столбце с РЭ. После этого столбец, содержащий РЭ, будет представлять собой k-й столбец единичной матрицы.

Процесс завершается, когда каждая строка матрицы уже побывала в роли РС или когда РС выбрать не удается.

Пример.

Привести к упрощенному виду матрицу

$$\begin{pmatrix}
0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2\\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1\\
3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Шаг 1. В качестве РС можно взять 2 или 4 строку; возьмем 2. РЭ $= 2$, делим РС на 2 и переставляем на первое место:

$$\begin{pmatrix}
0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2\\
\boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1\\
3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}
\boxed{1} & \frac12 & \frac12 & 0 & 0 & \frac12\\
0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2\\
0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1\\
3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Уничтожению подлежат все элементы первого столбца, кроме РЭ; такой элемент один — это 3. Выполняем ЭП: к 4-й строке добавляем 1-ю, умноженную на (-3):

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В качестве РС можно взять 2-ю, 3-ю или 4-ю. Возьмем 3-ю, переставим ее на второе место и разделим на (-1):

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Теперь нужно уничтожить все элементы 2-го столбца, кроме РЭ. Выполняем ЭП:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ * \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. В качестве РС можно взять только 4-ю строку. Умножаем ее на (-2) и переставляем на 3-е место:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уничтожаем все элементы 4-го столбца, кроме РЭ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Еще один шаг выполнить невозможно, так как четвертую строку нельзя выбрать в качестве РС: в ней нет ненулевых элементов. Процедура закончена.

Можно избежать появления дробей при выполнении ЭП, если сделать дополнительные ЭП.

Шаг 1. Вычтем из 4-й строки 2-ю (цель — получить 1 в одной из строк и выбрать эту строку в качестве РС):

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Первый элемент 4-й строки равен 1; эту строку берем в качестве РС, тогда РЭ = 1. Поменяем местами 1-ю и 4-ю строки:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Уничтожаем все элементы 1-го столбца, кроме РЭ; такой элемент один, это 2 во второй строке.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} * \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В качестве РС берем 2-ю строку; РЭ = 1. Уничтожаем все элементы 2-го столбца, кроме РЭ; это -1 и -2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. В качестве РС берем 3-ю строку, РЭ = 1, который стоит в 4-м столбце. Уничтожаем все элементы 4-го столбца, кромее РЭ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример.

Решить ОСЛУ

$$\begin{cases} \quad - 2x^2 + 6x^3 + 2x^4 + 8x^5 - 2x^6 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + x^3 + x^6 = 0 \\ \quad - x^2 + 3x^3 + x^4 + 4x^5 - x^6 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + 3x^3 + x^5 = 0 \end{cases}$$

Основная матрица этой ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица была приведена к упрощенному виду в предыдущем примере:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисные переменные этой ОСЛУ — x^1, x^2, x^4, свободные переменные — x^3, x^5, x^6. Получим НФСР ОСЛУ. Взяв $x^3 = 1$, $x^5 = x^6 = 0$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = -2, \\ x^2 = 3, \\ x^3 = 1, \\ x^4 = 0, \\ x^5 = 0, \\ x^6 = 0. \end{cases}$$

Взяв $x^3 = x^6 = 0$, $x^5 = 1$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = -1, \\ x^2 = 2, \\ x^3 = 0, \\ x^4 = -2, \\ x^5 = 1, \\ x^6 = 0. \end{cases}$$

Взяв $x^3 = x^5 = 0$, $x^6 = 1$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = 1, \\ x^2 = -3, \\ x^3 = 0, \\ x^4 = -2, \\ x^5 = 0, \\ x^6 = 1. \end{cases}$$

Итак, НФСР ОСЛУ имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + c^3 X_3,$$

где c^1, c^2, c^3 — произвольные числа.

НФМ ОСЛУ имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение ОСЛУ можно записать в виде

$$X = \Phi \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}.$$

2.1. **Элементарные преобразования и умножение матриц.** ЭП строк матрицы тесно связаны с операцией умножения матриц.

Теорема.

Пусть R — ЭП типа (1), (2) *или* (3) *строк матрицы B. Тогда*

$$R(B) = R(I) \cdot B.$$

Здесь $R(B)$ — матрица, полученная из B с помощью ЭП R, I — единичная матрица.

