Лекция 3

1. Формула Эйлера и извлечение корней

1.1. **Формула Эйлера.** Рассмотрим функцию

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Она обладает свойством

$$f(\varphi_1)\cdot f(\varphi_2) = f(\varphi_1+\varphi_2).$$

Эта функция обозначается $e^{i\varphi}$:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi;$$

это — формула Эйлера.

Средствами анализа можно доказать, что функция $f(\varphi)$ действительно является показательной функцией.

Показательная форма записи комплексных чисел:

$$z = re^{i\varphi},$$

где

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Из формулы Эйлера получаем:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi;$$

складывая/вычитая эти равенства, находим

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

1.2. **Возведение в степень.** Тригонометрическая и показательная формы записи полезны при возведении комплексных чисел в степень:

$$\Big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Эта формула доказана при $n\in\mathbb{N}$, но легко убедиться, что она справедлива и при $n\in\mathbb{Z}$. Действительно, поскольку

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

получаем

$$\Big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^{-n} = \left(\frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right)^n =$$

$$= r^{-n}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = r^{-n}(\cos n\varphi - \sin n\varphi) =$$

$$= r^{-n}\big(\cos(-n\varphi) + \sin(-n\varphi)\big).$$

Те же выкладки в показательной форме намного короче:

$$\frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}} = e^{-i\varphi},$$
$$\left(re^{i\varphi}\right)^{-n} = r^{-n}\left(e^{-i\varphi}\right)^{n} = r^{-n}e^{-in\varphi}.$$

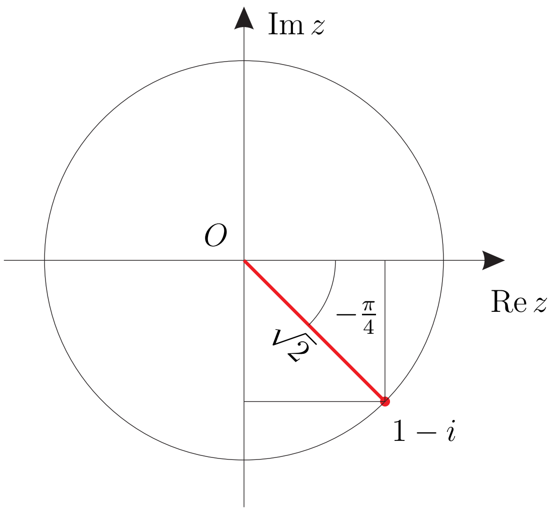
Пример.

Вычислим $(1-i)^{35}$.

Представим число $1-i$ в тригонометрической (показательной) форме:

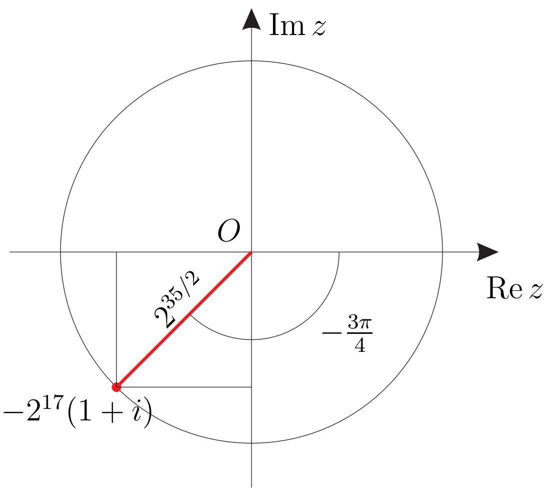
$$\operatorname{Re}(1-i) = 1, \quad \operatorname{Im}(1-i) = -1, \quad |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4};$$

здесь мы выбрали диапазон значений $\arg z$ в виде $(-\pi, \pi]$.



Имеем:

$$(1-i)^{35} = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{35} = 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi\frac{35}{4}} = 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi\left(8+\frac{3}{4}\right)} =$$
$$= 2^{\frac{35}{2}}e^{-i\pi\frac{3}{4}} = 2^{\frac{35}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2^{17}(1+i).$$



1.3. **Формула Муавра.** При $r = 1$ получаем формулу Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Формула Муавра полезна при тригонометрических преобразованиях.

