Лекция 8

1. Гомоморфизм и изоморфизм ЛП

Пусть $(V, \mathbb{K})$ (операции $+, \cdot$) и $(W, \mathbb{K})$ (операции $\oplus, \odot$) — два ЛП над одним и тем же ЧП $\mathbb{K}$.

Отображение $f : V \to W$ называется гомоморфизмом, если

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y) \quad \forall x, y \in V,$$
$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \odot f(x) \quad \forall x \in V, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Множество всех гомоморфизмов ЛП V, W обозначается $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Теорема.

Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм.

(1) $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$;

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in V$: $f(-x) = -f(x)$.

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

Изоморфизм ЛП V и W — это взаимно однозначный гомоморфизм. ЛП V и W называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : V \to W$; в этом случае пишут $V \simeq W$.

Теорема.

Пусть $V \simeq W$, $f : V \to W$ — изоморфизм.

(1) $\forall \boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_V$: $f(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}_W$.

(2) *Если $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — ЛН векторы, то векторы $f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_p) \in W$ также ЛН.*

(3) *Если $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — ЛЗ векторы, причем нетривиальная ЛК этих векторов, равная $\mathbf{0}_V$, имеет коэффициенты $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$, то векторы $f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_p) \in W$ также ЛЗ, причем нетривиальная ЛК этих векторов, равная $\mathbf{0}_W$, имеет те же коэффициенты $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$.*

◀ (1) Пусть $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_V$. Предположим, что $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W$. Имеем:

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W = 0 \cdot \boldsymbol{y} = 0 \cdot f(\boldsymbol{z}) = f(0 \cdot \boldsymbol{z}) = f(\mathbf{0}_V).$$

Таким образом, в силу взаимной однозначности отображения f, получаем $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_V$; противоречие.

(2) Пусть $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — ЛН векторы. Предположим, что векторы $f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_p) \in W$ ЛЗ, т.е. $\exists \beta^1, \ldots, \beta^p \in \mathbb{K}$, не все равные 0, такие, что

$$\beta^1 f(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \beta^p f(\boldsymbol{x}_p) = \mathbf{0}_W.$$

Имеем

$$\beta^1 f(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \beta^p f(\boldsymbol{x}_p) = \mathbf{0}_W = f(\beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta^p \boldsymbol{x}_p),$$

откуда

$$\beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta^p \boldsymbol{x}_p = \mathbf{0}_V,$$

т.е. векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ ЛЗ; противоречие.

(3) Докажите самостоятельно. ▶

Отметим, что отношение изоморфности ЛП обладает следующими свойствами:

(1) $V \simeq V$;

(2) $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$;

(3) если $V \simeq W$ и $W \simeq U$, то $V \simeq U$.

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП над ЧП $\mathbb{K}$, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в V. Отображение $f : V \to \mathbb{K}^n$, ставящее в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x} \in V$ столбец его координат, является изоморфизмом ЛП V и $\mathbb{K}^n$, $V \simeq \mathbb{K}^n$.

Теорема.

Все ЛП одной размерности над одним и тем же ЧП изоморфны.

Задача: Докажите эти теоремы самостоятельно.

Задача: Докажите, что если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в ЛП V, то $V = L(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Обратное утверждение неверно: если $V = L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p)$, то нельзя утверждать, что векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ образуют базис в V. Объясните почему.

2. Линейное подпространство

2.1. **Определение.** Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП. Подмножество $P \subset V$ называется *линейным подпространством* (ЛПП) пространства V, если выполнены следующие условия:

(1) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P$: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in P$;

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in P$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\alpha \boldsymbol{x} \in P$.

В любом ЛП V имеются тривиальные ЛПП: $\{\mathbf{0}\}$ и V.

Обозначения:

- $P \subset V \iff P$ является подмножеством V;
- $P \Subset V \iff P$ является нетривиальным ЛПП V.

Теорема.

