Лекция 13

Поверхности второго порядка

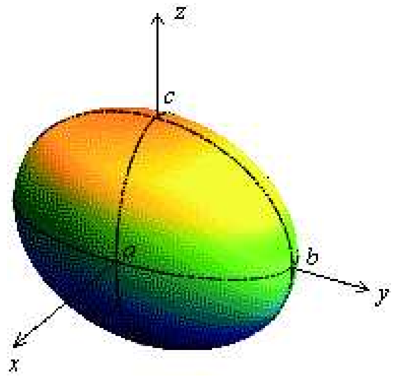
Пространственным аналогом кривых второго порядка являются поверхности второго порядка, имеющие уравнение вида

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ — многочлен второй степени от X, y, z. Опишем возможные типы поверхностей второго порядка.

Эллиптический тип

1 Эллипсоид



В прямоугольной декартовой системе координат эллипсоид задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Сечением эллипсоида плоскостью $z = h$ является линия

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \end{cases}$$

т.е.

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Следовательно, плоскость $z = h$ при $|h| > c$ не пересекает эллипсоид, при $|h| = c$ имеет единственную общую точку с эллипсоидом (это точка $(0, 0, c)$ при $h = c$ и точка $(0, 0, -c)$ при $h = -c$), а при $|h| < c$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями $a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}$, которые максимальны (и равны a и b соответственно) при $h = 0$ и монотонно уменьшаются до нуля, когда $|h|$ возрастает от нуля до c.

Аналогично анализируются сечения эллипсоида плоскостями $x = h$ и $y = h$; все такие сечения представляют собой эллипсы.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида, начало координат — его центром симметрии. Эллипсоид целиком расположен в параллелепипеде с центром в точке $O(0, 0, 0)$, с гранями, параллельными координатным плоскостям, и со сторонами, равными $2a$, $2b$ и $2c$.

2 Мнимый эллипсоид

Уравнение мнимого эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Эта поверхность не имеет ни одной вещественной точки.

3 Мнимый конус.

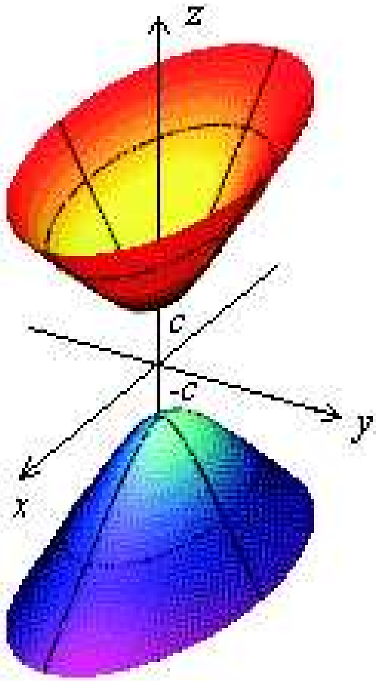
Уравнение мнимого конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Эта поверхность имеет единственную вещественную точку $O(0,0,0)$.

Гиперболический тип

4 Двуполостный гиперболоид



Уравнение двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

или

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Плоскость $z = h$ при $|h| < c$ не пересекает гиперболоид, при $|h| = c$ имеет единственную общую точку с гиперболоидом ($(0,0,c)$ при $h = c$ и $(0,0,-c)$ при $h = -c$) и при $|h| > c$ пересекает гиперболоид по эллипсу

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1,$$

полуоси которого монотонно возрастают от 0 до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от c до $+\infty$.

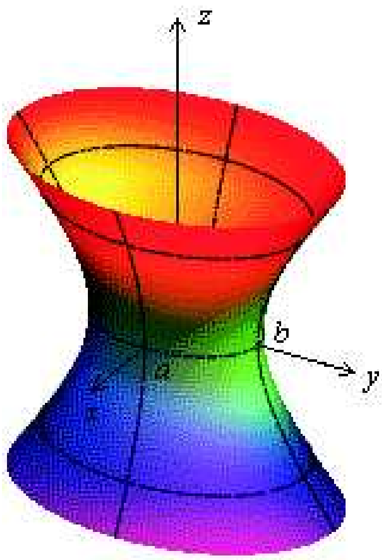
Каждая плоскость $y = h$ пересекает гиперболоид по гиперболе

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1,$$

полуоси которой монотонно возрастают (от c и a соответственно) до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от 0 до $+\infty$. Аналогично для сечений плоскостями $x = h$.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии двуполостного гиперболоида, начало координат — его центром симметрии. Поверхность состоит из двух симметричных частей, расположенных в полупространствах $z \geqslant c$ и $z \leqslant -c$.

