Лекция 2

1. Метод математической индукции

Утверждение $P(n)$, зависящее от натурального параметра n, считается доказанным, если:

(1) доказано утверждение $P(1)$;

(2) для любого $n \in \mathbb{N}$ из предположения, что верно $P(n)$, выведено, что верно также $P(n+1)$.

$P(n)$ — предикат, n — параметр индукции.

Доказательство $P(1)$ — базис индукции.

Предположение, что $P(n)$ верно, — индуктивное предположение.

Доказательство $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ — индукционный шаг.

Пример.

Докажем методом индукции формулу

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(2n+1)(n+1).$$

Базис индукции:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)(1+1)$$

— верное соотношение.

Предположение индукции состоит в том, что подлежащая доказательству формула верна при некотором значении n.

Индукционный шаг сводится к проверке того, что при $n+1$ формула также верна, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)\Big(2(n+1)+1\Big)\Big((n+1)+1\Big) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2).$$

Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(2n+1)(n+1) + (n+1)^2 =$$
$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+n}{6} + n + 1\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) =$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2).$$

Таким образом, формула доказана.

2. Комбинаторика

Комбинаторика изучает конечные множества и связанные с ними операции.

Пусть N — конечное множество, состоящее из n элементов; число n называется мощностью множества N, $\operatorname{card} N = n$.

$x \in N$ — x является элементом множества N.

$x \notin N$ — x не является элементом множества N.

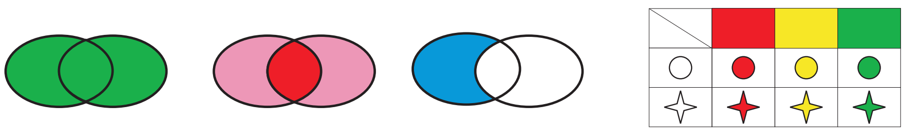
$N \subset M$ — множество N является подмножеством множества M, т.е.

$$\forall x \in N \Longrightarrow x \in M.$$

$\varnothing$ — пустое множество; $\operatorname{card} \varnothing = 0$.

Основные операции над множествами:

(1) объединение $N \cup M = \{x : x \in N \text{ и } x \in M\}$,
(2) пересечение $N \cap M = \{x : x \in N \text{ или } x \in M\}$,
(3) разность $N \setminus M = \{x : x \in N \text{ и } x \notin M\}$,
(4) декартово произведение $N \times M = \{(x, y) : x \in N,\ x \in M\}$.



2.1. **Принцип произведения.**

$$\operatorname{card}(N \times M) = (\operatorname{card} N) \cdot (\operatorname{card} M).$$

Пример.

Найдем количество различных трехзначных чисел, не содержащих одинаковых цифр:

$$\underbrace{\qquad A \qquad}_{9\ \text{способов}} \quad \underbrace{\qquad B \qquad}_{9\ \text{способов}} \quad \underbrace{\qquad C \qquad}_{8\ \text{способов}}$$

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

2.2. **Принцип суммы.** Если N и M — непересекающиеся конечные множества, $N \cap M = \varnothing$, то

$$\operatorname{card}(N \cup M) = \operatorname{card} N + \operatorname{card} M.$$

В случае непустого пересечения

$$\operatorname{card}(N \cup M) = \operatorname{card} N + \operatorname{card} M - \operatorname{card}(N \cap M).$$

Пример.

Найдем количество различных трехзначных чисел, содержащих хотя бы две одинаковые цифры.

Всего имеется 900 трехзначных чисел. Каждое из них либо имеет одинаковые цифры, либо нет. Поэтому чисел, содержащих одинаковые цифры, имеется

$$900 - 648 = 252.$$

2.3. **Упорядоченная выборка без повторений: размещения.** Имеется множество N, $\operatorname{card} N = n$. Требуется выбрать из него k элементов с учетом порядка; выбранный элемент в множество не возвращается. Количество различных выборок равно

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В частности, количество различных перестановок множества N

$$P_n = n!.$$

Пример.

Сколькими способами можно из группы в 20 студентов выбрать старосту и профорга?

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380.$$

2.4. **Неупорядоченная выборка без повторений: сочетания.** Имеется множество N, $\operatorname{card} N = n$. Требуется выбрать из него k элементов без учета порядка; выбранный элемент в множество не возвращается. Обозначим количество всех таких выборок C_n^k.

Выборка объема k может быть упорядочена $k!$ способами. Согласно принципу произведения

$$C_n^k \cdot k! = A_n^k,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Числа C_n^k называются также биномиальными коэффициентами; другое обозначение:

$$\binom{n}{k} = C_n^k.$$

Пример.

Сколькими способами можно из группы в 20 студентов выбрать двух дежурных?

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$$

2.5. **Свойства биномиальных коэффициентов.**

$$1. \qquad C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$$

$$2. \qquad C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}^{k \text{ сомножителей}}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}_{k \text{ сомножителей}}}.$$

$$3. \qquad C_n^{n-k} = C_n^k.$$

◀ $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$. ▶

$$4. \qquad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

$$◀ \quad C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!(n-k) + n!(k+1)}{k!(n-k-1)!(k+1)(n-k)} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}. \qquad ▶$$

2.6. **Треугольник Паскаля.**

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & & C_0^0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \\
 & & & C_1^0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_1^1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
 & & C_2^0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_2^1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_2^2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & C_3^0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_3^1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_3^2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_3^3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{tikzcd}$$

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1
$n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n=8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1

2.7. **Бином Ньютона.**

Теорема.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=$$
$$=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\dots+C_n^ka^{n-k}b^k+$$
$$+\dots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n. \qquad (1)$$

◄ Доказательство проведем методом индукции.

База индукции:

$$(a+b)^1=a+b=C_1^0a+C_1^1b.$$

Предположение индукции состоит в том, что формула (1) справедлива при некотором значении n. Наша задача — пользуясь формулой (1), вывести ее справедливость для показателя степени $n+1$.

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)\cdot(a+b)^n=(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right)=$$
$$=a\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right)+b\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\ a^{n-k}\ b^k\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\ a^{n-k+1}\ b^k+\sum_{k=0}^{n}C_n^k\ a^{n-k}\ b^{k+1}=$$
$$=a^{n+1}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}C_n^k\ a^{n-k+1}\ b^k}_{\substack{k=p+1,\\ k=1\dots n,\\ p=0\dots n-1}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\ a^{n-k}\ b^{k+1}}_{k=p}+b^{n+1}=$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=0}^{n-1} C_n^{p+1} \; \underline{a^{n-p} \; b^{p+1}} + \sum_{p=0}^{n-1} C_n^{p} \; \underline{a^{n-p} \; b^{p+1}} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \underbrace{\left(C_n^{p+1} + C_n^{p}\right)}_{=C_{n+1}^{p+1}} \; a^{n-p} \; b^{p+1} + b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0 \; a^{n+1} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} C_{n+1}^{p+1} \; a^{(n+1)-(p+1)} \; b^{p+1}}_{\substack{k=p+1, \\ p=0...n-1, \\ k=1...n}} + C_{n+1}^{n+1} \; b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0 \; a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k} \; a^{(n+1)-k} \; b^{k} + C_{n+1}^{n+1} \; b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} \; a^{(n+1)-k} \; b^{k}. \qquad \blacktriangleright$$

2.8. **Дальнейшие свойства биномиальных коэффициентов.** Взяв в формуле (1) $a = b = 1$, получим

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; 1^{n-k} \; 1^k,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Аналогично, взяв $a = 1$, $b = -1$, находим

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

3. Комплексные числа

3.1. **Числовое поле.** Числовое поле — множество чисел, в котором корректны арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление на ненулевое число.

Примеры числовых полей: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Не являются числовыми полями: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Нетривиальный пример: числа вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, образуют числовое поле:

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2},$$

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right)}{\left(c + d\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right)} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2},$$

причем знаменатель $\neq 0$, а все коэффициенты $\in \mathbb{Q}$.

3.2. **Многочлены.** Пусть $\mathbb{K}$ — некоторое числовое поле.

Одночлен (от одной переменной x) над полем $\mathbb{K}$ — выражение вида ax^k, где $a \in \mathbb{K}$ — коэффициент одночлена, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — степень одночлена; $\deg(ax^k) = k$.

Многочлен степени n (от одной переменной x) над полем $\mathbb{K}$ — сумма одночленов:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0 \neq 0$.

Множество всех многочленов от переменной x над полем $\mathbb{K}$ обозначается $\mathbb{K}[x]$.

Можно рассматривать одночлены и многочлены от нескольких переменных.

Значение многочлена $f(x)$ можно вычислять как при $x \in \mathbb{K}$, так и при $x \notin \mathbb{K}$.

Корень многочлена $f(x)$ — значение x, при котором $f(x) = 0$.

Алгебраически замкнутое поле $\mathbb{K}$ — это такое поле, что любой многочлен из $\mathbb{K}[x]$ имеет корень $x \in \mathbb{K}$.

Поле $\mathbb{Q}$ не является алгебраически замкнутым:

$$(x^2 - 2) \in \mathbb{Q}[x], \qquad x^2 - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Решение проблемы — введение иррациональных чисел.

Поле $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым: многочлен $x^2 + 1$ корней не имеет.

Формальное решение проблемы — ввести «новое число» i, обладающее свойством $\boxed{i^2 = -1}$; тогда

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm i.$$

Пример.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Имеем:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 = (-1) \cdot 4,$$

$$\sqrt{D} = 2i, \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Теорема Виета также справедлива:

$$x_1 + x_2 = (-2 - i) + (-2 + i) = -4,$$

$$x_1x_2 = (-2 - i)(-2 + i) = (-2)^2 - i^2 = 5.$$

Отметим, что мы рассматривали уравнение с вещественными коэффициентами.

Числа вида $a + bi$ называются комплексными числами.

3.3. **Определение комплексных чисел.**

Комплексное число z — упорядоченная пара вещественных чисел (x, y):

$$z = (x, y).$$

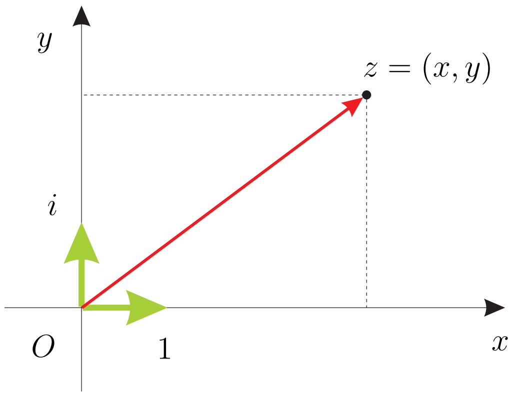
$x = \operatorname{Re} z$ — вещественная часть z.

$y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть z.

Равенство комплексных чисел:

$$z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{Bmatrix}$$

Комплексное число $z = (x, y)$ можно изобразить точкой координатной плоскости Oxy либо радиус-вектором этой точки. Координатная плоскость называется при такой интерпретации плоскостью комплексных чисел, ось Ox — вещественной осью, ось Oy — мнимой осью.



Арифметические операции над комплексными числами $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$:

(a) сложение:

$$z := z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2);$$

(b) умножение:

$$z := z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Свойства арифметических операций:

1.	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	(коммутативность сложения);
2.	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	(ассоциативность сложения);
3.	$z_1 z_2 = z_2 z_1$	(коммутативность умножения);
4.	$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$	(ассоциативность умножения);
5.	$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	(дистрибутивность).

Для чисел вида $z = (x, 0)$ имеем:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2,\ 0),$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2 - 0 \cdot 0,\ x_1 \cdot 0 + 0 \cdot x_2) = (x_1 x_2, 0).$$

Такие комплексные числа при арифметических операциях ведут себя как вещественные числа. Поэтому можно отождествить комплексное число $z = (x, 0)$ с вещественным числом x и считать множество вещественных чисел подмножеством множества комплексных чисел.

Рассмотрим мнимые числа, $z = (0, y)$. Имеем:

$$(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2).$$

Произведение вещественного и мнимого числа:

$$x \cdot (0, y) = (x, 0) \cdot (0, y) = (x \cdot 0 - 0 \cdot y,\ x \cdot y + 0 \cdot 0) = (0, xy);$$

поэтому можно считать, что мнимое число есть произведение вещественного числа и мнимой единицы:

$$(0, y) = y \cdot (0, 1).$$

Произведение двух мнимых чисел:

$$(0, y_1) \cdot (0, y_2) = (0 \cdot 0 - y_1 \cdot y_2,\ 0 \cdot y_2 + y_1 \cdot 0) = (-y_1 y_2, 0).$$

Отсюда вытекает, что квадрат мнимой единицы представляет собой вещественное число, равное -1:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Мнимую единицу обозначим символом i:

$$i = (0, 1).$$

Тогда для любого $z = (x, y)$ имеем

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y \cdot (0, 1) = x + iy.$$

Это — алгебраическая форма записи комплексного числа.

Пусть $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1$ и $z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$.

Разность $z = z_1 - z_2$ определяется как решение уравнения $z + z_2 = z_1$.

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2),$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Частное $z = z_1/z_2$ определяется решение уравнения $z \cdot z_2 = z_1$.

Для вычисления частного заметим, что

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.$$

Теперь запишем

$$\begin{aligned} z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \\ = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, деление возможно на любое ненулевое комплексное число.

В множестве комплексных чисел выполняются операции сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевое число. Таким образом, множество комплексных чисел является полем, которое обозначается $\mathbb{C}$.

Пример.

$$(3+4i)(7-2i) = 3\cdot 7 - 3\cdot 2i + 4i\cdot 7 - 4i\cdot 2i = 29 + 22i,$$

$$\frac{29+22i}{7-2i} = \frac{(29+22i)(7+2i)}{(7-2i)(7+2i)} =$$

$$= \frac{29\cdot 7 + 29\cdot 2i + 22i\cdot 7 + 22i\cdot 2i}{7^2 - (2i)^2} = \frac{159+212i}{53} = 3+4i.$$

3.4. **Сопряжение.** Пусть $z = x + iy$.

Сопряженное к z число: $\bar{z} = x - iy$.

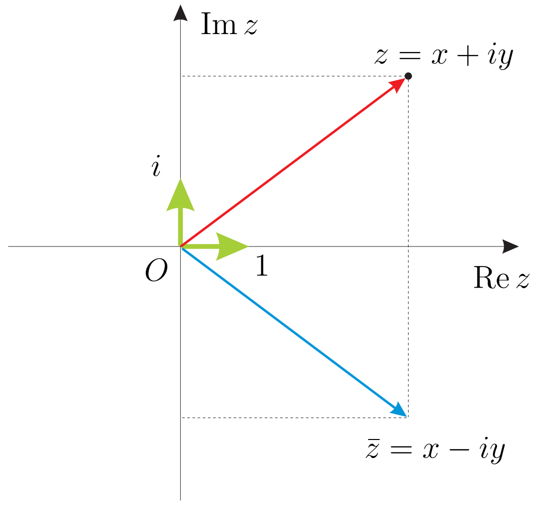
Свойства операции сопряжения:

1. $\bar{\bar{z}} = z$;
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Легко получить следующие соотношения:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Число $\bar{z}$, сопряженное к z, геометрически изображается точкой, симметричной точке z относительно вещественной оси.

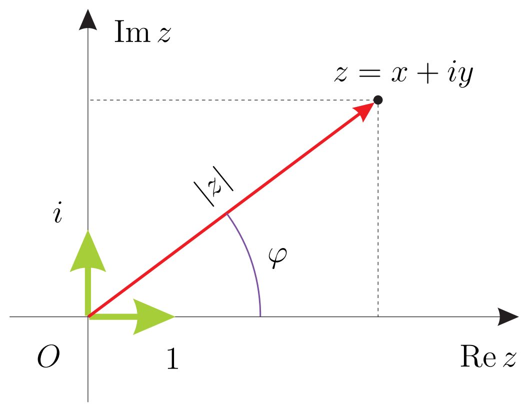


3.5. **Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.** Точка $z = (x, y)$ на плоскости может быть задана не только декартовыми, но и полярными координатами (r, φ):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Число r называется модулем числа z, φ — аргументом:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$



Аргумент определен неоднозначно (с точностью до слагаемого $2\pi n$), поэтому различают

(1) главное значение аргумента $\arg z \in [0, 2\pi)$ или $\arg z \in (-\pi, \pi]$;

(2) (многозначный) аргумент $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; используются также записи

$$\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}, \quad \operatorname{Arg} z = \varphi \pmod{2\pi}.$$

Комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy = r\cos\varphi + i\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Это — тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Перемножим два числа:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 \Big(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \Big) =$$
$$= r_1 r \Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \Big).$$

Таким образом,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

4. Экзаменационные задачи

Задача 1. Доказать по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Задача 2. Доказать по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Задача 3. Доказать по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Задача 4. Доказать по индукции, что

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Задача 5. Доказать по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n} k \sin kx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Задача 6. Доказать по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n} k \cos kx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Задача 7. Доказать по индукции, что при любом натуральном $n > 1$

$$(1+x)^n > 1 + nx, \qquad x > -1, \quad x \neq 0.$$

Задача 8. Доказать по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

Задача 9. Доказать по индукции, что при любом натуральном $n > 1$

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$