Пусть V — ЛП над ЧП $\mathbb{K}$ и $P \Subset V$. Тогда P тоже является ЛП над ЧП $\mathbb{K}$.

Задача: Докажите теорему самостоятельно.

2.2. **Примеры ЛПП.**

1. $V_1 \Subset V_2 \Subset V_3$.

2. $\mathbb{R}(\mathbb{R}) \Subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$; $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}) \Subset \mathbb{C}^n(\mathbb{R})$.

Задача. Найдите размерность и базис этих ЛПП.

3. Подмножество в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$, состоящее из столбцов, сумма элементов которых равна нулю, является ЛПП в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$.

Задача. Найдите размерность и базис этого ЛПП.

4. В ЛП $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n линейными подпространствами являются следующие подмножества.

(1) Подмножество симметричных матриц

$$S\mathbb{K}^{n\times n} = \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; A^T = A \right\}$$

(символ ^{T} означает транспонирование).

(2) Подмножество кососимметричных матриц

$$A\mathbb{K}^{n\times n} = \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; A^T = -A \right\}.$$

(3) Подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом:

$$P = \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; \operatorname{tr} A = 0 \right\}.$$

Замечание: след $\operatorname{tr} A$ квадратной матрицы A — это сумма ее диагональных элементов.

$$\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_k^k.$$

Задача. Найдите размерность и базис каждого из указанных ЛПП.

5. В ЛП $\operatorname{Pol}(n, \mathbb{K})$ подпространствами являются множества

$$S\operatorname{Pol}(n,\mathbb{K}) = \left\{ x(t) \in \operatorname{Pol}(n,\mathbb{K}) \;\middle|\; x(-t) = x(t) \right\},$$
$$A\operatorname{Pol}(n,\mathbb{K}) = \left\{ x(t) \in \operatorname{Pol}(n,\mathbb{K}) \;\middle|\; x(-t) = -x(t) \right\},$$

состоящие из четных и нечетных многочленов.

Задача. Найдите размерность и базис каждого из указанных ЛПП.

6. Рассмотрим ОСЛУ

$$AX = O,$$

где $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{K}^n$, $O \in \mathbb{K}^m$. Известно, что для любых решений X_1, X_2 столбец $c^1 X_1 + c^2 X_2$ также является решением. Это означает, что множество всех решений ОСЛУ представляет собой ЛПП в $\mathbb{K}^n$. ФСР ОСЛУ представляет собой базис этого ЛПП.

7. Любая ЛО является ЛПП.

Теорема.

Пусть $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$. *Тогда* $L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) \Subset V$.

◀ Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) \Subset V$, т.е.

$$\boldsymbol{x} = \alpha^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha^p \boldsymbol{x}_p,$$
$$\boldsymbol{y} = \beta^1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta^p \boldsymbol{x}_p.$$

Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\alpha^1 + \beta^1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\alpha^p + \beta^p)\boldsymbol{x}_p,$$

т.е. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) \Subset V$. Завершите доказательство самостоятельно. ▶

2.3. **Пополнение базиса.**

Теорема.

Пусть

$$P \Subset V, \quad \dim P = p < \dim V = n,$$

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ *— базис в* P. *Тогда* $\exists \boldsymbol{e}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in V \setminus P$ *такие, что*

$$\boldsymbol{e}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_p,\ \boldsymbol{e}_{p+1},\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n$$

— базис в V.

◀ Так как $p < n$, то $\exists \boldsymbol{e}_{p+1} \in V$ такой, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_{p+1}$ ЛН; при этом $\boldsymbol{e}_{p+1} \notin P$, так как в противном случае получили бы $\dim P > p$.

Если $p + 1 = n$, пополнение базиса завершено. Если $p + 1 < n$, продолжаем процесс. ▶

2.4. **Пересечение и сумма ЛПП.**

Теорема.

Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P \cap Q \Subset V$.

