Алексей Витальевич Овчинников

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций. 2008/2009 учебный год

http://matematika.phys.msu.ru/

Лекция 1

1. Введение

Об учебном плане.

Лекции	36 ч.
Семинары	18 ч.
Самостоятельная работа	36 ч.
Всего	90 ч.

О содержании курса.

(1) Элементарные представления о координатном методе.
(2) Комплексные числа.
(3) Алгебра матриц. Теория систем линейных уравнений.
(4) Теория линейных пространств.
(5) Аффинное пространство и аффинная геометрия в размерностях 2 и 3.
(6) Евклидово пространство и евклидова геометрия в размерностях 2 и 3.
(7) Теория кривых и поверхностей 2 порядка.
(8) Теория определителей.

Обозначения. $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

$\forall x$ — квантор всеобщности («для любых x»).

$\exists x$ — квантор существования («существует такой x, что...»).

$\exists! x$ — квантор единственности («существует единственный x, такой что...»).

$\Longrightarrow$ — импликация («следовательно»).

$\Longleftrightarrow$ — эквивалентность.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$ — факториал натурального числа n.

Двойной факториал:

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1) \cdot (2n+1),$$
$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-2) \cdot (2n).$$

Суммы и произведения:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad \prod_{k=0}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

2. О построении геометрии

Система аксиом Евклида—Гильберта.

Основные понятия: точка, прямая, [плоскость].

Отношения между понятиями:

(1) инцидентность («точка лежит на прямой», «прямая проходит через точку» и т. п.; 8 аксиом);
(2) порядок (понятие «лежать между»; 4 аксиомы);
(3) конгруэнтность (движение, равенство; 5 аксиом);
(4) параллельность (1 аксиома);
(5) непрерывность (2 аксиомы).

Недостатки системы аксиом Гильберта.

(1) содержит большое число аксиом;
(2) трудно обобщается на многомерный случай (при попытке обобщения происходит добавление новых исходных понятий и аксиом);
(3) нигде в математике не используется, кроме элементарной геометрии.

План действий.

(1) На основе наглядных представлений сформулировать алгебраические принципы решения геометрических задач, пытаясь ограничиться возможно меньшим числом исходных (неопределяемых) понятий и отношений между ними.
(2) Полученные принципы объявить аксиомами.
(3) На основе полученной системы аксиом построить геометрическую теорию, легко допускающую обобщения.

3. Системы координат

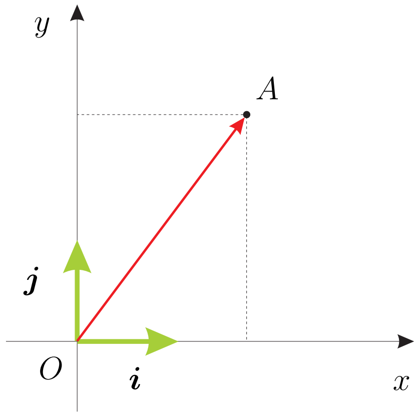
Система координат — объект, позволяющий описывать геометрический объект алгебраическими средствами.

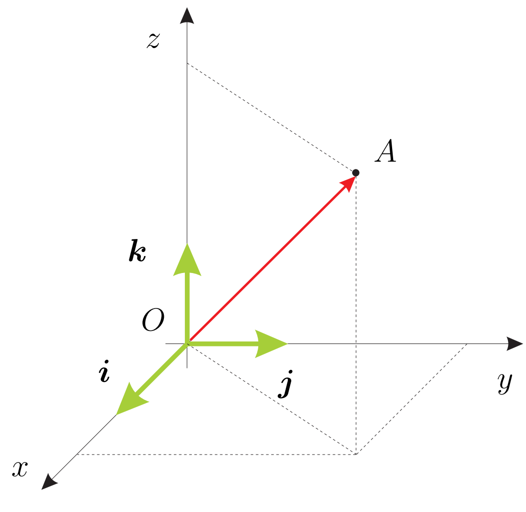
3.1. **Декартова прямоугольная система координат.**

O — начало координат, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные направляющие векторы координатных осей (орты); другое обозначение $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

x — абсцисса, y — ордината, z — аппликата.

$\overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор точки A. Другое обозначение координат x_1, x_2, x_3.