◀ Пусть $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Рассмотрим ЭП типа (1), т.е. перестановку строк матрицы B. Обозначим через C матрицу, полученную из B перестановкой строк с номерами k и l. Тогда

$$C^i = \begin{cases} B^i, & i \neq k,\ i \neq l, \\ B^l, & i = k, \\ B^k, & i = l. \end{cases}$$

При $i \neq k$, $i \neq l$ можем записать

$$C^i = B^i = \sum_{p=1}^{m} \delta^i_p B^p.$$

Строка из чисел δ^i_p имеет вид

$$(\delta^i_1, \delta^i_2, \ldots, \delta^i_i, \ldots, \delta^i_m) = (0, 0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$$

и представляет собой i-ю строку единичной матрицы.

При $i = k$ можно записать

$$C^k = B^l = \sum_{p=1}^{m} a^k_p B^p,$$

где набор чисел a^k_p следующий:

$$(a^k_1, a^k_2, \ldots, a^k_l, \ldots, a^k_m) = (0, 0, \ldots, \underset{l}{1}, \ldots, 0).$$

Он, очевидно, совпадает с l-й строкой единичной матрицы.

Аналогично, при $i = l$ можно записать

$$C^l = B^k = \sum_{p=1}^{m} a^l_p B^p,$$

где набор чисел a_p^l следующий:

$$(a_1^l, a_2^l, \ldots, a_k^l, \ldots, a_m^l) = (0, 0, \ldots, \underset{k}{1}, \ldots, 0).$$

Он совпадает с k-й строкой единичной матрицы.

При умножении матриц, $C = AB$, строки матрицы C являются линейными комбинациями строк матрицы B с коэффициентами, являющимися элементами строк матрицы A,

$$C^i = \sum_{p=1}^{m} a_p^i B^p.$$

Структура матрицы $A = (a_p^i)_m^m$ такова:

(1) все ее строки, кроме k-й и l-й, равны соответствующим строкам единичной матрицы;
(2) k-я строка матрицы A совпадает с l-й строкой единичной матрицы;
(3) l-я строка матрицы A совпадает с k-й строкой единичной матрицы.

Таким образом, матрица A получена из единичной матрицы I перестановкой k-й и l-й строк, а матрица C равна произведению AB.

Самостоятельно докажите утверждение теоремы для ЭП типов (2) и (3). ▶

Матрица A, о которой шла речь выше, называется матрицей элементарного преобразования.

Элементарные преобразования типов (1)–(3) обратимы, т.е. если матрица C может быть получена из матрицы B каким-либо ЭП, то и матрица B может быть получена из матрицы C некоторым ЭП преобразованием.

3. Вычисление обратной матрицы

Превратим матрицу B с помощью последовательности ЭП строк в единичную матрицу. Поскольку выполнение каждого ЭП эквивалентно умножению B слева на некоторую матрицу, видим, что

$$A_s A_{s-1} \ldots A_2 A_1 \cdot B = I.$$

Но это означает, что

$$A_s A_{s-1} \ldots A_2 A_1 = B^{-1}.$$

Если те же самые ЭП провести над единичной матрицей, то результатом окажется матрица B^{-1}. На практике это выполняется следующим образом:

$$(B \mid I) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} (I \mid B^{-1}).$$

Если вместо единичной матрицы взять некоторую матрицу D (причем не обязательно квадратную), то результатом будет

$$(B \mid D) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} (I \mid B^{-1}D).$$

Можно сформулировать аналогичную процедуру для ЭП столбцов:

$$\left(\frac{B}{I}\right) \xrightarrow{\text{ЭП столбцов}} \left(\frac{I}{B^{-1}}\right).$$

Если вместо I взять матрицу D (не обязательно квадратную), то

$$\left(\frac{B}{D}\right) \xrightarrow{\text{ЭП столбцов}} \left(\frac{I}{DB^{-1}}\right).$$

На практике выполнять ЭП столбцов неудобно, поэтому для вычисления матрицы DB^{-1} предпочтительнее пользоваться следующим алгоритмом:

$$\left(\frac{B}{D}\right) \xrightarrow{\text{транспонирование}}$$

$$(B^T \mid D^T) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} (I \mid (B^T)^{-1}D^T) = (I \mid (B^{-1})^T D^T)$$

$$\xrightarrow{\text{транспонирование}} \left(\frac{I}{DB^{-1}}\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T.$$

Докажите это соотношение самостоятельно.

