

# Лекция 9

## 1. АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Для построения полноценной геометрии одних векторов недостаточно, необходимы еще точки. Пространство, состоящее из точек, и называется аффинным (или точечным) пространством; сокращение — АП. Определение АП получается при помощи аксиоматизации построения вектора по двум точкам.

### 1.1. Определение аффинного пространства.

Аффинное пространство — это множество  $\mathcal{A}$  элементов произвольной природы (точек), для которого заданы:

(А) некоторое линейное пространство  $V$ , над числовым полем  $\mathbb{K}$ , называемое ассоциированным с АП  $\mathcal{A}$ ;

(В) отображение

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V,$$

которое ставит в соответствие каждой упорядоченной паре точек  $A, B \in \mathcal{A}$  некоторый вектор из  $V$ , обозначаемый  $\overrightarrow{AB}$  (точка  $A$  называется началом, точка  $B$  — концом вектора  $\overrightarrow{AB}$ ).

При этом должны быть выполнены следующие аксиомы:

(1) для любой точки  $A \in \mathcal{A}$  и любого вектора  $\mathbf{a} \in V$  существует единственная точка  $B \in \mathcal{A}$  такая, что  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ;

(2) для любых трех точек  $A, B, C \in \mathcal{A}$  выполняется соотношение

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Символом  $\mathcal{A}(V, \mathbb{K})$  обозначаем АП  $\mathcal{A}$  с ассоциированным ЛП  $V$  над ЧП  $\mathbb{K}$ .

Размерность  $\dim V$  ассоциированного ЛП  $V$  называется размерностью АП  $\mathcal{A}$  и обозначается  $\dim \mathcal{A}$ .

Полагая  $A = B = C$ , получаем

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}.$$

Полагая  $A = C$ , получаем

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

### 1.2. Аффинная геометрия.

Основные неопределяемые понятия: точка, вектор.

Основные неопределяемые отношения между понятиями:

(1) отношение между тремя векторами  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ;

(2) отношение между двумя векторами и числом:  $\mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{a}$ ;

(3) отношение между двумя точками и вектором:  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ .

Эти отношения удовлетворяют восьми «векторным» и двум «аффинным» аксиомам.

Отметим, что в аффинном пространстве отсутствуют понятия длины вектора, угла между векторами, скалярного, векторного и смешанного произведения векторов.

### 1.3. Примеры аффинных пространств.

1. Пусть  $V$  — ЛП. Определим АП, полагая  $\mathcal{A} = V$  и  $\overrightarrow{ab} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ . Проверим выполнение аксиом АП:

(1) для любой «точки»  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$  и любого вектора  $\mathbf{c} \in V$  «точка»  $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  является единственной точкой, для которой  $\overrightarrow{ab} = \mathbf{c}$ ;

(2) для любых трех «точек»  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  имеем

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac} \iff (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{c} - \mathbf{a}.$$

Таким образом, любое ЛП можно рассматривать как АП.

2. Множество  $\mathbb{K}^n$  можно рассматривать как АП с ассоциированным ЛП  $\mathbb{K}^n$ . Если  $A = (a^1, \dots, a^n)^T$  и  $B = (b^1, \dots, b^n)^T$  — две точки из АП  $\mathbb{K}^n$ , то вектор  $\overrightarrow{AB}$  из ЛП  $\mathbb{K}^n$  определяется как

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b^1 - a^1 \\ \vdots \\ b^n - a^n \end{pmatrix}.$$

### 1.4. Изоморфизм аффинных пространств.

Изоморфизм аффинных пространств  $\mathcal{A}(V, \mathbb{K})$  и  $\mathcal{B}(W, \mathbb{K})$  — это взаимно однозначное отображение

$$\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B},$$

рассматриваемое вместе с некоторым изоморфизмом ассоциированных ЛП

$$\varphi : V \rightarrow W,$$

обладающее следующим свойством: для любых точек  $A, B \in \mathcal{A}$

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\psi(A)\psi(B)}.$$

#### Теорема.

Любое АП  $\mathcal{A}$  изоморфно ассоциированному ЛП  $V$ , рассматриваемому как АП.

