Общий зачет по аналитической геометрии
2008/2009 учебный год

1. Для прямой $y = kx + b$ найти направляющий вектор и вектор нормали.
2. Найти угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.
3. Даны точки $P(3;\ 1)$ и $Q(0;\ 7)$. Для прямой PQ найти: а) параметрические уравнения с начальной точкой P и направляющим вектором $\overrightarrow{PQ}$; б) каноническое уравнение; в) уравнение с угловым коэффициентом; г) общее уравнение; д) уравнение в отрезках.
4. Дана прямая $x + 2y + 6 = 0$. Составить общее уравнение прямой l, содержащей точку $P(3;\ 4)$ и такой, что: а) l параллельна данной прямой; б) l перпендикулярна данной прямой.
5. Найти расстояние от точки $M(2;\ 5)$ до прямой $15x + 8y = 240$.
6. Найти общее уравнение прямой, все точки которой равноудалены от точек $A(2;\ 5)$ и $B(6;1)$.
7. Найти уравнение биссектрисы острого угла, образованного прямыми $7x + 24y+1=0$ и $3x + 4y + 1 = 0$.
8. Найти точку A', симметричную точке $A(1;\ 1)$ относительно прямой $x + 2y = 38$.
9. Составить общее и параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $A(-2,4,3)$ параллельно векторам $\vec{a}(1,3,2)$, $\vec{b}(-1,2,4)$.
10. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2,1,1)$ перпендикулярно вектору $n(-2,5,1)$.
11. Найти расстояние от точки $A(2,1,1)$ до плоскости, проходящей через точку $B(1,3,-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(1,1,1)$.
12. Найти расстояние между параллельными плоскостями, проходящими через точки $A(1,2,3)$ и $B(-2,4,1)$ соответственно параллельно векторам $\vec{a}(2,2,3), \vec{b}(1,-1,2)$.
13. Найти расстояние от точки $A(1;\ 2;\ 3)$ до плоскости $2x + 2y + z = 24$.
14. Найти точку A', симметричную точке $A(7;\ 4;\ 1)$ относительно плоскости $x + 2y + 3z = 60$.
15. Найти уравнение плоскости, все точки которой равноудалены от точек $A(1;\ –1;\ 3)$ и $B(3;\ 3;\ 5)$.
16. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $A(1,-1,3), B(2,3,4), C(-1,1,2)$.
17. При каких значениях параметра a плоскости $x + ay + z - 1 = 0,\quad ax + 9y + \dfrac{a^3}{9}z + 3 = 0$ 1) пересекаются, 2) параллельны, 3) совпадают?
18. Найти общее уравнение плоскости, содержащей прямую $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ и параллельной прямой $\dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y-8}{3} = \dfrac{z-9}{4}$.
19. Найти общее уравнение плоскости, содержащей прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ и перпендикулярной плоскости $x - y + 2z + 7 = 0$.
20. Даны точки $P(1;\ 2;\ 3)$ и $Q(5;\ 5;\ 5)$. Составить: а) параметрические уравнения прямой с начальной точкой P и направляющим вектором $\overrightarrow{PQ}$; б) канонические уравнения прямой PQ.