4. Линейное пространство

4.1. **Определение.**

Линейное пространство (ЛП) $V(\mathbb{K})$ над числовым полем $\mathbb{K}$ — это множество V элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ произвольной природы (векторов), в котором введены две операции:

(A) сложение векторов

$$+ : V \times V \to V, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},$$

(B) умножение вектора на число

$$\bullet : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\alpha, \boldsymbol{x}) \mapsto \alpha \boldsymbol{x},$$

причем выполнены следующие аксиомы:

(1) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$$

(коммутативность сложения);

(2) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$:

$$\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$$

(ассоциативность сложения);

(3) $\exists \mathbf{0} \in V \ \forall \boldsymbol{x} \in V$:

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$$

(существование нулевого вектора);

(4) $\forall \boldsymbol{x} \in V \ \exists x' \in V$:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \mathbf{0}$$

(существование противоположного вектора);

(5) $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

(6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$:

$$(\alpha \cdot \beta)\boldsymbol{x} = \alpha \cdot (\beta \boldsymbol{x});$$

(7) $\forall\alpha\in\mathbb{K}$, $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$:

$$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$$

(дистрибутивность-1)

(8) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $\forall\boldsymbol{x}\in V$:

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$$

(дистрибутивность-2).

Запись $V(\mathbb{K})$ означает, что рассматривается ЛП V над ЧП $\mathbb{K}$.

4.2. **Примеры линейных пространств.**

1. $\mathbb{Q}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$; $\mathbb{R}(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$; $\mathbb{C}(\mathbb{C})$.

2. $\mathbb{Q}(\mathbb{R})$ — не ЛП. Объясните причину и приведите еще несколько аналогичных примеров.

3. Множества «геометрических векторов» на прямой V_1, на плоскости V_2, в пространстве V_3 — ЛП над $\mathbb{R}$.

4. $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как ЛП над различными ЧП (ср. пример 1). Приведите несколько примеров.

5. $\mathbb{K}^{m\times n}$ можно рассматривать как ЛП над различными ЧП (ср. пример 1). Приведите несколько примеров.

6. Множества $C(X)$, $C^p(X)$, состоящие из всех непрерывных (p раз непрерывно дифференцируемых) на открытом множестве $X\subset\mathbb{R}$ функций, можно рассматривать как ЛП над ЧП $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$. Операции:

$$\forall f,g\in C(X),\ \forall x\in X:\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x);$$
$$\forall f\in C(X),\ \forall\alpha\in\mathbb{K},\ \forall x\in X:\quad (\alpha\cdot f)(x)=\alpha\cdot f(x).$$

7. Множество $\mathrm{Pol}(n,\mathbb{K})$ всех полиномов степени не выше n с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е. функций вида

$$x(t)=a_0+a_1t^1+\dots+a_nt^n,$$

где $a_k\in\mathbb{K}$, $k=0,\dots,n$.

Вопрос. Является ли **ЛП** множество всех полиномов степени n? Ответ обоснуйте.

8. Множество $\mathrm{Trig}(n,\mathbb{K})$ всех тригонометрических полиномов порядка не выше n с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е. функций вида

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

где $a_0,a_k,b_k\in\mathbb{K}$, $k=1,\dots,n$.

Вопрос. Является ли **ЛП** множество всех тригонометрических полиномов порядка n? Ответ обоснуйте.

9. $V=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, операции заданы формулами:

$$\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V=\mathbb{R};$$
$$\alpha\odot\boldsymbol{x}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{x}^{\alpha},\quad \boldsymbol{x}\in V=\mathbb{R},\quad \alpha\in\mathbb{K}=\mathbb{R}.$$

Проверьте выполнение всех аксиом ЛП.

Этот пример показывает, что операции сложения элементов ЛП и умножения элемента ЛП на число могуь быть совершенно «не похожими» на «обычные» сложение и умножение.

4.3. **Простейшие свойства ЛП.**

Теорема.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — произвольное ЛП.

(1) *Нулевой элемент $\mathbf{0} \in V$ единствен.*

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ *противоположный элемент $\boldsymbol{x}'$ единствен.*

(3) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

(4) $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(5) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ *противоположный элемент $\boldsymbol{x}'$ равен $-1 \cdot \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.*

◀ (1) Допустим, что $\exists \mathbf{0}' \neq \mathbf{0}$ такой, что $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $\mathbf{0}' + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Положим $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; тогда $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. С другой стороны, по определению $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$. Итак, $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$.