Пример.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$

$$\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi \cdot i^2\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Пример.

Преобразуем в произведения следующие суммы:

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos kt = 1 + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt,$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin kt = \sin t + \sin 2t + \cdots + \sin nt.$$

Запишем

$$C + iS = \sum_{k=0}^{n} \cos kt + i\sum_{k=0}^{n} \sin kt = \sum_{k=0}^{n} (\cos kt + i\sin kt) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}.$$

Вычислим сумму получившейся геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{ikt}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}t} - e^{i\frac{n+1}{2}t}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right)} =$$

$$= e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\left(e^{i\frac{n+1}{2}t} - e^{-i\frac{n+1}{2}t}\right)/2i}{\left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}\right)/2i} = e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

В полученных выражениях отделим вещественную и мнимую части:

$$C = \mathrm{Re}\ e^{i\frac{nt}{2}}\ \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}} = \frac{\cos\frac{nt}{2}\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}},$$

$$S = \mathrm{Im}\ e^{i\frac{nt}{2}}\ \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}} = \frac{\sin\frac{nt}{2}\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}.$$

Пример.

Выразим $\cos^5 t$ через кратные углы.

$$\cos^5 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^5 =$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(e^{5it} + 5e^{4it}e^{-it} + 10e^{3it}e^{-2it} + 10e^{2it}e^{-3it} + 5e^{it}e^{-4it} + e^{-5it}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5it} + e^{-5it}}{2} + 5\frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} + 10\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\cos 5t + \frac{5}{16}\cos 3t + \frac{5}{8}\cos t.$$

1.4. **Извлечение корней.** Число w называется корнем n-й степени из числа z, если $w^n = z$:

$$w = \sqrt[n]{z} \quad \Longleftrightarrow \quad w^n = z.$$

Представим числа w, z в показательной форме:

$$w = Re^{i\Phi}, \quad z = re^{i\varphi}.$$

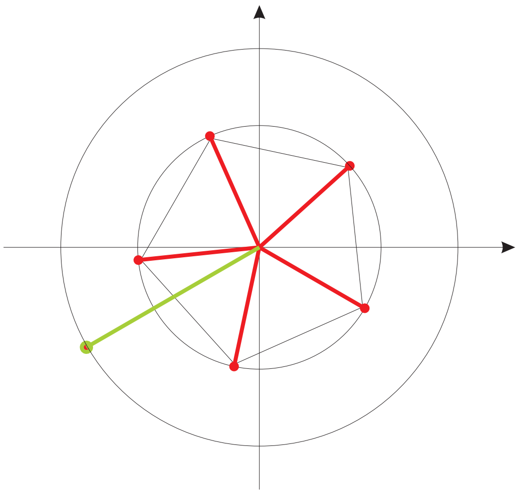
Наша задача — по данным r, φ найти R, Φ.

$$\left(Re^{i\Phi}\right)^n = re^{i\varphi} \quad \Longleftrightarrow \quad R^n e^{in\Phi} = re^{i\varphi} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} R^n = r, \\ n\Phi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} R = r^{1/n}, \\ \Phi = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

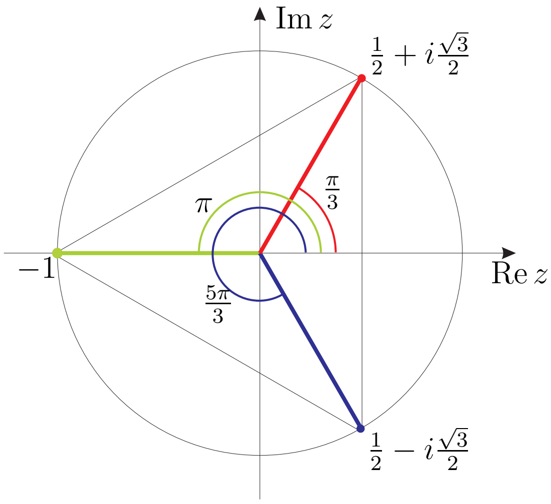
Таким образом, получается не один, а множество корней, однако различными будут только те, которые отвечают значениям $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Геометрически эти корни изображаются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r^{1/n}$.