5 Однополостный гиперболоид



Уравнение однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Каждая плоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по эллипсу

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1,$$

полуоси которого монотонно возрастают от a и b соответственно до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от 0 до $+\infty$. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

получающийся при $h = 0$, называется горловым эллипсом гиперболоида.

Плоскость $y = h$ при $|h| < b$ пересекает гиперболоид по гиперболе

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1,$$

полуоси которой монотонно убывают от a и c соответственно до 0, когда $|h|$ возрастает от 0 до b. При $|h| = b$ сечением является пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

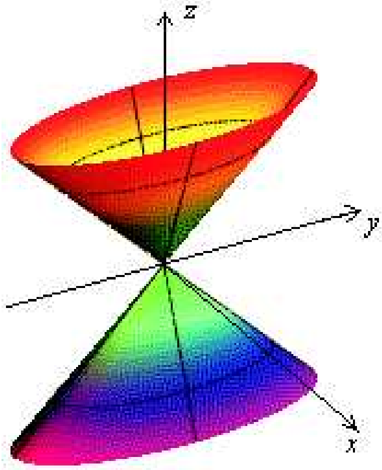
При $|h| > b$ сечение представляет собой гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(c\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} = 1,$$

полуоси которой возрастают от 0 до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от b до $+\infty$. Аналогично для сечений плоскостями $x = h$.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии однополостного гиперболоида, начало координат — его центром симметрии.

6 Конус



Уравнение конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии конуса, начало координат — его центром симметрии.

Коническая поверхность — это поверхность, образованная прямыми (прямолинейными образующими), проходящими через одну точку, называемую вершиной конуса. Направляющая конической поверхности — это произвольная расположенная на ней линия, обладающая тем свойством, что любая прямолинейная образующая пересекает ее в одной и только одной точке.

Сечение конуса плоскостью $z = h$, $h \neq 0$, представляет собой эллипс

$$\frac{x^2}{a^2h^2/c^2} + \frac{y^2}{b^2h^2/c^2} = 1,$$

полуоси которого пропорциональны $|h|$. Прямая, проходящая через центры этих эллипсов, называется осью конуса. Рассматривая сечения конуса плоскостями, не перпендикулярными оси, можем получить окружность.

Сечение конуса плоскостью $z = 0$ состоит из одной точки $O(0, 0, 0)$.

Сечение конуса плоскостью $y = h$, $h \neq 0$, является гиперболой

$$\frac{z^2}{c^2h^2/b^2} - \frac{x^2}{a^2h^2/b^2} = 1,$$

полуоси которой пропорциональны $|h|$. Аналогично для сечений плоскостями $x = h$. Таким образом, в качестве направляющей конуса может быть выбрана гипербола.

Сечение конуса плоскостью $y = 0$ представляет собой пару пересекающихся прямых

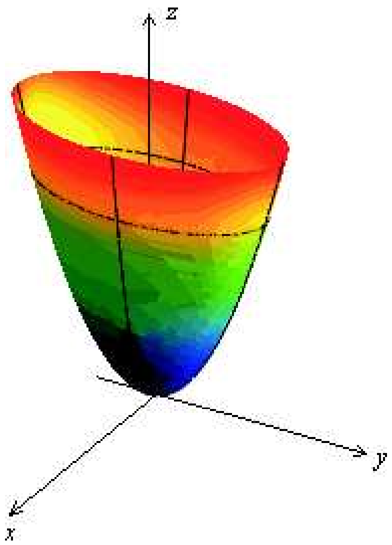
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Парабола также может быть получена как плоское сечение конуса.

Задача. Покажите, что сечение конуса плоскостью $az - cx = h$, $h \neq 0$, является параболой.