(2) Пусть $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ — два различных противоположных элемента для $\boldsymbol{x}$. Тогда

$$\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}'' + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}'' + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}' = \mathbf{0} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'.$$

(3) Прибавим к обеим частям равенства $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ единственный противоположный элемент $\boldsymbol{z}'$ для элемента $\boldsymbol{z}$:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{y} + \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

(4)

$$0 \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = 0 \cdot \boldsymbol{x} + 1 \cdot \boldsymbol{x} = (0+1)\boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

(5) Положим $\boldsymbol{y} = (-1) \cdot \boldsymbol{x}$. Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 1 \cdot \boldsymbol{x} + (-1) \cdot \boldsymbol{x} = (1 + (-1))\boldsymbol{x} = 0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{y}$ — противоположный для $\boldsymbol{x}$. ▶

4.4. **Линейная комбинация.** Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$.

Линейная комбинация (ЛК) векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ с коэффициентами $\alpha^1, \ldots, \alpha^p \in \mathbb{K}$ — это выражение

$$\alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p \equiv \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \boldsymbol{x}_k.$$

ЛК векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ называется тривиальной, если все коэффициенты этой ЛК равны нулю, и нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Очевидно, тривиальная ЛК всегда равна нулевому вектору.

4.5. **Линейная зависимость и независимость.**

Векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ называются линейно зависимыми (ЛЗ), если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевому вектору.

Пример.

Рассмотрим ЛП $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

Элементы $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ЛЗ, так как существует нетривиальная ЛК этих векторов, равная $\mathbf{0}$:

$$-2 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ называются линейно независимыми (ЛН), если из равенства их ЛК нулевому вектору следует, что эта ЛК тривиальна.

Пример.

Рассмотрим ЛП $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

Векторы $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ЛН. Действительно,

$$\alpha^1 \boldsymbol{y}_1 + \alpha^2 \boldsymbol{y}_2 = \alpha^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Последний столбец может быть нулевым тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$.

4.6. **Линейная оболочка.** Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$.

Линейная оболочка (ЛО) векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — это множество всех ЛК этих векторов, т.е. множество

$$L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) = \left\{ \alpha^k \boldsymbol{x}_k \;\middle|\; \alpha^k \in \mathbb{K},\ k = 1, \ldots, p \right\}.$$

Теорема.

(1) *Если среди векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ имеется нулевой вектор, то эти векторы ЛЗ.*

(2) *Если система векторов $\boldsymbol{x}_1$, …, $\boldsymbol{x}_q$, $\boldsymbol{x}_{q+1}$, …, $\boldsymbol{x}_p$ содержит ЛЗ подсистему $\boldsymbol{x}_1$, …, $\boldsymbol{x}_q$, то вся система ЛЗ.*

(3) *Если векторы $\boldsymbol{x}_1$, …, $\boldsymbol{x}_p$ ЛЗ, то среди них имеется вектор, являющийся ЛК остальных векторов.*

(4) *Если $\boldsymbol{x} \in L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p)$, то*

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) = L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p).$$

◀ Пункты (1)–(3) докажите самостоятельно (см. аналогичную теорему для столбцов).

(4) Обозначим

$$L_1 = L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p), \quad L_2 = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p).$$

Требуется доказать, что $L_1 = L_2$, т.е. что

$$L_1 \subseteq L_2 \quad \text{и} \quad L_2 \subseteq L_1.$$

Первое вложение очевидно:

$$\boldsymbol{y} \in L_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} = \alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p =$$

$$= 0 \cdot \boldsymbol{x} + \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \boldsymbol{x}_k \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} \in L_2.$$

Докажем второе вложение. Имеем:

$$\boldsymbol{x} \in L_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta^p \boldsymbol{x}_p,$$

$$\boldsymbol{y} \in L_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x} + \alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p =$$

$$= \alpha(\beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta^p \boldsymbol{x}_p) + \alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p =$$

$$= (\alpha\beta^1 + \alpha^1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\alpha\beta^p + \alpha^p)\boldsymbol{x}_p$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{y} \in L_1. \qquad \blacktriangleright$$

4.7. **Размерность и базис ЛП.**

Размерность ЛП $V(\mathbb{K})$ — это целое неотрицательное число n, обладающее следующими свойствами:

(1) в V $\exists n$ ЛН векторов;

(2) любые $n+1$ векторов ЛЗ.

