

Вопросы и задачи по ТФКП для общего зачета и комиссии 2008 г.

I. Действия с комплексными числами. Элементарные функции комплексного переменного.

1 Представьте выражение $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right)^{80}}$ в трех формах.

2 Представьте выражение $\sin\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$ в трех формах.

3 Представьте выражение $\cos\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$ в трех формах.

4 Представьте выражение $ch\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$ в трех формах.

5 Представьте выражение $sh\left(-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}\right)$ в трех формах.

6 Представьте выражение $e^{\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)}$ в трех формах.

7 Представьте выражение $\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right)$ в трех формах.

II. Обратные функции комплексной переменной. Решение простейших уравнений.

8 Решите уравнение: $z^3 - (-8i) = 0$

9 Решите уравнение: $(10 - 3i)z + (2 + 8i)\bar{z} = -9 + 7i$

10 Решите уравнение $\sin z = \frac{2}{3}$

11 Решите уравнение $\cos z = -\frac{3}{5}i$

12 Решите уравнение $\operatorname{tg} z = \frac{2}{3}i$

13 Решите уравнение $\operatorname{ch} z = \frac{3}{5}i$

14 Решите уравнение $\operatorname{sh} z = -\frac{1}{2}$

15 Решите уравнение $\operatorname{th} z = -\frac{3}{5}$

16 Решите уравнение $e^z = \frac{1+i}{1-i}$

17 Решите уравнение: $z^3 + 2 - 2i = 0$

18 Решите уравнение: $z^3 + 1 = 0$

19 Решите уравнение: $z^6 - 1 = 0$

20 Решите уравнение: $z^3 - 2 - 2i = 0$

21 Решите уравнение: $e^z = 1 + i$

22 Решите уравнение: $e^z = 1 - i$

23 Решите уравнение: $z^3 - 2 + 2i = 0$

24 Решите уравнение: $z^2 + |z| = 0$

III. Разложение в ряд Лорана.

25 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ в кольце $1 < |z| < 2$.

26 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ в кольце $0 < |z-1| < 1$.

27 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ в кольце $0 < |z-2| < 1$.

28 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ в кольце $0 < |z-i| < 2$.

29 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$ в кольце $1 < |z| < +\infty$.

30 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$ в кольце $1 < |z+2| < 3$.

31 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$ в кольце $2 < |z| < 3$,

32 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$ в кольце $3 < |z| < +\infty$,

33 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}$ в кольце $|z| > 1$

34 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ в кольце $|z| > 1$

35 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \sin(1/z) - \frac{1}{1+z}$ в кольце $0 < |z| < 1$

36 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \sin(z) - \frac{1}{1-z}$ в кольце $|z| > 1$

37 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \sin z + \cos \frac{1}{z}$ в кольце $0 < |z| < 1$

38 Разложите в ряд Лорана $f(z) = \cos z + \sin \frac{1}{z}$ в кольце $|z| > 1$

39 Разложите в ряд Лорана $f(z) = e^{1/z} + \ln(1+z)$ в кольце $0 < |z| < 1$

40 Разложите в ряд Лорана $f(z) = e^z + \ln(1 - \frac{1}{z})$ в кольце $|z| > 1$

IV. Классификация особых точек.

41 Найдите ВСЕ особые точки, исключая бесконечно удаленную точку, и определите их тип: $f(z) = \frac{e^{-1/z^2} \sqrt[3]{z^4-1}}{(z^2+9)}$

42 Найдите ВСЕ особые точки, исключая бесконечно удаленную точку, и определите их тип: $f(z) = \frac{\text{Ln}(z^4 - 1)}{\sin \frac{1}{z+2}}$

43 Найдите ВСЕ особые точки, исключая бесконечно удаленную точку, и определите их тип: $f(z) = \frac{\cos(1/z^2)}{(z^2 + 4)}$

44 Найдите ВСЕ особые точки, исключая бесконечно удаленную точку, и определите их тип: $f(z) = \frac{\text{Ln}(1 + z^2)}{(z^3 - 27)}$

45 Найдите ВСЕ особые точки, исключая бесконечно удаленную точку, и определите их тип: $f(z) = \frac{\text{tg}\left(\frac{1}{z-1}\right)}{(z^2 - 2z - 3)}$

46 Найдите ВСЕ особые точки, исключая бесконечно удаленную точку, и определите их тип: $f(z) = \frac{(z^2 + 4z + 5)}{(z^2 - 2z - 3) e^{z^2}}$

47 Найдите ВСЕ особые точки, исключая бесконечно удаленную точку, и определите их тип: $f(z) = \frac{e^{-1/z^2}}{\text{tg}\left(\frac{1}{z+3}\right)}$