Параболический тип

7 Эллиптический параболоид



Уравнение эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Плоскость $z = h$ при $h < 0$ не пересекает параболоид, при $h = 0$ имеет с ним единственную общую точку $O(0,0,0)$, при $h > 0$ пересекает параболоид по эллипсу

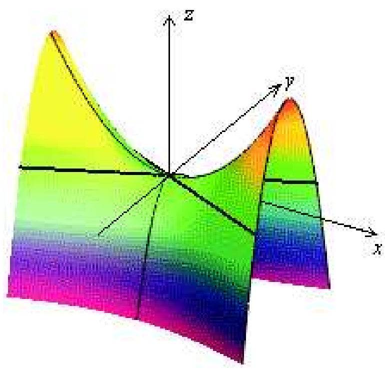
$$\frac{x^2}{2ha^2} + \frac{y^2}{2hb^2} = 1,$$

полуоси которого монотонно возрастают вместе с h от 0 до $+\infty$.

Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают параболоид по параболам с фокальными параметрами a^2 и b^2, с вершинами в точках $(0, h, h^2/2b^2)$ и $(h, 0, h^2/2a^2)$ и ветвями, направленными вверх.

Координатные плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии эллиптического параболоида, других плоскостей симметрии и центра симметрии у него нет.

8 Гиперболический параболоид



Уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Плоскость $z = h$ при $h < 0$ пересекает параболоид по гиперболе

$$\frac{y^2}{-2hb^2} - \frac{x^2}{-2ha^2} = 1;$$

действительная ось этой гиперболы параллельна оси Oy, а мнимая — оси Ox. Плоскость $z = h$ при $h > 0$ пересекает параболоид по гиперболе

$$\frac{x^2}{2ha^2} - \frac{y^2}{2hb^2} = 1;$$

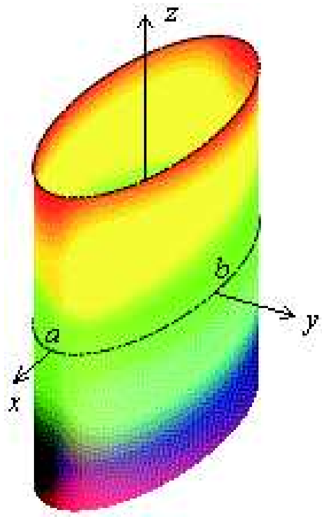
действительная ось этой гиперболы параллельна оси Ox, а мнимая — оси Oy. Плоскость $z = 0$ пересекает параболоид по паре прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают параболоид по параболам с фокальными параметрами a^2 и b^2 и с вершинами в точках $\left(0, h, -\dfrac{h^2}{2b^2}\right)$ и $\left(h, 0, \dfrac{h^2}{2b^2}\right)$; ветви первой параболы направлены вверх, второй — вниз. Вершины парабол, высекаемых плоскостями $y = h$, лежат на параболе, высекаемой плоскостью $x = 0$, а вершины парабол, высекаемых плоскостями $x = h$, — на параболе, высекаемой плоскостью $y = 0$.

Плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии гиперболического параболоида; других плоскостей симметрии нет.

9 Эллиптический цилиндр



Уравнение эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Направляющей является эллипс, образующие параллельны оси Oz.

10 Мнимый эллиптический цилиндр

Уравнение мнимого эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Эта поверхность не содержит ни одной вещественной точки.

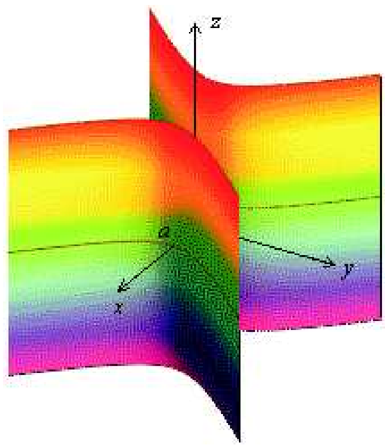
11 Пара мнимых пересекающихся плоскостей

Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Вещественные точки этой поверхности заполняют прямую (ось Oz).

12 Гиперболический цилиндр



Уравнение гиперболического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Направляющей является гипербола, образующие параллельны оси Oz.

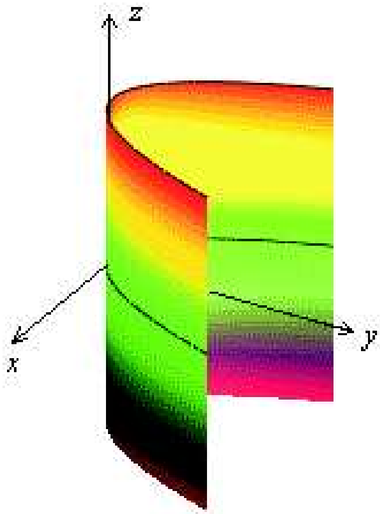
13 Пара пересекающихся плоскостей

Уравнение пары пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

14 Параболический цилиндр



Уравнение гиперболического цилиндра

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$. Направляющей является парабола, образующие параллельны оси Oz.