◀ Проверим выполнение требований определения:

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P \cap Q \iff \begin{cases} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P \\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Q \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in P \\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in Q \end{cases} \iff \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in P \cap Q.$$

Второе условие проверяется аналогично. ▶

Замечание. Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P \cup Q$ не является, вообще говоря, ЛПП.

Задача. Приведите соответствующий пример.

Суммой $P + Q$ ЛПП $P, Q \Subset V$ называется ЛО всевозможных векторов вида $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x} \in P$, $\boldsymbol{y} \in Q$, т.е.

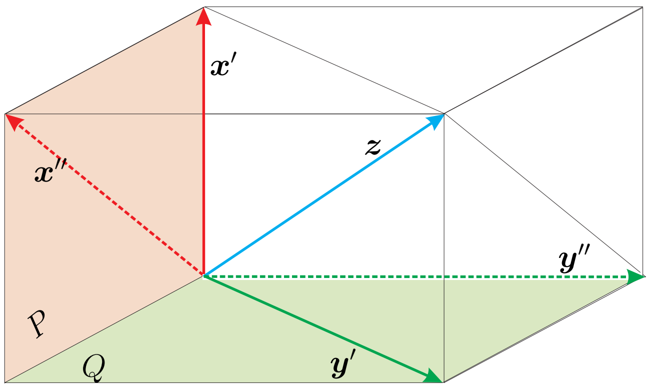
$$P + Q = \left\{ \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \boldsymbol{x} \in P,\ \boldsymbol{y} \in Q \right\}.$$

Таким образом, $\forall \boldsymbol{z} \in P + Q$: $\exists \boldsymbol{x} \in P$, $\exists \boldsymbol{y} \in Q$ такие, что $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

Теорема.

Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P + Q \Subset V$.

Задача. Докажите теорему.



$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{y}''.$$

Теорема.

Пусть V — ЛП, $P \Subset V$, $Q \Subset V$. Тогда

$$\boxed{\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q).} \tag{1}$$

◀ Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ — базис в $P \cap Q$, $\dim(P \cap Q) = r$;
$\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p$ — его дополнение до базиса в P, $\dim P = r + p$;
$\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q$ — его дополнение до базиса в Q, $\dim Q = r + q$.

Тогда все эти векторы образуют базис в $P + Q$ (объясните почему), и

$$\dim(P + Q) = r + p + q = (p + r) + (q + r) - r =$$

$$= \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q). \qquad ▶$$

2.5. **Прямая сумма ЛПП.**

Пусть $V(\mathbb{K})$ — ЛП, $P \Subset V$, $Q \Subset V$. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{z} \in P + Q$ существуют такие $\boldsymbol{x} \in P$, $\boldsymbol{y} \in Q$, что $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Такое разложение, вообще говоря, не единственно. Если же оно единственно, то сумма ЛПП называется прямой суммой; $P \oplus Q$.

Теорема.

Сумма ЛПП P и Q является прямой суммой тогда и только тогда, когда $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$.

◀ 1. Пусть $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$. Тогда базиса в $P \cap Q$ не существует, а базисы в P и Q суть

$$\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p, \qquad \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q,$$

где $p = \dim P$, $q = \dim Q$. Базис в $P+Q$ состоит из всех этих векторов, поэтому $\forall \boldsymbol{z} \in P+Q$ имеем

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{x^1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + x^p \boldsymbol{f}_p}_{=\boldsymbol{x}} + \underbrace{y^1 \boldsymbol{g}_1 + \cdots + y^q \boldsymbol{g}_q}_{=\boldsymbol{y}}.$$

Это разложение единственно (единственность разложения по базису) $\Rightarrow P + Q = P \oplus Q$.

2. Пусть $P + Q = P \oplus Q$. Докажем, что $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$.