48 Найдите ВСЕ особые точки, исключая бесконечно удаленную точку, и определите их тип: $f(z) = \frac{\text{Ln}(4 - 5z)}{(z^2 + 2z - 4)^2 e^{-1/z^2}}$

49 Найдите ВСЕ особые точки и определите их тип: $f(z) = e^z + e^{-1/z^2}$

50 Найдите ВСЕ особые точки и определите их тип: $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) - e^{-z}$

51 Найдите ВСЕ особые точки, исключая бесконечно удаленную точку, и определите их тип: $f(z) = \sin \frac{1}{z} - \ln(1 + z^2)$

V. Вычеты.

52 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$

53 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек $f(z) = \frac{1}{z - z^3}$

54 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек
 $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z^2 - 9)}$

55 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек
 $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2 + 9)}$

56 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек
 $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$

57 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек:
 $f(z) = \frac{1}{z(1 - z^2)}$

58 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек:
 $f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z - 1)}$

59 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек:
 $f(z) = \frac{\sin(2z)}{(z + 1)^3}$

60 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек: $f(z) = \operatorname{tg} z$

61 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек: $f(z) = \frac{z}{\sin z}$

62 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек:
 $f(z) = z^8 \sin \frac{1}{z}$

63 Найдите вычеты относительно ВСЕХ изолированных особых точек:
 $f(z) = \frac{z^8}{(1 + z)^4}$

VI. Нахождение контурных интегралов.

64 Найдите: $\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz.$

65 Найдите: $\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz.$

66 Найдите: $\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} dz.$

67 Найдите: $\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz.$

68 Найдите: $\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}.$

69 Найдите: $\int_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz.$

70 Найдите: $\int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z dz}{z^2 - z}.$

71 Найдите: $\int_{|z+1|=4} \frac{z dz}{e^z + 3}.$

72 Найдите: $\int_{|z-2|=1/2} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}.$

73 Найдите: $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}.$

74 Найдите: $\int_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$

75 Найдите: $\int_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^4 + 1}.$

VII. Нахождение несобственных интегралов.

76 Найдите: $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2}.$

77 Найдите: $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x dx}{x^2 + 4}$.

78 Найдите: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{0.5}(x+1)}$.

79 Найдите: $\int_0^{\infty} \frac{\sin 3x dx}{x^3 + 4x}$.

80 Найдите: $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)}$.

81 Найдите: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}$.

82 Найдите: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}$.

83 Найдите: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 9}$.

84 Найдите: $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1 + x^3}$.

85 Найдите: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 2x^2 + 8}$.

86 Найдите: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 1)}$.

87 Найдите: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 2x + 8)}$.

88 Найдите: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 4x + 20)}$.

89 Найдите: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

90 Найдите: $\int_0^{\infty} \frac{x^1 dx}{1+x^3}$.

91 Найдите: $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^8}$.

92 Найдите: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6 dx}{1+x^8}$.

93 Найдите: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^8}$.

94 Найдите: $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x - 5}$

95 Найдите: $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{26 - 10 \cos x}$

VIII. Прямое и обратное преобразование Лапласа. Решение дифференциальных уравнений методами операционного исчисления.

96 Найдите изображение функции t^2 .

97 Найдите изображение функции e^{5t} .

98 Найдите изображение функции $\sin(3t)$.

99 Найдите изображение функции $\cos(7t)$.

100 Используя преобразование Лапласа, найдите решение задачи Коши $y'' - 3y' = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

101 Используя преобразование Лапласа, найдите решение задачи Коши

$$y'' - 2y' = 2e^x, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

102 Используя преобразование Лапласа, найдите решение задачи Коши

$$y'' + y = 2 \sin x, y(0) = 0, y'(0) = -\frac{1}{2}$$

103 Используя преобразование Лапласа, найдите решение задачи Коши

$$y'' + y = 2 \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

104 Используя преобразование Лапласа, найдите решение задачи Коши

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^x, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

105 Используя преобразование Лапласа, найдите решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^x, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

106 Найдите интеграл по прямой, параллельной мнимой оси ($a > 0, t > 0$):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{z e^{tz}}{1+z^2} dz$$

107 Найдите интеграл по прямой, параллельной мнимой оси ($a > 0, t > 0$):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{1+z^2} dz$$

108 Найдите интеграл по прямой, параллельной мнимой оси ($a > 0, t > 0$):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^3} dz$$

109 Найдите интеграл по прямой, параллельной мнимой оси ($a > 0, t > 0$):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}$$