15 Пара параллельных плоскостей

Уравнение пары параллельных плоскостей

$$y^2 = a^2,$$

где $a > 0$.

16 Пара мнимых параллельных плоскостей

Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей

$$y^2 = -a^2,$$

где $a > 0$.

17 Пара совпадающих плоскостей

Уравнение пары совпадающих плоскостей

$$y^2 = 0.$$

Линейчатые поверхности

Поверхность называется l-кратно линейчатой поверхностью, если через каждую ее точку проходит ровно l различных прямых, называемых прямолинейными образующими.

Примеры.

1. Все цилиндры являются 1-линейчатыми поверхностями.

2. Конус является 1-линейчатой поверхностью, все прямолинейные образующие которой проходят через одну точку — вершину конуса.

Однополостный гиперболоид

Теорема.

Однополостный гиперболоид является дважды линейчатой поверхностью.

Пусть (x_0, y_0, z_0) — точка, лежащая на однополостном гиперболоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Рассмотрим прямую, проходящую через эту точку:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt. \tag{2}$$

Для краткости введем обозначения

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad Z = \frac{z}{c},$$
$$X_0 = \frac{x_0}{a}, \quad Y_0 = \frac{y_0}{b}, \quad Z_0 = \frac{z_0}{c},$$
$$L = \frac{l}{a}, \quad M = \frac{m}{b}, \quad N = \frac{n}{c}.$$

Уравнение гиперболоида (1) в новых обозначениях

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1 \iff X^2 + Y^2 = 1 + Z^2, \tag{3}$$

а уравнение прямой (2) —

$$X = X_0 + Lt, \quad Y = Y_0 + Mt, \quad Z = Z_0 + Nt. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$(X_0 + Lt)^2 + (Y_0 + Mt)^2 - (Z_0 + Nt)^2 = 1 \iff$$
$$\iff \underbrace{(X_0^2 + Y_0^2 - Z_0^2)}_{=1} + 2t(X_0 L + Y_0 M - Z_0 N) + t^2(L^2 + M^2 - N^2) = 1$$
$$\iff 2t(X_0 L + Y_0 M - Z_0 N) + t^2(L^2 + M^2 - N^2) = 0.$$

Это уравнение выполняется тождественно (т. прямая (4) целиком лежит на гиперболоиде (3)) тогда и только тогда, когда

$$X_0 L + Y_0 M - Z_0 N = 0, \quad L^2 + M^2 - N^2 = 0.$$

Поскольку направляющий вектор прямой может быть выбран с точностью до произвольного ненулевого множителя, положим $n = c$, тогда $N = 1$, и получим

$$X_0 L + Y_0 M = Z_0, \quad L^2 + M^2 = 1.$$

Второе уравнение допускает параметризацию

$$L = \cos\varphi, \quad M = \sin\varphi,$$

после чего первое уравнение примет вид

$$X_0 \cos\varphi + Y_0 \sin\varphi = Z_0 \iff \sqrt{X_0^2+Y_0^2}\left(\underbrace{\frac{X_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}}_{=\cos\theta}\cos\varphi + \underbrace{\frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}}_{=\sin\theta}\sin\varphi\right) = Z_0 \iff$$

$$\iff \cos(\varphi-\theta) = \frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}};$$

последняя дробь строго меньше единицы по модулю, поэтому тригонометрическое уравнение имеет ровно 2 решения на $[0, 2\pi)$:

$$\varphi - \theta = \pm \arccos\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}} \iff \varphi = \theta \pm \arccos\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}}.$$

Пусть

$$\beta = \arccos\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}} \in [0,\pi] \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}}, \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+Z_0^2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \cos(\theta\pm\beta) = \cos\theta\cos\beta \mp \sin\theta\sin\beta \\
&= \frac{X}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}} \mp \frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}\frac{1}{\sqrt{1+Z_0^2}} = \frac{X_0Z_0 \mp Y_0}{1+Z_0^2}, \\
\sin\varphi &= \sin(\theta\pm\beta) = \sin\theta\cos\beta \pm \cos\theta\sin\beta \\
&= \frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}\frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_0^2}} \pm \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}\frac{1}{\sqrt{1+Z_0^2}} = \frac{Y_0Z_0 \pm X_0}{1+Z_0^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем два решения

$$L_\varepsilon = \cos\varphi = \frac{X_0Z_0 - \varepsilon Y_0}{1+Z_0^2}, \quad M_\varepsilon = \sin\varphi = \frac{Y_0Z_0 + \varepsilon X_0}{1+Z_0^2}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Каждое из возможных значений ε определяет направляющий вектор.

Итак, через точку (X_0, Y_0, Z_0) гиперболоида (3) проходят ровно две прямые, целиком лежащие на гиперболоиде:

$$X = X_0 + \frac{X_0Z_0 - \varepsilon Y_0}{1+Z_0^2}t, \quad Y = Y_0 + \frac{Y_0Z_0 + \varepsilon X_0}{1+Z_0^2}t, \quad Z = Z_0 + t, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Эти прямые пересекаются с плоскостью $z = 0$ ($Z = 0$) в точках (X_1, Y_1, Z_1), (X_{-1}, Y_{-1}, Z_{-1}), отвечающих значению параметра $t_0 = -Z_0$:

$$\begin{aligned}
X_\varepsilon &= X_0 - \frac{X_0Z_0 - \varepsilon Y_0}{1+Z_0^2}Z_0 = \frac{X_0 + \varepsilon Y_0 Z_0}{1+Z_0^2} = \varepsilon\frac{Y_0Z_0 + \varepsilon X_0}{1+Z_0^2} = \varepsilon M_\varepsilon, \\
Y_\varepsilon &= Y_0 - \frac{Y_0Z_0 + \varepsilon X_0}{1+Z_0^2}Z_0 = \frac{Y_0 - \varepsilon X_0 Z_0}{1+Z_0^2} = -\varepsilon\frac{X_0Z_0 - \varepsilon Y_0}{1+Z_0^2} = -\varepsilon L_\varepsilon, \\
Z_\varepsilon &= 0, \qquad \varepsilon = \pm 1.
\end{aligned}$$

Ясно, что эти две точки лежат на горловом эллипсе гиперболоида. Теперь можно записать уравнения прямолинейных образующих в виде

$$X = X_\varepsilon - \varepsilon Y_\varepsilon t, \quad Y = Y_\varepsilon + \varepsilon X_\varepsilon t, \quad Z = t.$$

Обратно, пусть (X_*, Y_*) — точка горлового эллипса однополостного гиперболоида (3), т.е.

$$X_*^2 + Y_*^2 = 1.$$

Рассмотрим две прямых

$$X = X_* - \varepsilon Y_* t, \quad Y = Y_* + \varepsilon X_* t, \quad Z = t, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Поскольку

$$\begin{gathered} X^2 + Y^2 - Z^2 = (X_* - \varepsilon Y_* t)^2 + (Y_* + \varepsilon X_* t)^2 - t^2 = \\ = \underbrace{(X_*^2 + Y_*^2)}_{=1} + 2t(X_\varepsilon Y_\varepsilon - X_\varepsilon Y_\varepsilon) + t^2 \underbrace{(X_*^2 + Y_*^2 - 1)}_{=0} = 1, \end{gathered}$$

обе эти прямые целиком лежат на гиперболоиде.

Итак, через любую точку гиперболоида проходит ровно две прямолинейные образующие, одна из которых отвечает значению $\varepsilon = 1$, а другая — значению $\varepsilon = -1$. Все прямолинейные образующие разбиваются на два семейства; к одному семейству относятся образующие, отвечающие $\varepsilon = 1$, к другому — отвечающие $\varepsilon = -1$.

Рассмотрим две образующие, проходящие через точки (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) горлового эллипса:

$$\begin{cases} X = X_1 - \varepsilon_1 Y_1 t, \\ Y = Y_1 + \varepsilon_1 X_1 t, \\ Z = t, \end{cases} \qquad \begin{cases} X = X_2 - \varepsilon_2 Y_2 t, \\ Y = Y_2 + \varepsilon_2 X_2 t, \\ Z = t. \end{cases}$$

Выясним вопрос о взаимном расположении этих прямых. Рассмотрим определитель

$$D = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 & 1 \\ -\varepsilon_2 Y_2 & \varepsilon_2 X_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 Y_1 + \varepsilon_2 Y_2 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon_2 X_2 & 0 \\ -\varepsilon_2 Y_2 & \varepsilon_2 X_2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon_2 Y_2 - \varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon_2 X_2 \end{vmatrix}.$$

Обозначим $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2$; тогда $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \varepsilon \varepsilon_1$ и далее

$$\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon_2 Y_2 - \varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon_2 X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon\varepsilon_1 Y_2 - \varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon\varepsilon_1 X_2 \end{vmatrix} =$$
$$= \varepsilon_1 \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon Y_2 - Y_1 & X_1 - \varepsilon X_2 \end{vmatrix} = -\varepsilon_1 \Big[(X_2 - X_1)(\varepsilon X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1)(\varepsilon Y_2 - Y_1) \Big].$$

Если $\varepsilon = 1$, т.е. образующие принадлежат к одному семейству, то

$$D = -\varepsilon_1 \Big[(X_2 - X_1)(X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1)(Y_2 - Y_1) \Big] = -\varepsilon_1 \Big[(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 \Big] \neq 0,$$

т.е. рассматриваемые две прямые скрещиваются. Если $\varepsilon = -1$, т.е. образующие принадлежат к разным семействам, то

$$D = -\varepsilon_1\Big[(X_2 - X_1)(-X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1)(-Y_2 - Y_1)\Big] = -\varepsilon_1\Big[(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2\Big] =$$

$$= \varepsilon_1[\underline{X_2^2} - X_1^2 + \underline{Y_2^2} - Y_1^2] = 0,$$

т.е. рассматриваемые две прямые лежат в одной плоскости.

Рассмотрим три попарно различные одноименные прямолинейные образующие, проходящие через точки (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) горлового эллипса. Рассмотрим определитель, составленный из координат направляющих векторов указанных прямых:

$$\begin{vmatrix} -Y_1 & X_1 & 1 \\ -Y_2 & X_2 & 1 \\ -Y_3 & X_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поскольку точки (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) не лежат на одной прямой. Таким образом, рассматриваемые три прямолинейные образующие не компланарны.

Доказана следующая теорема.

Теорема.

Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида обладают следующими свойствами:

1. *Через каждую точку гиперболоида проходит одна и только одна образующая каждого семейства.*
2. *Каждая образующая пересекает горловой эллипс гиперболоида.*
3. *Любые две образующие, принадлежащие к одному семейству, скрещиваются.*
4. *Любые две образующие, принадлежащие к разным семействам, лежат в одной плоскости.*

При решении задач более удобен иной метод нахождения прямолинейных образующих. Запишем уравнение однополостного гиперболоида в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \iff \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \delta\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \gamma\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right) \end{cases}$$

относительно неизвестных (α, β) для первой системы и (γ, δ) для второй. Определители этих систем равны нулю; например, для первой системы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c} & -\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right) \\ -\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right) & \dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c} \end{vmatrix} = \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) - \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) = 0.$$

Таким образом, каждая из систем обладает нетривиальным решением; обозначим эти решения через (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0) соответственно. Рассмотрим теперь системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \beta_0 \left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \beta_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \alpha_0 \left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \delta_0 \left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \delta_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \gamma_0 \left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

относительно неизвестных (x, y, z). Точка (x_0, y_0, z_0) является решением каждой из систем, и при этом каждая из систем определяет прямую, проходящую через указанную точку. Поскольку при перемножении уравнений каждой из систем получается уравнение гиперболоида, любое решение (x, y, z) каждой из систем представляет точку, лежащую на гиперболоиде. Таким образом, обе прямых, представляемых данными системами, целиком лежат на гиперболоиде.

Гиперболический параболоид

Теорема.

Гиперболический параболоид является дважды линейчатой поверхностью.