◀ Выберем в  $\mathcal{A}$  произвольную точку  $O$ , называемую началом координат, и для произвольной точки  $A$  положим

$$\psi : \mathcal{A} \rightarrow V, \quad \psi(A) = \overrightarrow{OA}. \quad (1)$$

Очевидно, это отображение является изоморфизмом аффинных пространств  $\mathcal{A}$  и  $V$ ; при этом соответствующий изоморфизм ассоциированных ЛП — это тождественное отображение  $\varphi : V \rightarrow V$ ,  $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ . ▶

Вектор, определяемый соотношением (1), называется радиус-вектором точки  $A$  относительно начала координат  $O$ .

#### Теорема.

Любое АП  $\mathcal{A}$  размерности  $n$  изоморфно АП  $\mathbb{K}^n$ .

#### Теорема.

Все АП над одним и тем же ЧП, имеющие одинаковую размерность, изоморфны.

В этом состоит полнота аксиом аффинной геометрии: они однозначно (с точностью до изоморфизма) определяют соответствующее АП.

### 1.5. Аффинная система координат.

Аффинная система координат (АСК) в АП  $\mathcal{A}(V, \mathbb{K})$  — это набор, состоящий из точки  $O \in \mathcal{A}$ , называемой началом координат, и базиса  $e_1, \dots, e_n \in V$ . Обозначение:  $Oe_1 \dots e_n$ .

Каждая АСК определяет некоторый изоморфизм

$$\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad A \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix},$$

называемый координатным изоморфизмом. Числа  $a^1, \dots, a^n$  называются координатами точки  $A$  в АСК  $Oe_1 \dots e_n$ . Эти координаты являются не чем иным, как координатами радиус-вектора  $\overrightarrow{OA}$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ :

$$\overrightarrow{OA} = a^1 e_1 + \dots + a^n e_n.$$

## 2. ПЛОСКОСТИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

### 2.1. Определения.

$k$ -Мерная плоскость ( $k$ -плоскость) в  $n$ -мерном АП — это множество точек, определяемых уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^1 \mathbf{a}_1 + \dots + t^k \mathbf{a}_k,$$

где  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  — ЛН векторы, называемые направляющими векторами плоскости,  $\mathbf{r}_0$  — точка, называемая начальной (опорной) точкой плоскости.

Направлением  $k$ -мерной плоскости называется ЛО ее направляющих векторов:  $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ .

Уравнение  $k$ -плоскости совпадает по виду со структурой общего решения НСЛУ, причем направление этой плоскости — не что иное, как общее решение соответствующей ОСЛУ. Поэтому каждая  $k$ -плоскость может быть задана с помощью НСЛУ. Минимальное число уравнений в системе равно рангу матрицы системы и равно  $n - k$ .

Частные случаи:

- (1) 1-плоскость в двумерном АП — это прямая на плоскости; она задается одним направляющим вектором  $\mathbf{a}$  и имеет уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}.$$

- (2) 1-плоскость в трехмерном АП — это прямая в пространстве; задается одним направляющим вектором  $\mathbf{a}$  и имеет уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}.$$

- (3) 2-плоскость в трехмерном АП; задается двумя направляющими векторами  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и имеет уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}.$$

Разность  $n - k$  называется коразмерностью  $k$ -плоскости.

$(n - 1)$ -Плоскости, т.е.  $k$ -плоскости коразмерности 1 называются гиперплоскостями. 1-Плоскость в двумерном АП (прямая на плоскости) и 2-плоскость в трехмерном АП (плоскость в пространстве) — примеры гиперплоскостей.

Гиперплоскость может быть задана одним уравнением вида

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = B.$$

## 2.2. Параллельность многомерных плоскостей.

Пусть в  $n$ -мерном АП даны две плоскости:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t^1 \mathbf{a}_1 + \cdots + t^k \mathbf{a}_p, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s^1 \mathbf{b}_1 + \cdots + s^p \mathbf{b}_q$$

разных, вообще говоря, размерностей. Обозначим направления этих плоскостей

$$P = L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p), \quad \dim P = p, \quad Q = L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_q), \quad \dim Q = q.$$

Будем считать, что  $p \leq q$ .

Плоскости называются параллельными, если

$$P \subseteq Q.$$

Параллельные плоскости могут иметь общие точки; в этом случае говорят, что

- (1) плоскости совпадают, если их размерности равны;
- (2) плоскость меньшей размерности содержится в плоскости большей размерности.