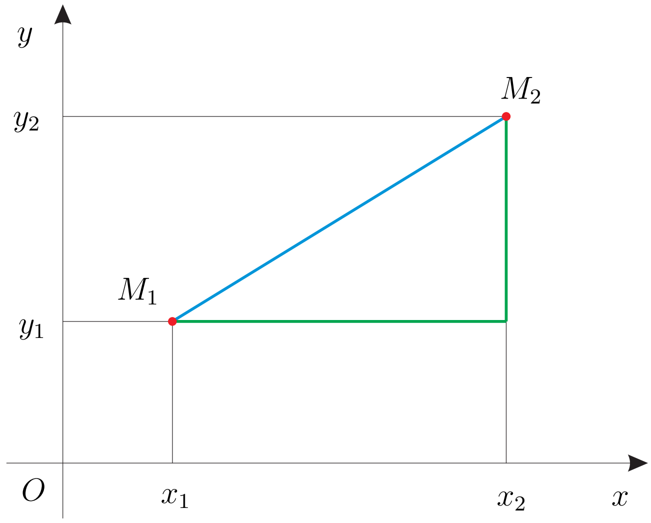


Расстояние между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на прямой:

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости:

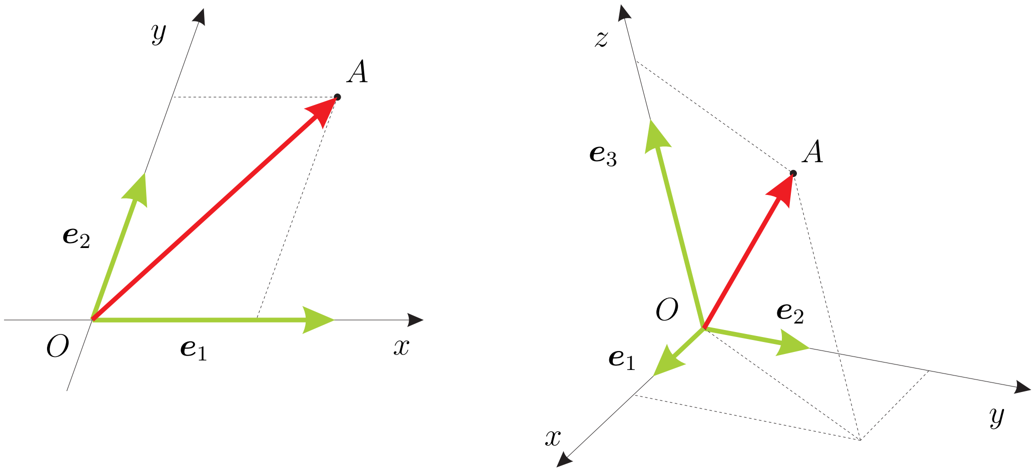
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



В пространственном случае аналогично: для точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

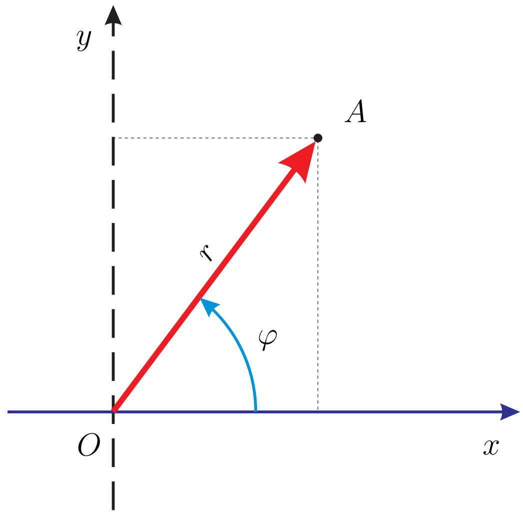
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3.2. **Декартова косоугольная система координат.**



Углы между векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ могут быть не прямыми, длины векторов могут быть $\neq 1$.

3.3. **Полярная система координат на плоскости.**



(r, φ) — полярные координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

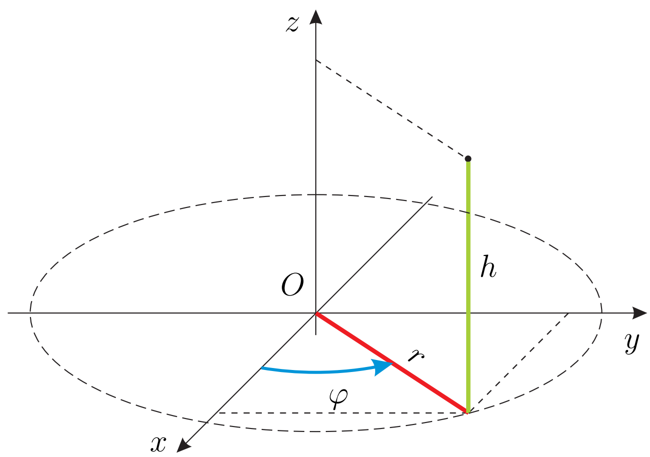
Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Удобно считать, что φ определено с точностью до добавления $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; тогда пишем

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

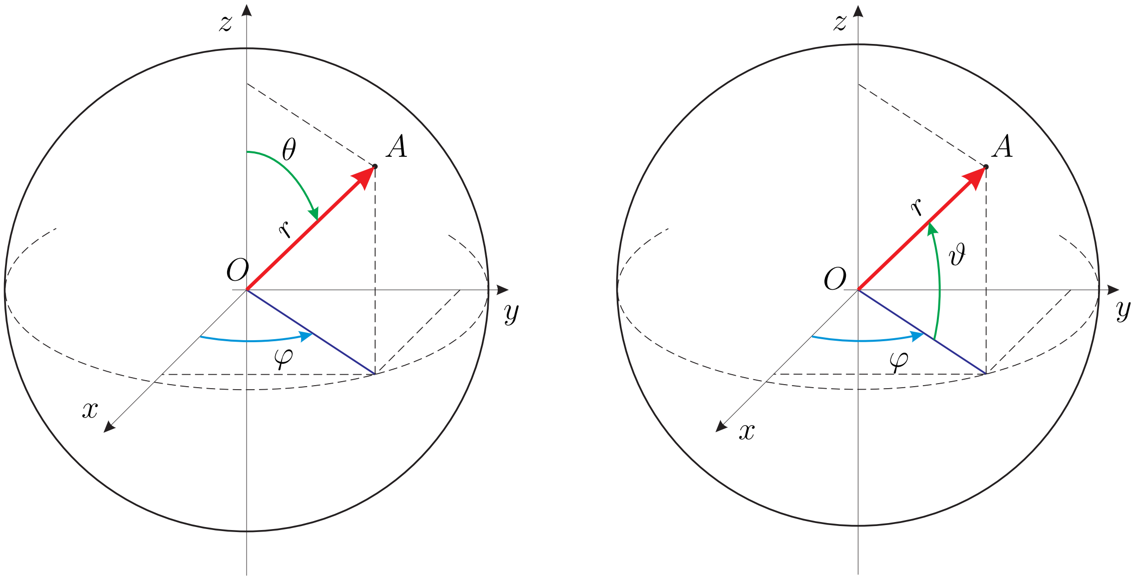
3.4. **Цилиндрическая система координат в пространстве.**



(r, φ, h) — цилиндрические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = h, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ h = z. \end{cases}$$

3.5. **Сферическая система координат в пространстве.**



(r, θ, φ) — сферические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

Географические координаты — вариант сферических.

(r, ϑ, φ) — географические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z = r\sin\vartheta. \end{cases}$$

Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

4. Уравнения линий и поверхностей

Уравнение линии на плоскости — уравнение вида

$$F(x, y) = 0,$$

каждое решение (x, y) которого представляет собой координаты некоторой точки линии, причем для каждой точки линии найдется некоторое решение данного уравнения.

Уравнение поверхности в пространстве содержит 3 переменные:

$$G(x, y, z) = 0.$$

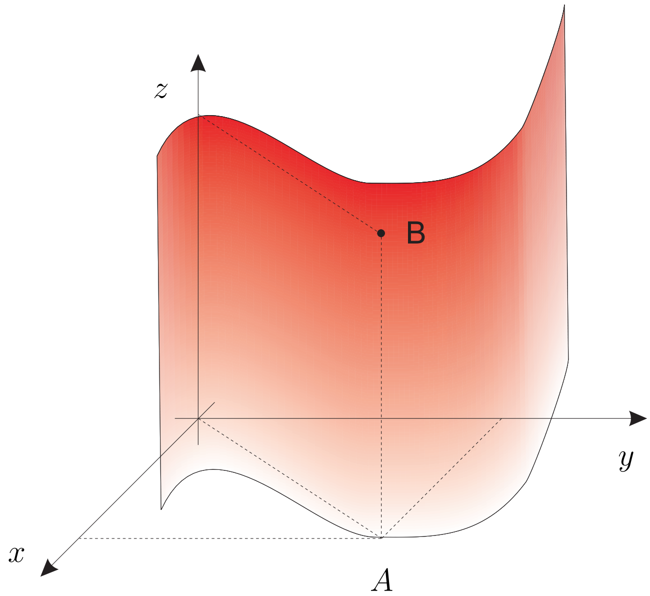
Вместо прямоугольных декартовых координат можно использовать любые другие.

Вместо уравнений можно рассматривать неравенства.

Цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oz, описывается уравнением вида

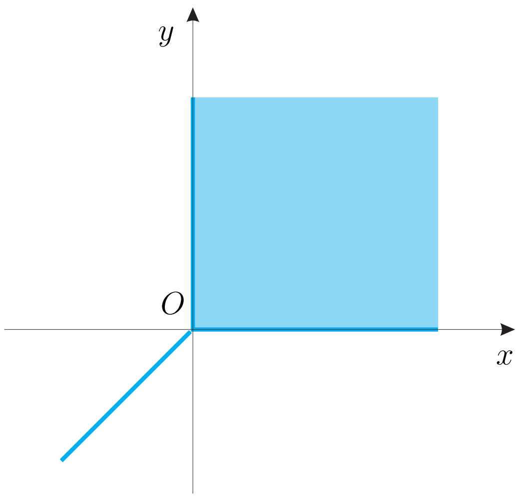
$$G(x, y) = 0.$$

Это же уравнение является одновременно уравнением направляющей.



Уравнение может описывать геометрический объект, не соответствующий интуитивному представлению о линии (поверхности):

$$x - |x| - y + |y| = 0.$$



4.1. **Уравнения прямых на плоскости.**

Уравнение прямой — линейное уравнение:

$$Ax + By = C.$$

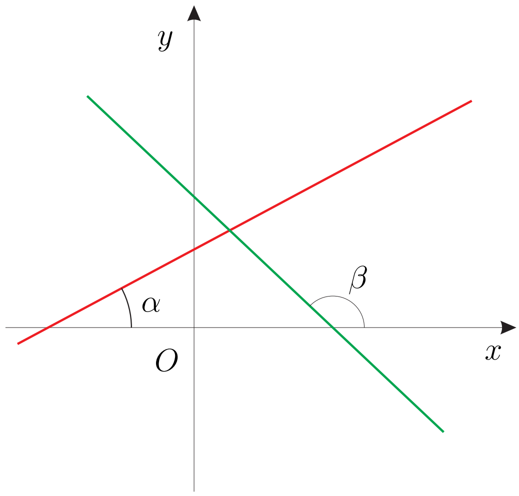
Уравнение можно умножить на любое ненулевое число.

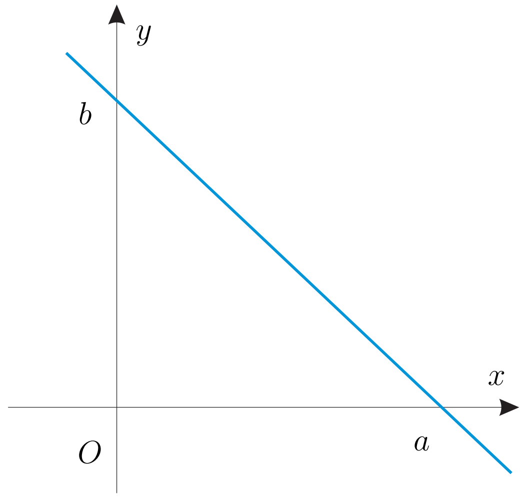
1. Уравнение с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b.$$

k — угловой коэффициент прямой:

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$





2. Уравнение прямой «в отрезках»:

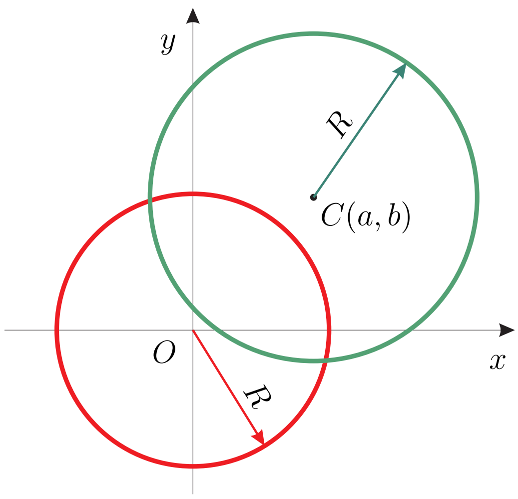
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

4.2. **Окружность.** Окружность радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

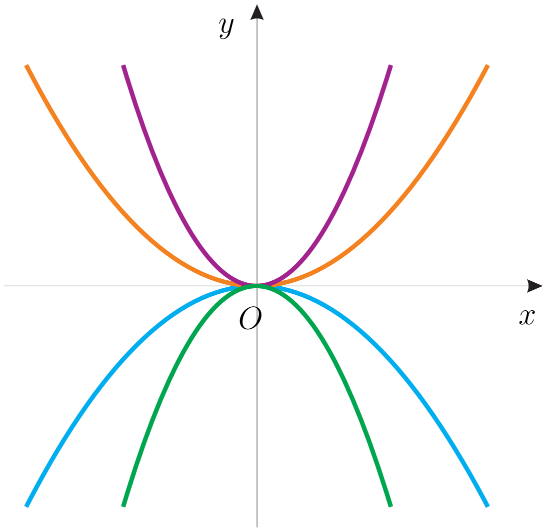
Окружность радиуса R с центром в точке $C(a, b)$:

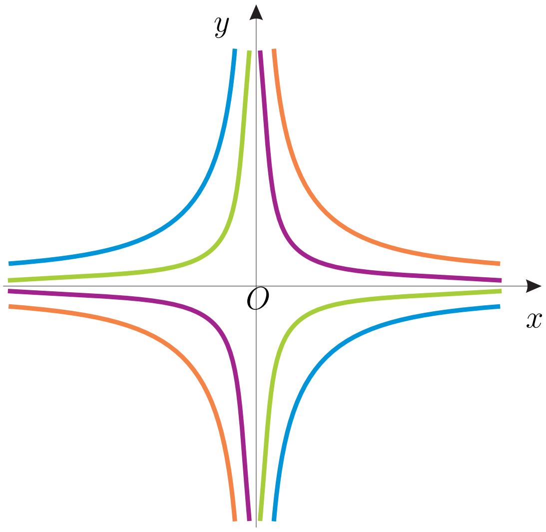
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$



4.3. **Парабола и гипербола.**

$$y = ax^2, \qquad y = \frac{a}{x}.$$





4.4. **Эллипс.** Эллипс — это множество точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек плоскости (фокусов) постоянна.

Фокусы $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c > 0$.

Произвольная точка эллипса $M(x, y)$.

Расстояния от M до фокусов:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тогда уравнение эллипса имеет вид

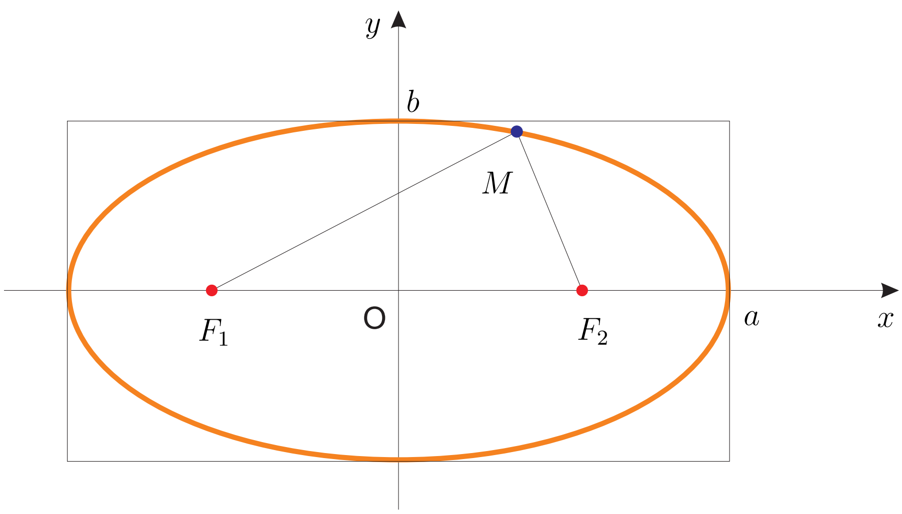
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

После уничтожения радикалов получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

или, введя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$



a, b — полуоси эллипса.

F_1M, F_2M — фокальные радиусы.

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ — эксцентриситет.

Мы получили, что координаты каждой точки эллипса удовлетворяют уравнению (1). Проверим, что любое решение уравнения (1) представляет точку эллипса.

Пусть (x, y) — решение (1); ясно, что $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. Тогда

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{x^2\varepsilon^2 + 2x\varepsilon a + a^2} =$$

$$= \sqrt{(x\varepsilon + a)^2} = |x\varepsilon + a| = a + x\varepsilon.$$

Аналогично получаем

$$F_2M = a - x\varepsilon.$$

Поэтому

$$F_1M + F_2M = 2a,$$

т.е. точка с координатами (x, y) лежит на эллипсе.

5. Параметрические уравнения

5.1. **Параметрические уравнения линий.** Линия на плоскости может быть задана как множество точек, координаты которых вычисляются по формулам

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Этот способ пригоден и для задания линий в пространстве:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

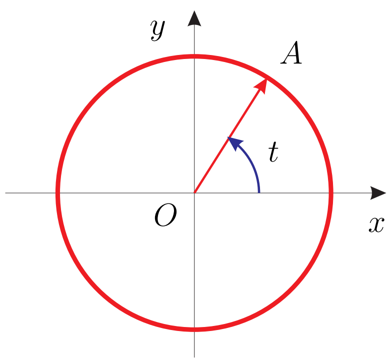
С точки зрения механики параметрические уравнения линии — это закон движения материальной точки, параметр t — время.

Пример.

Параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

Параметр t представляет собой угол между осью Ox и радиус-вектором точки окружности.



Пример.

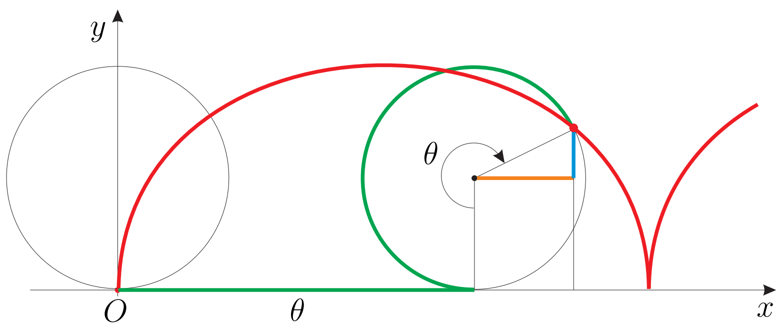
Параметрические уравнения эллипса с полуосями a, b:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

Здесь параметр t не является углом между осью Ox и радиус-вектором точки окружности!

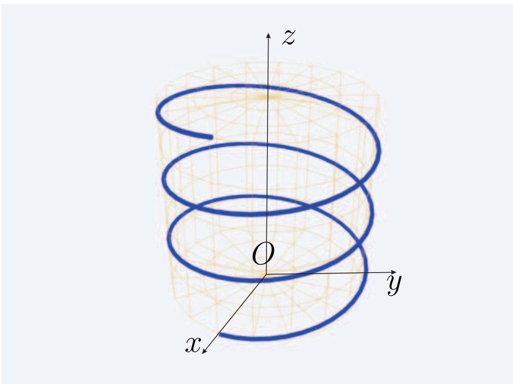
Пример.
Циклоида — это траектория точки обода катящегося по прямой колеса.
Радиус колеса R, параметр — угол θ поворота колеса.
Параметрические уравнения циклоиды

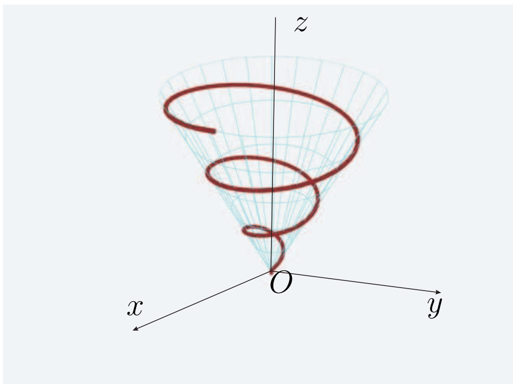
$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta).$$



Пример.
Винтовая линия. Точка совершает два одновременных движения: равномерное вращение с угловой скоростью ω в плоскости Oxy по окружности радиуса R и равномерное поступательное движение вдоль оси Oz со скоростью c:

$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t, \quad z = ct.$$





Пример.
Коническая винтовая линия.

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t.$$

5.2. **Параметрическое задание поверхностей.** Поверхности задаются:

(1) уравнениями вида $F(x, y, z) = 0$;
(2) параметрическими уравнениями вида

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2;$$

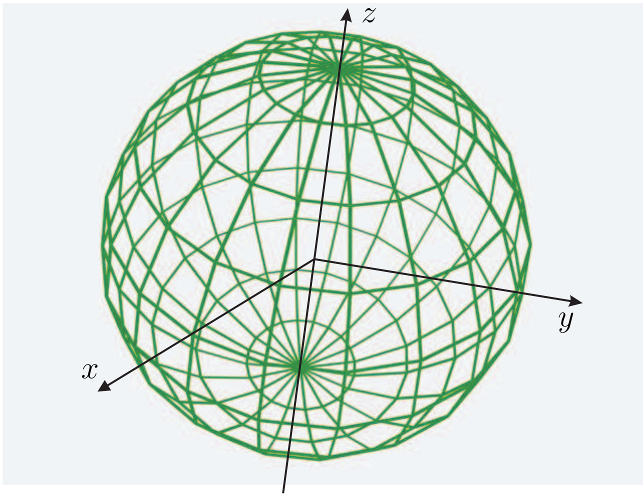
параметры u, v — внутренние координаты поверхности;
(3) как графики функции двух переменных: $z = f(x, y)$.

Пример.
Сфера радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Параметрическое представление:

$$\begin{cases} x = R\cos u \sin v, \\ y = R\sin u \sin v, \\ z = R\cos v, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant u < 2\pi, \\ 0 \leqslant v \leqslant \pi. \end{cases}$$



Представить сферу как график функции невозможно, но это удается сделать отдельно для нижней и верхней полусфер:

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

6. Пересечения и проекции

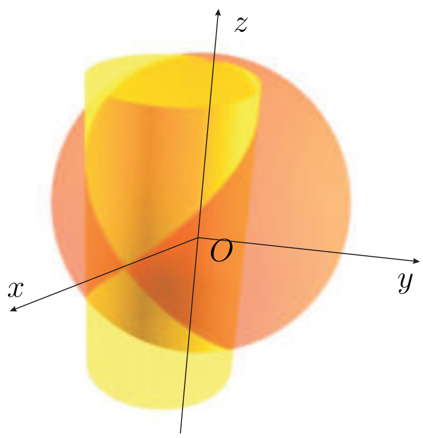
6.1. Пересечения поверхностей.

Линии (кривые) в пространстве можно задавать как пересечение двух поверхностей:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Пример.

Кривая Вивиани — пересечение цилиндра радиуса R и сферы радиуса $2R$, центр которой лежит на поверхности цилиндра.



Получим уравнения кривой Вивиани.

Уравнения сферы и цилиндра:

$$x^2+y^2+z^2=4R^2, \qquad (x-R)^2+y^2=R^2 \iff x^2+y^2=2Rx.$$

Отсюда

$$z^2=4R^2-2Rx.$$

Положим

$$x=r\cos t, \quad y=r\sin t.$$

Тогда

$$x^2+y^2=2Rx \iff r^2=2Rr\cos t \iff r=2R\cos t.$$

Можно записать выражения для x и y:

$$x=r\cos t=2R\cos^2 t=R(1+\cos 2t),$$
$$y=r\sin t=2R\sin t\cos t=R\sin 2t.$$

Параметр t изменяется в диапазоне

$$0\leqslant t\leqslant \pi.$$

Теперь можно найти выражение для z:

$$z^2=4R^2-2Rx=4R^2\sin^2 t \iff z=\pm 2R\sin t.$$

Можно убрать $\pm$, если разрешить параметру t изменяться в диапазоне

$$0\leqslant t<2\pi.$$

Итак, окончательный результат:

$$\begin{cases} x=R(1+\cos 2t), \\ y=R\sin 2t, \\ z=2R\sin t, \end{cases} \qquad 0\leqslant t<2\pi.$$

Пример.

Кривая получена как пересечение сферы и плоскости:

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad x+y+z=1.$$

Найти параметрическое представление этой линии.

Подставим параметрическое представление сферы

$$x=\cos u\sin v, \quad y=\sin u\sin v, \quad z=\cos v$$

в уравнение плоскости:

$$(\cos u+\sin u)\sin v=1-\cos v \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2}=\cos u+\sin u.$$

Теперь находим

$$\cos v=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}}=-\frac{2\sin 2u}{2+\sin 2u},$$
$$\sin v=\frac{2\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}}=\frac{2\,(\cos u+\sin u)}{2+\sin 2u}$$

и окончательно

$$
\begin{aligned}
x &= \cos u \sin v = \frac{2\,(\cos u + \sin u)\cos u}{2 + \sin 2u},\\
y &= \sin u \sin v = \frac{2\,(\cos u + \sin u)\sin u}{2 + \sin 2u},\\
z &= \cos v = -\frac{2\sin 2u}{2 + \sin 2u}.
\end{aligned}
$$

6.2. **Проекции.** Проекцией точки $M(x, y, z)$ на плоскость Oxy является точка $N(x, y)$. Таким образом, проектирование — это игнорирование одной из координат.

Если линия задана как пересечение двух поверхностей $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$, то уравнение ее проекции на плоскость Oxy получается исключением z из этих уравнений.

Пример.

Проекция кривой Вивиани на плоскость Oxy — это кривая с параметрическими уравнениями

$$
\begin{cases}
x = R(1 + \cos 2t),\\
y = R\sin 2t.
\end{cases}
$$

Исключая параметр t, получаем уравнение окружности

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2.$$

Пример.

Проекция линии пересечения сферы и плоскости,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 1,$$

имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + (1 - (x + y))^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + xy + y^2 - x - y = 0.$$

7. Экзаменационные задачи

Задача 1. Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек $F_1(-a; 0)$ и $F_2(a; 0)$ есть постоянная величина a^2. Рассматриваемая кривая называется *лемнискатой Бернулли*. Составить также уравнение лемнискаты в полярных координатах, совмещая полярную ось с положительной полуосью Ox, а полюс — с началом декартовых координат. Изобразить лемнискату на чертеже.

Ответ. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$; $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.

Задача 2. Даны прямая $x = 2r$ и окружность радиуса r, которая проходит через начало координат O и касается данной прямой. Из точки O проведен луч, пересекающий данную окружность в точке C и данную прямую в точке B; на луче отложен отрезок $OM = CB$. При вращении луча точка M описывает кривую, называемую *циссоидой Диоклеса*. Составить уравнение кривой и изобразить ее на чертеже.

Ответ. $(2r - x)y^2 = x^3$.

Задача 3. Даны прямая $x = a$ $(a > 0)$ и окружность диаметра a, проходящая через начало координат O и касающаяся данной прямой. Из точки O проведен луч, пересекающий окружность в точке A и данную прямую в точке B. Из точек A и B проведены прямые, параллельные соответственно осям Oy и Ox. Точка пересечения этих прямых при вращении луча описывает кривую, называемую *верзьерой Аньези*. Составить уравнение кривой и изобразить е на чертеже.

Ответ. $x(a^2 + y^2) = a^3$.

Задача 4. Из точки $A(-a; 0)$ $(a > 0)$ проведен луч AB, пересекающий ось Oy в точке B. На этом луче по обе стороны от точки B отложены отрезки BM и BN, равные OB. При вращении луча точки M и N описывают кривую, называемую *строфоидой*. Составить ее уравнение сначала в полярных координатах, помещая полюс в точке A и направляя полярную ось в положительном направлении полуоси Ox, а затем перейти к данной системе декартовых координат. Изобразить кривую на чертеже.

Ответ. $r = \dfrac{a}{\cos\varphi} \pm a \operatorname{tg}\varphi$; $x^2[(x+a)^2 + y^2] = a^2y^2$.

Задача 5. Отрезок длины $2a$ движется так, что его концы все время находятся на координатных осях. Точка M является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на отрезок. При движении отрезка точка M описывает кривую, называемую *четырехлепестковой розой*. Составить ее уравнение сначала в полярных координатах, совмещая полюс с началом декартовых координат и полярную ось с положительной полуосью Ox, а затем перейти к данной системе декартовых координат. Изобразить кривую на чертеже.

Ответ. $r = a|\sin 2\varphi|$; $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

Задача 6. Отрезок длины a движется так, что его концы все время находятся на координатных осях. Через концы отрезка проведены прямые, параллельные координатным осям, до их взаимного пересечения в точке P. Точка M является основанием перпендикуляра, опущенного из точки P на отрезок. При движении отрезка точка M описывает кривую, называемую *астроидой*. Составить сначала параметрические уравнения астроиды, выбирая в качестве параметра t угол между движущимся отрезком и осью Ox, а затем, исключив параметр, уравнение в виде $F(x, y) = 0$. Изобразить кривую на чертеже.

Ответ. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Задача 7. Окружность радиуса a катится без скольжения по окружности $x^2 + y^2 = a^2$, оставаясь вне ее. Траектория некоторой точки M катящейся окружности называется *кардиоидой*. Вывести параметрические уравнения кардиоиды, выбирая в качестве параметра t угол наклона к оси Ox радиуса неподвижной окружности, проведенного в точку касания с подвижной. Считать при этом, что в начальный момент $(t = 0)$ точка M находится справа на оси Ox. Исключив параметр, получить полярное уравнение кривой. Изобразить кривую на чертеже.

Ответ. $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$; $r = 2a(1 - \cos\varphi)$.

Задача 8. Траекторией точки M является эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Вывести параметрические уравнения траектории, принимая в качестве параметра t угол наклона отрезка OM к оси Ox.

Ответ. $x = \dfrac{ab\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$, $y = \dfrac{ab\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$.