Предположим противное, т.е. допустим, что $\exists \boldsymbol{v} \in P \cap Q$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. Тогда $\boldsymbol{v} \in P$, $\boldsymbol{v} \in Q$ и $\forall \boldsymbol{z} \in P \oplus Q$ имеем

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \underbrace{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}}_{\in P} + \underbrace{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}}_{\in Q},$$

т.е. разложение вида $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ не единственно; противоречие. ▶

Задача. Докажите, что

$$\mathbb{K}^{n\times n} = S\mathbb{K}^{n\times n} \oplus A\mathbb{K}^{n\times n}.$$

Задача. Докажите, что

$$\operatorname{Pol}(n) = S \operatorname{Pol}(n) \oplus A \operatorname{Pol}(n).$$

2.6. **Ядро и образ гомоморфизма.**

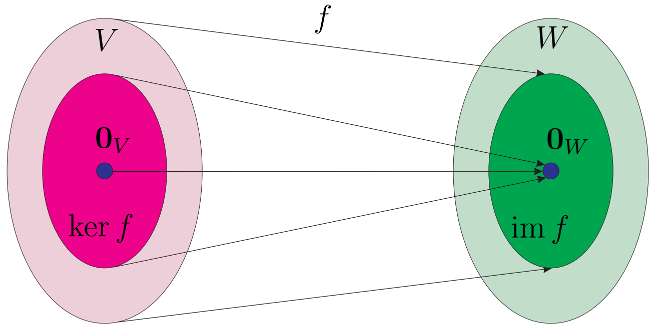
Пусть $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ — два ЛП над ЧП $\mathbb{K}$, $f : V \to W$ — гомоморфизм.

Ядро $\ker f$ гомоморфизма f — это множество векторов из V

$$\ker f = \Big\{ \boldsymbol{x} \in V \;\Big|\; f(x) = \mathbf{0}_W \Big\}.$$

Образ $\operatorname{im} f$ гомоморфизма f — это множество векторов из W

$$\operatorname{im} f = \Big\{ \boldsymbol{y} \in W \;\Big|\; \exists \boldsymbol{x} \in V : \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \Big\}.$$



Теорема.

Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм ЛП. Тогда

$$\ker f \Subset V, \qquad \operatorname{im} f \Subset W.$$

◀ 1. Проверим, что $\ker f \Subset V$. Имеем:

$$\boldsymbol{x} \in \ker f \iff f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W,$$
$$\boldsymbol{y} \in \ker f \iff f(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_W;$$

поэтому

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_W \iff \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \ker f.$$

Завершите доказательство самостоятельно. ▶

Теорема.

Пусть $f : V \to W$ *— гомоморфизм ЛП.*

$$\boxed{\dim\ker f + \dim\operatorname{im} f = \dim V.} \tag{2}$$

◀ Пусть $\dim V = n$, $\dim\ker f = p$, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ — базис в $\ker f$, $\boldsymbol{e}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — его дополнение до базиса в V.

Имеем $f(\boldsymbol{e}_1) = \cdots = f(\boldsymbol{e}_p) = \mathbf{0}_W$.

Докажем, что векторы $\boldsymbol{f}_{p+1} = f(\boldsymbol{e}_{p+1})$, …, $\boldsymbol{f}_n = f(\boldsymbol{e}_n)$ образуют базис в $\operatorname{im} f$.

Предположим, что эти векторы ЛЗ, т.е. $\exists \alpha^{p+1}, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{K}$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha^{p+1}\boldsymbol{f}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{f}_n = \mathbf{0}_W.$$

В таком случае

$$\begin{aligned}\mathbf{0}_W &= \alpha^{p+1}\boldsymbol{f}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{f}_n = \\ &= \alpha^{p+1} f(\boldsymbol{e}_{p+1}) + \cdots + \alpha^n f(\boldsymbol{e}_n) = \\ &= f(\alpha^{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{e}_n),\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\alpha^{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}_V,$$

что противоречит линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Таким образом, векторы $\boldsymbol{f}_{p+1} = f(\boldsymbol{e}_{p+1})$, …, $\boldsymbol{f}_n = f(\boldsymbol{e}_n)$ ЛН.