## 2.3. Скрещивающиеся плоскости.

Говорят, что  $p$ -плоскость с направлением  $P$  и  $q$ -плоскость с направлением  $Q$ ,  $p \leq q$ ,  $P \not\subseteq Q$ , скрещиваются вдоль направления  $R$ , если они не имеют общих точек и

$$P \cap Q = R.$$

Так как  $P \not\subseteq Q$ , то  $\dim(P \cap Q) < p$ ; поскольку для любых подпространств

$$\dim(P \cup Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q),$$

имеем

$$\dim(P \cap Q) = p + q - \dim(P \cup Q) \geq p + q - n.$$

Итак, в  $n$ -мерном АП  $p$ -плоскость и  $q$ -плоскость,  $p \leq q$ , могут скрещиваться вдоль подпространства, размерность которого заключена в пределах

$$\max(p + q - n, 0) \leq \dim(P \cap Q) \leq p - 1.$$

В 2-мерном АП (на плоскости) не бывает скрещивающихся 1-плоскостей (прямых).

В 3-мерном АП (в пространстве) существуют 1-плоскости (прямые), скрещивающиеся вдоль 0-мерных направлений.

Анализ взаимного расположения двух плоскостей

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t^1 \mathbf{a}_1 + \cdots + t^k \mathbf{a}_p, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s^1 \mathbf{b}_1 + \cdots + s^p \mathbf{b}_q$$

в АП сводится к анализу системы уравнений

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t^1 \mathbf{a}_1 + \cdots + t^k \mathbf{a}_p = \mathbf{r}_2 + s^1 \mathbf{b}_1 + \cdots + s^p \mathbf{b}_q$$

относительно переменных  $t^1, \dots, t^p, s^1, \dots, s^q$ .

## 3. ДВУМЕРНОЕ АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Двумерное АП называем плоскостью, 1-плоскость — прямой.

### 3.1. Уравнение прямой на плоскости.

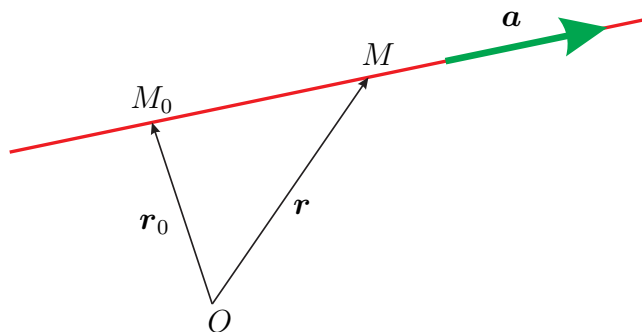
Векторное уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$$

в произвольной системе координат примет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \end{cases}$$

где  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ ,  $\mathbf{a} = (l, m)$ .



Исключив параметр  $t$ , получим

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой на плоскости. В знаменателях допускаются нули; в этом случае соотношение следует «перемножить крест-накрест», как пропорцию.

### 3.2. Расположение двух прямых на плоскости.

Пусть на плоскости заданы две прямые

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + s\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - t\mathbf{a}_2$$

(направляющий вектор второй прямой выбран в виде  $-\mathbf{a}_2$ ). Изучим множество их общих точек; для этого проанализируем уравнение

$$\mathbf{r}_1 + s\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_2 - t\mathbf{a}_2 \quad \Leftrightarrow \quad s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

В произвольной системе координат это векторное уравнение примет вид НСЛУ

$$s \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{a}_1 = (l_1, m_1)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (l_2, m_2)^T$ ,  $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2)^T$ .

Расширенная матрица этой НСЛУ имеет вид

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x_2 - x_1 \\ m_1 & m_2 & y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим ранги основной и расширенной матриц через

$$r = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x_2 - x_1 \\ m_1 & m_2 & y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Возможны следующие случаи:

- (1)  $r = 1, R = 1$ . Система совместна, имеет однопараметрическое семейство решений: прямые совпадают.
- (2)  $r = 1, R = 2$ . Система несовместна: прямые параллельны.
- (3)  $r = 2, R = 2$ . Система совместна, имеет единственное решение: прямые пересекаются в единственной точке. Решение системы представляет собой значения параметров  $s, -t$ , которые нужно подставить в уравнения прямых, чтобы найти координаты точки пересечения.