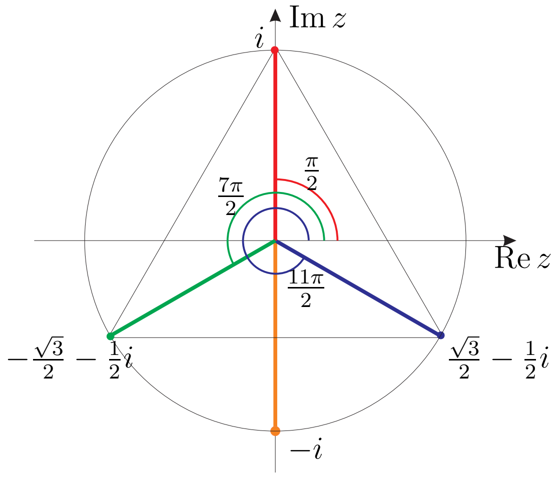
Пример.

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{i\pi}} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}} = \begin{cases} e^{i\pi/3} & = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad k = 0, \\ e^{i\pi} & = -1, \qquad k = 1, \\ e^{5i\pi/3} & = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad k = 2. \end{cases}$$



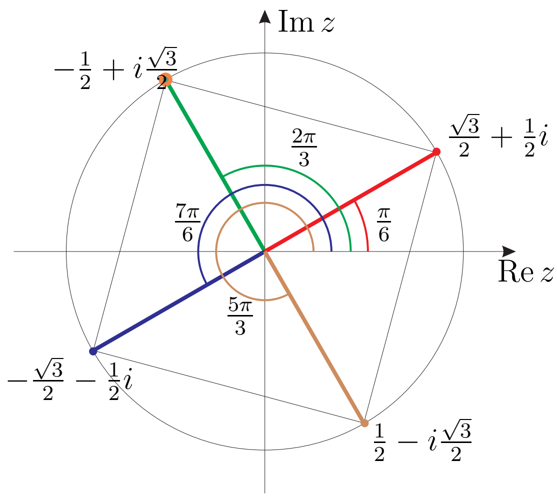
Пример.

$$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{e^{3i\pi/2}} = e^{i\frac{3\pi/2+2\pi k}{3}} = e^{i\frac{3\pi+4\pi k}{6}} = \begin{cases} e^{i\pi/2} & = i, \qquad k = 0, \\ e^{7i\pi/6} & = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i, \qquad k = 1, \\ e^{11i\pi/6} & = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i, \qquad k = 2. \end{cases}$$



Пример.

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[4]{e^{2i\pi/3}} = e^{i\frac{2\pi/3+2\pi k}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)} = \begin{cases} e^{i\pi/6} & = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i, & k = 0, \\ e^{2i\pi/3} & = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & k = 1, \\ e^{7i\pi/6} & = -\dfrac{1}{2}\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}i, & k = 2, \\ e^{5i\pi/3} & = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}, & k = 3. \end{cases}$$



1.5. **Гиперболические функции.** Ранее мы получили соотношения

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Определим гиперболические функции

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\cos ix = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} x = \cos x,$$

$$\sin ix = i \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{sh} ix = i \sin x.$$

Все соотношения для гиперболических функций могут быть получены из соответствующих соотношений для тригонометрических функций:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \cos^2 ix - \left(\frac{1}{i}\sin ix\right)^2 = \cos^2 ix + \sin^2 ix = 1,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 2x = \cos 2ix = \cos^2 ix - \sin^2 ix = \\ = \operatorname{ch}^2 x - (i \sin x)^2 = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y &= \frac{1}{i}(\sin ix + \sin iy) = \\ &= \frac{1}{i} \cdot 2 \sin \frac{i(x+y)}{2} \cos \frac{i(x-y)}{2} = \\ &= \frac{2}{i} \cdot i \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2} = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

2. Многочлены

2.1. **Деление многочленов.**

$$Q(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad A(x) = B(x)Q(x).$$

Будем обозначать степень многочлена нижним индексом: запись $A_n(x)$ означает, что $A(x)$ — многочлен степени n. Тогда

$$\frac{A_n(x)}{B_m(x)} = Q_{n-m}(x).$$

Деление многочленов осуществляется алгоритмом «деления уголком».

$$\begin{array}{l|l} 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 13x + 3 & \underline{x^2 + 3x - 1 \qquad\qquad} \\ \underline{2x^5 + 6x^4 - 2x^3} & 2x^3 - 2x^2 + 4x - 3 \\ \qquad -2x^4 - 2x^3 + 11x^2 & \\ \qquad \underline{-2x^4 - 6x^3 + 2x^2} & \\ \qquad\qquad\quad 4x^3 + 9x^2 - 13x & \\ \qquad\qquad\quad \underline{4x^3 + 12x^2 - 4x} & \\ \qquad\qquad\qquad\quad -3x^2 - 9x + 3 & \end{array}$$

$$\frac{-3x^2-9x+3}{0}$$

2.2. **Деление с остатком.** Деление многочленов нацело выполнимо не всегда, однако всегда возможно «деление с остатком».

Пусть требуется разделить многочлен $A_n(x)$ на многочлен $B_m(x)$. Формула деления с остатком имеет вид

$$A_n(x)=\underbrace{B_m(x)}_{\text{делитель}}\cdot\underbrace{Q_{n-m}(x)}_{\text{частное}}+\underbrace{R_k(x)}_{\text{остаток}},\quad 0\leqslant k<m.$$

Отметим, что степень остатка строго меньше степени делителя.

Если делить многочлен $A_n(x)$ на многочлен первой степени $B_1(x)=x-c$, то остаток будет многочленом нулевой степени, т.е. числом:

$$A_n(x)=(x-c)B_{n-1}(x)+R.$$

Теорема.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $A_n(x)$ на $x-c$ равен $A_n(c)$.

◀ По формуле деления с остатком

$$A_n(x)=(x-c)B_{n-1}(x)+R.$$

Подставляя сюда $x=c$, получим

$$A_n(c)=\underbrace{(c-c)B_{n-1}(c)}_{=0}+R\quad\Longleftrightarrow\quad R=A_n(c).\qquad ▶$$

Теорема.

Многочлен $A_n(x)$ делится на $x-c$ без остатка тогда и только тогда, когда c — корень многочлена $A_n(x)$, т.е. $A_n(c)=0$.

◀ 1. Пусть $A_n(x)$ делится без остатка на $x-c$, т.е.

$$A_n(x)=(x-c)B_{n-1}(x).$$

Подставляя сюда $x=c$, получаем $A_n(c)=0$.

2. Пусть $A_n(c)=0$. Разделим $A_n(x)$ на $x-c$. По формуле деления с остатком

$$A_n(x)=(x-c)B_{n-1}(x)+R,\quad\text{где}\quad R=A_n(c)=0.\qquad ▶$$

2.3. **Кратные корни многочлена.** Если $x = c$ — корень многочлена $A_n(x)$, т.е. $A_n(c) = 0$, то многочлен $A_n(x)$ может быть записан в виде

$$A_n(x) = (x - c)B_{n-1}(x).$$

Если число c не является корнем многочлена $B_{n-1}(x)$, то говорят, что $x = c$ — простой корень многочлена $A_n(x)$.

В противном случае можно записать

$$A_n(x) = (x - c)^p B_{n-p}(x),$$

где многочлен $B_{n-p}(x)$ не имеет число c своим корнем. В этом случае говорят, что число $x = c$ является корнем кратности p многочлена $A_n(x)$.

2.4. **Основная теорема алгебры.**

Любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Эквивалентная формулировка: *поле комплексных чисел алгебраически замкнуто.*

Легко доказать, что каждый многочлен степени n в поле $\mathbb{C}$ имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Действительно, рассмотрим многочлен $A_n(z)$. Согласно основной теореме алгебры он имеет корень $z = c_1$ и может быть представлен в виде

$$A_n(z) = (z - c_1)B_{n-1}(z).$$

Многочлен $B_{n-1}(x)$ также имеет корень $x = c_2$, так что

$$A_n(z) = (z - c_1)(z - c_2)D_{n-2}(z).$$

Продолжая процедуру, получаем, что многочлен $A_n(z)$ допускает разложение вида

$$A_n(z) = a(z - c_1)(z - c_2)\cdots(z - c_n),$$

причем среди корней $c_1, \ldots, c_n$ могут быть и совпадающие.

2.5. **Многочлены с вещественными коэффициентами.**

Многочлен степени n с вещественными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.

Теорема.

Пусть $A(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$A(\bar{z}) = \overline{A(z)}.$$

◄ Пусть

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n.$$

Так как коэффициенты вещественны, то

$$\bar{a}_0 = a_0, \quad \bar{a}_1 = a_1, \quad \dots, \quad \bar{a}_n = a_n.$$

Поэтому

$$\overline{A(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} =$$

$$= \bar{a}_0 \bar{z}^n + \bar{a}_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n-1} \bar{z} + \bar{a}_n =$$

$$= a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{z} + a_n = A(\bar{z}). \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Если $A(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, $z = c$ — его корень, то сопряженное число $\bar{z}$ также является корнем многочлена $A(z)$.

$\blacktriangleleft$ $A(\bar{c}) = \overline{A(c)} = \bar{0} = 0$ $\blacktriangleright$

Таким образом, у многочлена с вещественными коэффициентами комплексные корни могут появляться только сопряженными парами.

Пусть c, $\bar{c}$ — пара сопряженных корней (с ненулевыми мнимыми частями). В разложение многочлена на множители входит произведение

$$(z - c)(z - \bar{c}) = z^2 - (c + \bar{c})z + c\bar{c} = z^2 - 2(\operatorname{Re} c)z + |c|^2,$$

являющееся квадратным трехчленом; отметим, что дискриминант этого трехчлена отрицателен:

$$D = 4(\operatorname{Re} c)^2 - 4|c|^2 < 0, \quad \text{так как} \quad |c|^2 = (\operatorname{Re} c)^2 + (\operatorname{Im} c)^2 > (\operatorname{Re} c)^2.$$

Такие квадратные трехчлены называются неприводимыми.

Таким образом, каждый многочлен с вещественными коэффициентами может быть разложен в произведение линейных множителей и неприводимых квадратных трехчленов:

$$A(x) = a(x - c_1)^{\alpha_1} \cdots (x - c_s)^{\alpha_s} (x + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x + p_r x + q_r)^{\beta_r}.$$

3. Экзаменационные задачи

Задача 1. Найти суммы:

(a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$;

(b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$.

[Указание: Рассмотреть $(1 + i)^n$.]

Ответ. (a) $2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}$; (b) $2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}$.

Задача 2. Найти суммы:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \cos kx$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \sin kx$.

Ответ. (a) $2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2} x$; (b) $2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{n+2}{2} x$.

Задача 3. При каком условии многочлен $x^3 + px + q$ делится на многочлен $x^2 + mx - 1$?

Ответ. $q = m$ и $p = -q^2 - 1$.

Задача 4. При каком условии многочлен $x^5 + ax^3 + b$ имеет двойной корень, отличный от нуля?

Ответ. $3125b^2 + 108a^3 = 0$.

Задача 5. Разложить на множители многочлен $P(x) = \cos(n \arccos x)$.

Ответ. $2^{n-1} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(x - \cos \dfrac{2k-1}{2n} \pi \right)$.

Задача 6. Разложить на множители многочлен $x^{2n} - 2x^n + 2$.

Ответ. $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2 \sqrt[2n]{2} x \cos \dfrac{8k+1}{4n} \pi + \sqrt[n]{2} \right)$.

Задача 7. Разложить на множители многочлен $x^{2n} + x^n + 1$.

Ответ. $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \dfrac{3k+1}{3n} 2\pi + 1 \right)$.