Далее, $\forall \boldsymbol{y} \in \operatorname{im} f\ \exists \boldsymbol{x} \in V$ такой, что $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$. Имеем:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= x^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x^p\boldsymbol{e}_p + x^{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n, \\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) &= \underbrace{x^1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x^p f(\boldsymbol{e}_p)}_{=\mathbf{0}_W} + x^{p+1} f(\boldsymbol{e}_{p+1}) + \cdots + x^n f(\boldsymbol{e}_n) = \\ &= x^{p+1}\boldsymbol{f}_{p+1} + \cdots + x^n \boldsymbol{f}_n,\end{aligned}$$

т.е. любой вектор $\boldsymbol{y} \in W$ может быть разложен в ЛК векторов $\boldsymbol{f}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_n$. Таким образом, векторы $\boldsymbol{f}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ образуют базис в $\operatorname{im} f$ и, следовательно, $\dim\operatorname{im} f = n - p$.

Итак,

$$\dim V = n = p + (n-p) = \dim\ker f + \dim\operatorname{im} f. \qquad ▶$$

2.7. **Ядро и образ матрицы.**

Соотношение

$$AX = Y, \quad A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad X \in \mathbb{K}^n, \quad Y \in \mathbb{K}^m,$$

можно рассматривать как отображение

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad X \mapsto Y,$$

задаваемое матрицей A. Очевидно, это отображение является гомоморфизмом ЛП $\mathbb{K}^n$ и $\mathbb{K}^m$.

Тогда задача решения ОСЛУ

$$AX = O$$

эквивалентна нахождению ядра $\ker A$ этого гомоморфизма, которое называют также ядром матрицы A.

Образ указанного гомоморфизма называют образом матрицы A. Так как столбец $Y = AX$ представляет собой ЛК столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам столбца X, ясно, что образ матрицы есть не что иное, как линейная оболочка ее столбцов.

3. Ранг матрицы

3.1. **Линейная оболочка строк матрицы.**

Теорема.

При ЭП строк размерность ЛО ее строк не меняется.

◀ Пусть матрица B получена из матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ с помощью ЭП строк. Это означает, что каждая строка матрицы B является некоторой ЛК строк матрицы A, так что

$$L(B^1, \ldots, B^m) \Subset L(A^1, \ldots, A^m).$$

Поскольку ЭП строк обратимы, то

$$L(A^1, \ldots, A^m) \Subset L(B^1, \ldots, B^m).$$

Таким образом,

$$L(A^1, \ldots, A^m) = L(B^1, \ldots, B^m) \iff$$

$$\iff \dim L(A^1, \ldots, A^m) = \dim L(B^1, \ldots, B^m). \qquad ▶$$

3.2. **Линейная оболочка столбцов матрицы.**

Линейная оболочка столбцов матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ — это образ гомоморфизма

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad X \mapsto AX.$$

Теорема.

При ЭП строк размерность ЛО ее столбцов не меняется.

◀ Рассмотрим ОСЛУ с матрицей $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$AX = O$$

Множество ее решений — это ядро $\ker A$ матрицы A. Поскольку при ЭП строк СЛУ переходит в эквивалентную СЛУ, для любой матрицы B, полученной из A такими ЭП, имеем

$$\ker B = \ker A.$$

Поэтому

$$\dim \operatorname{im} B = \dim \mathbb{K}^n - \dim \ker B = \dim \mathbb{K}^n - \dim \ker A = \dim \operatorname{im} A.$$

▶

3.3. **Ранг матрицы.**

Теорема.

Для любой матрицы A размерность ЛО ее строк равна размерности ЛО ее столбцов.

◀ Приведем матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ к упрощенному виду с помощью ЭП строк; размерности ЛО строк и столбцов полученной матрицы B равны размерностям соответствующих ЛО для матрицы A. В матрице B сделаем ЭП типа (4), т.е. удалим из нее нулевые строки; получим матрицу $C \in \mathbb{K}^{r\times n}$, где $r \leqslant m$.

Рассматривая ОСЛУ с матрицей C, видим, что в каждом уравнении имеется базисная неизвестная. Поэтому строки матрицы C ЛН. Таким образом, размерность ЛО строк матрицы C равна количеству базисных неизвестных и равно количеству уравнений r.

Количество свободных неизвестных в системе равно $n-r$, поэтому ФСР ОСЛУ состоит из $n-r$ столбцов, т.е. размерность пространства решений ОСЛУ, равная размерности ядра матрицы, также равна $n-r$. Размерность же ЛО столбцов, равная размерности образа матрицы, равна $n-(n-r)=r$. ▶

Ранг матрицы — это размерность ЛО ее строк (столбцов). Обозначение: $\operatorname{rk} A$.

3.4. **Ранг произведения матриц.**

Теорема.

$$\operatorname{rk}(AB) \leqslant \operatorname{rk} A, \qquad \operatorname{rk}(AB) \leqslant \operatorname{rk} B.$$

◀ Поскольку столбцы матрицы AB суть линейные комбинации столбцов матрицы A, получаем

$$L(C_1,\dots,C_p) \Subset L(A_1,\dots,A_m) \quad \Rightarrow$$

$$\dim L(C_1,\dots,C_p) \leqslant \dim L(A_1,\dots,A_m). \qquad \blacktriangleright$$

3.5. **Теорема Кронекера—Капелли.**

Теорема.

Система линейных уравнений

$$AX = B$$

совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}[A|B].$$

◀ Совместность системы

$$AX = B \iff A_1x^1 + A_2x^2 + \dots + A_nx^n = B$$

означает, что

$$B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

т.е.

$$L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = L(B, A_1, A_2, \ldots, A_n),$$

так что размерности этих линейных оболочек совпадают. ▶

4. Экзаменационные задачи

Задача 1. Доказать, что подмножество в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$, состоящее из столбцов, сумма элементов которых равна нулю, является линейным подпространством в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 2. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество $S\mathbb{K}^{n\times n}$ симметричных матриц является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 3. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество $A\mathbb{K}^{n\times n}$ кососимметричных матриц является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 4. Доказать, что $\mathbb{K}^{n\times n} = S\mathbb{K}^{n\times n} \oplus A\mathbb{K}^{n\times n}$.

Задача 5. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество матриц с нулевым следом является линейным подпространством. (След матрицы — это сумма ее диагональных элементов.) Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

Задача 6. Доказать, что сумма L двух линейных подпространств P и Q тогда и только тогда будет прямой суммой, когда хотя бы один вектор $\boldsymbol{x} \in L$ однозначно представляется в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{y} \in P$, $\boldsymbol{z} \in Q$.

Задача 7. Пусть P и Q — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства V. Доказать, что если $\dim P + \dim Q > \dim V$, то пересечение $P \cap Q$ содержит ненулевой вектор.

Задача 8. Пусть P и Q — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства V. Доказать, что если $\dim(P + Q) = \dim(P \cap Q) + 1$, то одно из этих подпространств содержится в другом.

Задача 9. Доказать, что для любого линейного подпространства P конечномерного линейного пространства V существует другое подпространство Q такое, что $V = P \oplus Q$.

Задача 10. Пусть A, B, C — три линейных подпространства конечномерного линейного пространства V, $P = (A \cap C) + (B \cap C)$, $Q = (A + B) \cap C$. Доказать, что $P \subseteq Q$. Привести пример, когда $P \neq Q$.

Задача 11. Доказать, что если в n-мерном комплексном линейном пространстве V рассматривать умножение векторов лишь на вещественные числа, то получим $2n$-мерное вещественное линейное пространство $V^{\mathbb{R}}$. (Описанная процедура называется овеществлением комплексного линейного пространства.) Исходя из базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства V, построить базис пространства $V^{\mathbb{R}}$.