Если прямые, рассматриваемые как гиперплоскости, задать уравнениями

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2,$$

то анализ взаимного их расположения сводится к изучению системы с расширенной матрицей

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

При решении системы сразу получают координаты точки пересечения прямых.

### 3.3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Напишем уравнение прямой, проходящей через точки

$$M_1(\mathbf{r}_1) = M_1(x_1, y_1), \quad M_2(\mathbf{r}_2) = M_2(x_2, y_2).$$

В качестве опорной точки можно выбрать любую из точек  $M_1$  или  $M_2$ , а в качестве направляющего вектора — вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Уравнение в векторном параметрическом виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

в каноническом виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

## 4. ТРЕХМЕРНОЕ АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Трёхмерное АП называем пространством, 1-плоскости — прямыми, 2-плоскости (гиперплоскости) — плоскостями.

### 4.1. Уравнения плоскостей.

Плоскость в пространстве может быть задана следующими способами.

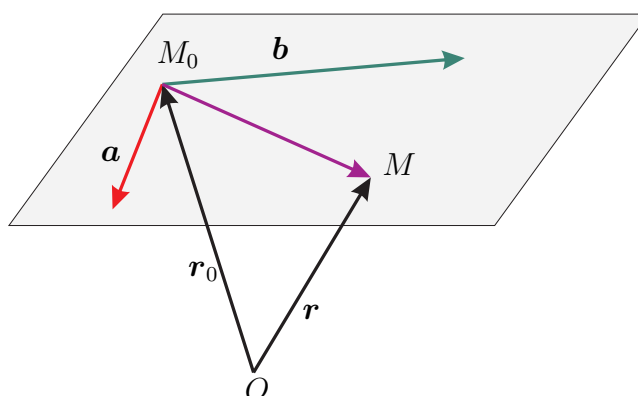
- (1) Векторное параметрическое уравнение:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}. \quad (2)$$

- (2) «Общее уравнение»:

$$Ax + By + Cz = D; \quad (3)$$

в этом случае (2) — общее решение НСЛУ (3).



Чтобы получить из (2) уравнение (3), имеется два способа.

1. Составить НСЛУ, общее решение которой известно.
2. Рассмотрим вектор  $\overrightarrow{MM_0}$ , где  $M$  — произвольная точка плоскости. Векторы  $\overrightarrow{MM_0}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  ЛЗ, поэтому равен нулю  $\det-3$ , составленный из их координат:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия  $\det-3$  получится уравнение вида (3).

#### 4.2. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

Проанализируем систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2. \end{cases}$$

Обозначим ранги основной и расширенной матриц этой системы через  $r$  и  $R$  соответственно:

$$r = \text{rk} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad R = \text{rk} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Возможны следующие случаи:

- (1)  $r = 1, R = 1$ . Система совместна, имеет двухпараметрическое семейство решений: плоскости совпадают.
- (2)  $r = 1, R = 2$ . Система несовместна: плоскости параллельны.
- (3)  $r = 2, R = 2$ . Система совместна, имеет однопараметрическое семейство решений: плоскости пересекаются (пересечением является прямая).

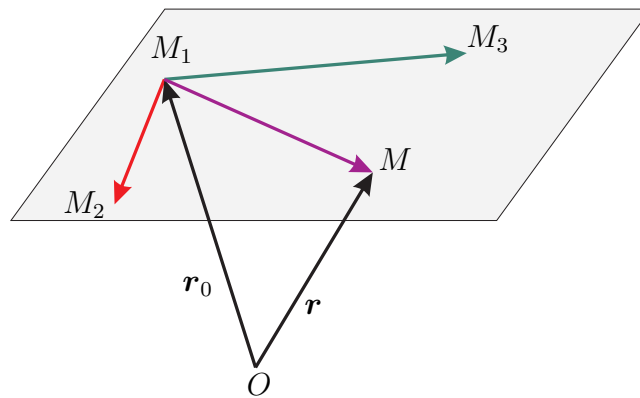
#### 4.3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки

$$M_1(\mathbf{r}_1) = M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(\mathbf{r}_2), \quad M_3(\mathbf{r}_3).$$

Если  $M(\mathbf{r}) = M(x, y, z)$  — произвольная точка плоскости, то векторы  $\overrightarrow{M_1M}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  компланарны, так что

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$



#### 4.4. Уравнение плоскости, проходящей через две точки параллельно заданному вектору.

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(\mathbf{r}_1)$ ,  $M_2(\mathbf{r}_2)$  параллельно вектору  $\mathbf{l} = (l, m, n)$ . Если  $M(\mathbf{r}) = M(x, y, z)$  — произвольная точка плоскости, то векторы  $\overrightarrow{M_1M}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\mathbf{l}$  компланарны, так что

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

#### 4.5. Уравнения прямых.

Прямая в пространстве может быть задана следующими способами.