Обозначение: $n = \dim V$; пространство V называется n-мерным.

Если в ЛП V имеется как угодно много ЛН векторов, то V называется бесконечномерным, $\dim V = \infty$.

Базис ЛП $V(\mathbb{K})$ — это упорядоченный набор векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, обладающий следующими свойствами:

(1) векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ ЛН;

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ $\exists x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{K}$ такие, что

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x^k\boldsymbol{e}_k. \tag{1}$$

Числа $x^1, \ldots, x^n$ называются координатами (компонентами) вектора $\boldsymbol{x}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а формула (1) — разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Правило суммирования Эйнштейна: Если в некотором одночлене индекс появляется ровно два раза, один раз вверху и один раз внизу, то считается, что по этому индексу производится суммирование; пределы изменения индекса либо указываются, либо ясны из контекста. Пример: запись $x^k\boldsymbol{e}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ эквивалентна сумме (1).

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{p} x^k\boldsymbol{e}_k = \sum_{l=1}^{p} x^l\boldsymbol{e}_l,$$

имеем

$$x^k\boldsymbol{e}_k \equiv x^l\boldsymbol{e}_l, \quad k = 1, \ldots, p; \quad l = 1, \ldots, p.$$

Суммирование с символом Кронекера.

Символ Кронекера — это обозначение элементов единичной матрицы:

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ j = k, \\ 0, & \text{если} \ \ j \neq k. \end{cases}$$

Часто встречаются суммы вида $a_j\delta^j_k$, $b^k\delta^j_k$ и т. п. В развернутом виде первая из этих сумм имеет вид

$$a_1\delta^1_k + a_2\delta^2_k + \cdots + a_k\delta^k_k + \cdots + a_n\delta^n_k.$$

Из n слагаемых в этой сумме отлично от нуля лишь одно, а именно k-е, поэтому вся сумма равна a_k. Таким образом,

$$a_j\delta^j_k = a_k.$$

Теорема.

Разложение по базису единственно, т.е. $\forall \boldsymbol{x} \in V$ *его координаты* $x^1, \dots, x^n$ *определены однозначно.*

Условимся записывать координаты $x^1, \dots, x^n$ вектора $\boldsymbol{x}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ в виде столбца:

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \ \leftrightarrow \ \boldsymbol{x} \text{ в базисе } \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n.$$

Теорема.

Пусть в базисе $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ *линейного пространства* $V(\mathbb{K})$ *имеем*

$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix}, \quad \alpha\boldsymbol{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha x^1 \\ \vdots \\ \alpha x^n \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Теорема.

ЛП $V(\mathbb{K})$ *является* n*-мерным тогда и только тогда, когда оно имеет базис, состоящий из* n *векторов.*

◀ 1. Пусть $\dim V = n$. Тогда $\exists \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ — ЛН, но $\forall \boldsymbol{x} \in V$ векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ — ЛЗ, т.е. $\exists \alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha \boldsymbol{x} + \alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha^n \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}.$$

Ясно, что $\alpha \neq 0$; в противном случае получили бы

$$\alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha^n \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0},$$

что возможно лишь при $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$ (при этом $\alpha = 0$), противоречие. Таким образом,

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\alpha^1}{\alpha}\boldsymbol{x}_1 - \dots - \frac{\alpha^n}{\alpha}\boldsymbol{x}_n,$$

т.е. упорядоченный набор $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ является базисом в V.

2. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в V. Докажем, что любые $n+1$ векторов $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n+1}$ в V ЛЗ. Разложим каждый из этих векторов по базису:

$$\boldsymbol{x}_1 = x_1^1 \boldsymbol{e}_1 + x_1^2 \boldsymbol{e}_2 + \dots + x_1^n \boldsymbol{e}_n,$$
$$\dots$$
$$\boldsymbol{x}_{n+1} = x_{n+1}^1 \boldsymbol{e}_1 + x_{n+1}^2 \boldsymbol{e}_2 + \dots + x_{n+1}^n \boldsymbol{e}_n.$$

Составим матрицу, столбцами которой являются столбцы координат этих векторов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{n+1}^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix},$$

и рассмотрим ОСЛУ с этой матрицей в качестве основной матрицы. Поскольку число неизвестных в рассматриваемой ОСЛУ больше числа неизвестных, то она имеет нетривиальное решение, т.е. столбцы матрицы X линейно зависимы. ►

4.8. **Примеры.**

1. $\dim \mathbb{K}(\mathbb{K}) = 1$; базис состоит из одного элемента, в качестве которого можно взять любое ненулевое число из $\mathbb{K}$. Число 1 образует так называемый стандартный базис.

2. $\dim \mathbb{R}(\mathbb{Q}) = \infty$.

Задача: Объясните почему.

3. $\dim \mathbb{C}(\mathbb{R}) = 2$; базис состоит из двух элементов, в качестве которых можно взять два любых ненулевых комплексных числа, сумма которых не равна нулю. Стандартный базис образуют числа $1, i$.

Задача: Докажите.

4. $\dim \mathbb{K}^n(\mathbb{K}) = n$. Стандартный базис образуют столбцы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{R}) = 2n$. Стандартный базис состоит из столбцов

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_{n+1} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_{2n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}.$$

6. $\dim \mathbb{K}^{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$. Стандартный базис состоит из mn матриц

$$\boldsymbol{e}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m, \\ j = 1, \ldots, n, \end{array}$$

где единица стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца.

7. $\dim \mathrm{Pol}(n, \mathbb{K}) = n + 1$. Стандартный базис состоит из многочленов

$$\boldsymbol{e}_0 = 1, \quad \boldsymbol{e}_1 = t, \quad \boldsymbol{e}_2 = t^2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = t^n.$$

8. $\dim \mathrm{Trig}(n, \mathbb{K}) = 2n + 1$. Стандартный базис состоит из тригонометрических многочленов

$$\boldsymbol{e}_0 = 1, \quad \begin{array}{lll} \boldsymbol{e}_1 = \cos t, & \ldots, & \boldsymbol{e}_n = \cos nt, \\ \boldsymbol{e}_{-1} = \sin t, & \ldots, & \boldsymbol{e}_{-n} = \sin nt. \end{array}$$

5. Экзаменационные задачи

Задача 1. Известно, что столбец свободных членов линейной системы уравнений равен сумме столбцов ее основной матрицы. Указать какое-либо частное решение системы.

Задача 2. Известно, что столбец свободных членов линейной системы уравнений совпадает с последним столбцом ее основной матрицы. Указать какое-либо частное решение системы.

Задача 3. Пусть X, Y — столбцы решений систем уравнений $AX = P$, $AY = Q$ соответственно, α, β — некоторые числа. Какой системе уравнений удовлетворяет столбец $Z = \alpha X + \beta Y$?

Задача 4. Доказать, что если уравнения системы (Б) являются линейными комбинациями уравнений совместной линейной системы (А), то множество решений системы (Б) содержит множество решений системы (А).

Задача 5. Доказать, что присоединение к совместной системе линейных уравнений линейных комбинаций из ее уравнений заменяет систему на эквивалентную.

Задача 6. Как изменяются решения системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях столбцов основной матрицы?

Задача 7. Зная одну фундаментальную матрицу Ф, найти общий вид произвольной фундаментальной матрицы той же системы.

Задача 8. Описать все линейные комбинации решений данной неоднородной системы линейных уравнений, которые являются решениями той же системы.

Задача 9. Описать все линейные комбинации решений данной неоднородной системы линейных уравнений, которые являются решениями соответствующей однородной системы.

Задача 10. Пусть матрица получена из матрицы B элементарными преобразованиями строк. Доказать, что если столбцы матрицы B линейно независимы, то столбцы матрицы C также линейно независимы.

Задача 11. Пусть матрица получена из матрицы B элементарными преобразованиями строк. Доказать, что если между какими-либо столбцами матрицы B имеется линейная зависимость

$$\alpha_1 B^1 + \alpha_2 B^2 + \cdots + \alpha_k B^k = 0,$$

то соответствующие столбцы матрицы C связаны такой же линейной зависимостью:

$$\alpha_1 C^1 + \alpha_2 C^2 + \cdots + \alpha_k C^k = 0.$$