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперболическом параболоиде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{5}$$

Рассмотрим прямую, проходящую через эту точку:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt. \tag{6}$$

Для краткости введем обозначения

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad Z = z,$$

$$X_0 = \frac{x_0}{a}, \quad Y_0 = \frac{y_0}{b}, \quad Z_0 = z_0,$$

$$L = \frac{l}{a}, \quad M = \frac{m}{b}, \quad N = n.$$

Уравнения параболоида (7) и прямой (6) в новых обозначениях имеют вид

$$X^2 - Y^2 = 2Z, \qquad \begin{cases} X = X_0 + Lt, \\ Y = Y_0 + Mt, \\ Z = Z_0 + Nt. \end{cases}$$

Подставляя параметрические уравнения прямой в уравнение параболоида,получим

$$(X_0+Lt)^2-(Y_0+Mt)^2=2(Z_0+Nt) \iff$$

$$\iff \underbrace{(X_0^2-Y_0^2)}_{=2Z_0}+2t(X_0L-Y_0M)+t^2(L^2-M^2)=2Z_0+2Nt \iff$$

$$\iff 2t(X_0L-Y_0M)+t^2(L^2-M^2)=2Nt.$$

Это уравнение выполняется тождественно, т.е. прямая целиком лежит на параболоиде, тогда и только тогда, когда

$$X_0L-Y_0M=N, \quad L^2-M^2=0.$$

Поскольку направляющий вектор прямой определен лишь с точностью до ненулевого множителя, положим $L=1$; тогда $M=\varepsilon$, где $\varepsilon=\pm1$, $N=X_0-\varepsilon Y_0$. Итак, через точку (X_0,Y_0,Z_0) параболоида проходят ровно две прямых

$$\begin{cases} X=X_0+t, \\ Y=Y_0+\varepsilon t, \\ Z=Z_0+(X_0-\varepsilon Y_0)t, \end{cases} \qquad \varepsilon=\pm1.$$

Выясним взаимное расположение двух одноименных прямолинейных образующих, проходящих через две различные точки (X_1,Y_1,Z_1), (X_2,Y_2,Z_2) параболоида; для этого рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} X_2-X_1 & Y_2-Y_1 & Z_2-Z_1 \\ 1 & 1 & X_1-Y_1 \\ 1 & 1 & X_2-Y_2 \end{vmatrix} =$$

$$=X_2^2-2Y_2X_2-2X_2X_1+2Y_1X_2+2Y_2X_1+X_1^2-2Y_1X_1+Y_2^2-2Y_1Y_2+Y_1^2=$$

$$=(X_2-Y_2-X_1+Y_1)^2\neq0;$$

таким образом, эти образующие скрещиваются.

Выясним взаимное расположение двух разноименных прямолинейных образующих, проходящих через две различные точки (X_1,Y_1,Z_1), (X_2,Y_2,Z_2) параболоида; для этого рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} X_2-X_1 & Y_2-Y_1 & Z_2-Z_1 \\ 1 & 1 & X_1-Y_1 \\ 1 & -1 & X_2+Y_2 \end{vmatrix} = X_2^2-Y_2^2-2Z_2-\left(X_1^2-Y_1^2-2Z_1\right)=0;$$

таким образом, эти образующие лежат в одной плоскости. Поскольку при этом направляющие векторы $(1,1,X_1-Y_1)$ и $(1,-1,X_2+Y_2)$ этих образующих неколлинеарны, рассматриваемые образующие пересекаются.

Наконец, направляющие векторы всех образующих одного семейства имеют вид $(1,\varepsilon,X_0-\varepsilon Y_0)$ параллельны плоскости $X-\varepsilon Y=0$.

Доказана следующая теорема.

Теорема.

Прямолинейные образующие гиперболического параболоида обладают следующими свойствами:

1. *Через каждую точку гиперболоида проходит одна и только одна образующая каждого семейства.*

2. *Любые две образующие, принадлежащие к одному семейству, скрещиваются.*

3. *Любые две образующие, принадлежащие к разным семействам, пересекаются.*

4. *Все образующие одного семейства параллельны одной плоскости.*

Имеется другой метод нахождения уравнений прямолинейных образующих гиперболического параболоида. Запишем уравнение параболоида (7) в виде

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z. \tag{7}$$

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на параболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ):

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)=\beta, \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)=2\alpha z_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)=\delta, \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)=2\gamma z_0. \end{cases}$$

Определители этих систем равны нулю (проверьте!). поэтому каждая из систем нетривиально разрешима; пусть (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0) — их решения. Рассмотрим теперь системы

$$\begin{cases} \alpha_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=\beta_0, \\ \beta_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=2\alpha z, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=\delta_0, \\ \delta_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=2\gamma_0 z; \end{cases}$$

каждая из них определяет прямую, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) параболоида. Перемножая уравнения каждой из систем, обнаруживаем, что любое решение системы является также и решением уравнения (7), т.е. прямая целиком лежит на параболоиде.