21. Составить канонические уравнения прямой, содержащей точку $A(3; 4; 7)$ и параллельной прямой $\frac{x}{6} = \frac{y}{5} = \frac{z-9}{2}$.
22. Найти канонические уравнения сторон треугольника ABC с вершинами $A(-1; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(3; 2; 1)$.
23. Составить канонические уравнения прямой, содержащей точку $A(1; 2; 3)$ и перпендикулярной плоскости $x + y + 2z - 7 = 0$.
24. Составить канонические уравнения прямой, содержащей точку $A(1; 2; 3)$ и перпендикулярной плоскости $x + y + 2z - 7 = 0$.
25. Составить общее уравнение плоскости, содержащей точку $A(1; 2; -3)$ и перпендикулярной к прямой $\frac{x-7}{3} = \frac{y-8}{4} = \frac{z-9}{5}$.
26. Дана пирамида $ABCD$ с вершинами $A(1; 3; 5)$, $B(1; 1; 1)$, $C(1; 2; 3)$, $D(3; 0; 0)$. Найти канонические уравнения высоты AH.
27. Найти общее уравнение плоскости, содержащей прямую $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ и параллельной прямой $\frac{x-7}{2} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-9}{4}$.
28. Найти общее уравнение плоскости, содержащей прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ и перпендикулярной плоскости $x - y + 2z + 7 = 0$.
29. Даны три вектора $\vec{a}(1,-1,1),\ \vec{b}(5,1,1),\ \vec{c}(0,3,-2)$. Найти: а) $\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$; б) $|a|^2 + |b|^2 - (a\cdot b)\cdot(b\cdot c)$; в) $(\overrightarrow{\vec{a}\cdot\vec{c}})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) - |\vec{a}|^2\,(\vec{b}\cdot\vec{c})$.
30. Найти векторное произведение векторов, заданных своими координатами: $\vec{a}(3,-1,2), \vec{b}(2,-3,-5)$.
31. Векторы $\vec{a},\vec{b}$ неколлинеарны. При каких значениях λ коллинеарны векторы $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ и $3\vec{a}+\lambda\vec{b}$?
32. Найти смешанное произведение векторов, заданных своими координатами: $\vec{a}(3,5,1),\ \vec{b}(4,0,-1),\ \vec{c}(2,1,1)$.
33. Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарны. При каких значениях λ компланарны векторы $\vec{a}+2\vec{b}+\lambda\vec{c},\ 4\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c},\ 7\vec{a}+8\vec{b}+\lambda^2\vec{c}$?
34. Даны плоские углы α,β,γ трехгранного угла. Найти его двугранные углы.
35. Составить каноническое уравнение эллипса γ, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, причем у эллипса:
    a. полуоси равны 5 и 2;
    b. большая полуось равна 10, а расстояние между фокусами равно 8;
    c. расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен $3/5$;
    d. малая ось равна 10, а эксцентриситет равен $12/13$;
    e. большая ось равна 8, а расстояние между директрисами 13;
    f. расстояние между директрисами равно 32 и эксцентриситет равен $1/2$.
36. Дан эллипс $\gamma: 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$. Найти его полуоси, фокусы и эксцентриситет. Составить уравнения директрис эллипса.
37. Дан эллипс $\gamma: 9x^2 + 5y^2 = 45$. Найти его полуоси, фокусы и эксцентриситет. Составить уравнения директрис эллипса.
38. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = 2/5$, расстояние от точки эллипса до директрисы $\rho(M, d_1) = 20$. Найти соответствующий фокальный радиус F_1M.

39. Составить каноническое уравнение гиперболы γ, фокусы которой лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, причем у гиперболы:
    a. полуоси равны 6 и 18;
    b. расстояние между фокусами равно 10 и эксцентриситет равен $5/3$;
    c. расстояние между вершинами равно 48, а асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\frac{12}{5}x$;
    d. расстояние между директрисами равно $32/5$, а асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\frac{4}{3}x$.
40. Чему равны полуоси, фокусы и эксцентриситет равносторонней гиперболы? Составить уравнения асимптот этой кривой.
41. Дана гипербола $\gamma: 16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$. Найти ее полуоси, фокусы и эксцентриситет. Составить уравнения асимптот и директрис гиперболы.
42. Дана гипербола $\gamma: \frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$. Составить канонические уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки $M\left(10; -\sqrt{5}\right)$ гиперболы.
43. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = 2$, фокальный радиус $F_2M = 16$. Найти расстояние от точки до соответствующей директрисы $\rho(M, d_2)$.
44. Составить каноническое уравнение параболы γ с фокусом $F(-7;0)$ и директрисой $d: x - 7 = 0$.
45. Найти фокальный параметр параболы и определить ее расположение относительно координатных осей, если парабола задана уравнением:
    a. $x^2 = 5y$;
    b. $y^2 = -4x$;
    c. $x^2 = -y$.
46. Дана парабола $\gamma: y^2 - 24x = 0$. Найти фокус и составить уравнение директрисы параболы.
47. Найти фокальный радиус FM точки параболы $\gamma: y^2 = 20x$, если абсцисса точки M равна 7.
48. На параболе $\gamma: y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.
49. Вычислить $\frac{(2+3i)(7-2i)}{(3i+1)^2}$ (*а также аналогичные задачи с другими числовыми данными*).
50. Вычислить (*а также аналогичные задачи с другими числовыми данными*):
    a. $\sqrt[3]{-1}$;
    b. $\sqrt[3]{i}$;
    c. $\sqrt[3]{-i}$.
51. Решить неоднородную систему линейных уравнений методом Гаусса (*а также аналогичные задачи с другими числовыми данными*):
    a. $x + y + z = 1$;
    b. $\begin{cases} x + y + z = 3; \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$
52. Решить однородную систему линейных уравнений методом Гаусса (*а также аналогичные задачи с другими числовыми данными*):
    a. $x + y + z = 0$;

b. $\begin{cases} x + y + z = 0; \\ x + 2y - z = 0. \end{cases}$

53. Решить систему уравнений методом Крамера (*а также аналогичные задачи с другими числовыми данными*):

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 12; \\ 5x - 4y = -2. \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 2; \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$

54. Вычислить определитель (*а также аналогичные задачи с другими числовыми данными*):

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix};$

b. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$