- (1) Векторное параметрическое уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a},$$

где  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор опорной точки,  $\mathbf{a}$  — направляющий вектор прямой.

- (2) Если в пространстве зафиксирована некоторая АСК  $Oe_1e_2e_3$ , то векторное параметрическое уравнение можно записать в координатном виде

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn, \end{cases}$$

где  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$  и  $\mathbf{a} = (l, m, n)^T$ .

- (3) Исключая параметр  $t$  из параметрических уравнений, получим каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

- (4) Прямая может быть задана как пересечение двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2. \end{cases}$$

Чтобы получить параметрическое уравнение прямой, нужно найти общее решение этой НСЛУ; при этом базисное решение НСЛУ представляет опорную точку прямой, а ФСР соответствующей ОСЛУ, состоящая из одного вектора, — направляющий вектор.



#### 4.6. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Рассмотрим две прямые

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + s\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - t\mathbf{a}_2$$

(направляющий вектор второй прямой выбран в виде  $-\mathbf{a}_2$ ).

Общие точки прямых определяются из условия

$$\mathbf{r}_1 + s\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_2 - t\mathbf{a}_2 \iff s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Если выбрать в пространстве произвольную АСК, то это векторное уравнение можно записать в виде НСЛУ

$$t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Обозначим через  $r$  и  $R$  ранги основной и расширенной матриц этой системы:

$$r = \text{rk} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}, \quad R = \text{rk} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x_2 - x_1 \\ m_1 & m_2 & y_2 - y_1 \\ n_1 & n_2 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Возможны следующие случаи:

- (1)  $r = R = 1$ ; система совместна, имеет однопараметрическое семейство решений: прямые совпадают.
- (2)  $r = 1, R = 2$ ; система несовместна, однако столбцы основной матрицы системы линейно зависимы, т.е. направляющие векторы прямых коллинеарны: прямые параллельны.
- (3)  $r = R = 2$ ; система совместна и ее решение единственно: прямые пересекаются.
- (4)  $r = 2, R = 3$ ; система несовместна, столбцы основной матрицы системы линейно независимы, т.е. направляющие векторы прямых неколлинеарны: прямые скрещиваются.

#### 4.7. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Пусть плоскость задана уравнением

$$Ax + By + Cz = D,$$

а прямая — системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \end{cases}$$

ранг основной матрицы которой равен двум.

Анализ взаимного расположения прямой и плоскости сводится к анализу системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \\ Ax + By + Cz = D. \end{cases}$$

Обозначим ранги основной и расширенной матриц этой системы через  $r$  и  $R$ ; при этом  $r \geq 2$ .

Возможны следующие случаи.

- (1)  $r = R = 2$ ; система совместна и имеет однопараметрическое семейство решений: прямая лежит в плоскости.
- (2)  $r = 2, R = 3$ ; система несовместна: прямая и плоскость параллельны.
- (3)  $r = R = 3$ ; система совместна и имеет единственное решение: прямая пересекает плоскость в единственной точке.

## 5. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Проанализировать взаимное расположение двух прямых на аффинной плоскости, исходя из параметрических уравнений прямых.

**Задача 2.** Проанализировать взаимное расположение двух прямых на аффинной плоскости, исходя из общих уравнений прямых.

**Задача 3.** Проанализировать взаимное расположение двух плоскостей в аффинном пространстве, исходя из параметрических уравнений плоскостей.

**Задача 4.** Проанализировать взаимное расположение двух плоскостей в аффинном пространстве, исходя из общих уравнений плоскостей.

**Задача 5.** Проанализировать взаимное расположение прямой и плоскости в аффинном пространстве. Плоскость задана общим уравнением, прямая — параметрическим уравнением.

**Задача 6.** Найти координаты точки пересечения плоскости  $Ax + By + Cz = D$  и прямой  $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ .