

Экзаменационные вопросы по ТФКП. Зима 2007 г.

Вопрос 1. Элементарные операции с комплексными числами.

Элементарные функции комплексной переменной.

- 1 Операция сложения комплексных чисел. Ее геометрическая интерпретация. Неравенства треугольника.
- 2 Операция умножения комплексных чисел. Ее геометрическая интерпретация. Как связаны модуль и аргумент произведения с модулями и аргументами сомножителей?
- 3 Операция деления комплексных чисел. Как связаны модуль и аргумент частного с модулями и аргументами делимого и делителя?
- 4 Операция комплексного сопряжения и ее свойства. Ее геометрическая интерпретация. Как связаны модули и аргументы комплексно сопряженных чисел?
- 5 Операция комплексного сопряжения и ее свойства. Ее геометрическая интерпретация. Как связаны вещественные и мнимые части комплексно сопряженных чисел?
- 6 Операция возведения комплексного числа в целую степень. Как меняются модуль и аргумент при возведении в целую степень? Формула Муавра.
- 7 Формы записи комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа и их геометрический смысл. Формула Эйлера.
- 8 Операция извлечения корня  $n$ -той степени из комплексного числа. Как меняются модуль и аргумент при извлечении корня  $n$ -той степени? Как располагаются значения корня  $n$ -той степени на комплексной плоскости?
- 9 Формы записи комплексного числа. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Выражения модуля и аргумента комплексного числа через вещественную и мнимую части.

- 10** Операция комплексного сопряжения и ее свойства. Ее геометрическая интерпретация. Выражение вещественной и мнимой частей комплексного числа через пару комплексно сопряженных чисел?
- 11** Запишите функцию  $f(z) = z^2$ , где  $z = x + iy$  в виде  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 12** Запишите функцию  $f(z) = \frac{1}{z}$ , где  $z = x + iy$  в виде  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 13** Запишите выражение для функции Жуковского. Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 14** Запишите функцию  $f(z) = e^z$ , где  $z = x + iy$  в виде  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции. Чему равен период функции  $e^z$ ?
- 15** Запишите функцию  $f(z) = \sin(z)$ , где  $z = x + iy$  в виде  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 16** Запишите функцию  $f(z) = \cos(z)$ , где  $z = x + iy$  в виде  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 17** Запишите функцию  $f(z) = \sqrt{z}$ , где  $z = \rho e^{i\varphi}$  в виде  $f(z) = R e^{i\Phi}$ . Однозначна ли эта функция? Если нет, то как выделить однозначные ветви?
- 18** Запишите функцию  $f(z) = \operatorname{Ln}(z)$ , где  $z = x + iy$  в виде  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Однозначна ли эта функция? Если нет, то как выделить однозначные ветви?

- 19** Запишите функцию  $f(z) = \ln(z)$ , где  $z = x + iy$  в виде  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 20** Запишите функцию  $f(z) = \text{Ln}(z)$ , где  $z = \rho e^{i\varphi}$  в виде  $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$ . Однозначна ли эта функция? Если нет, то как выделить однозначные ветви?
- 21** Запишите функцию  $f(z) = \ln(z)$ , где  $z = \rho e^{i\varphi}$  в виде  $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$ . Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 22** Как определяется функция  $f(z) = z^a$  при различных  $a$ ?

Вопрос 2. Понятие аналитической функции.

- 23** Что такое бесконечно удаленная точка комплексной плоскости? Арифметические действия с бесконечно удаленной точкой.
- 24** Определение однозначной функции. Определение однолистной функции. Примеры
- 25** Связь между свойствами однозначности и однолиственности прямой и обратной функции. Примеры
- 26** Отличие производной функции комплексной переменной от производной функции действительной переменной.
- 27** Определение аналитической функции. Пример. Приведите пример функции, не являющейся аналитической.
- 28** Определение аналитической функции. Пример. Приведите пример функции, не являющейся аналитической.
- 29** Запишите условия Коши-Римана для вещественной и мнимой части аналитической функции.

- 30** Запишите условия Коши-Римана для вещественной и мнимой части аналитической функции в полярных координатах.
- 31** Запишите условия Коши-Римана для модуля и аргумента аналитической функции.
- 32** Сформулируйте необходимые и достаточные условия аналитической функции.
- 33** Запишите производную аналитической функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  в различных формах.
- 34** Кратко сформулируйте основные свойства аналитических функций.
- 35** Определение функции, аналитической в замкнутой области.
- 36** Как связаны аналитичность функции и гармоничность ее вещественной и мнимой частей?
- 37** Геометрический смысл модуля производной аналитической функции.
- 38** Геометрический смысл аргумента производной аналитической функции.
- 39** Сформулируйте теорему о нулях аналитической функции.
- 40** Сформулируйте следствия теоремы о нулях аналитической функции.
- 41** Сформулируйте теорему единственности определенной аналитической функции.
- 42** Опишите возможные множества задания аналитической функции.

**43** Что такое нуль аналитической функции? Что такое нуль  $n$  –того порядка аналитической функции? Опишите поведение аналитической функции в окрестности нуля  $n$  –того порядка.

**44** Определение правильной точки. Определение особой точки.  
Примеры

**45** Запишите интегральную формулу для  $n$  –той производной аналитической функции.

Вопрос 3. Интеграл по кривой на комплексной плоскости. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

**46** Определение интеграла от функции комплексной переменной по кривой на комплексной плоскости.

**47** Кратко сформулируйте основные свойства  $\int_C f(z)dz$ .

**48** Запишите формулу вычисления  $\int_C f(z)dz$  при помощи интегрирования по параметру.

**49** Чему равен  $\int_{|z-z_0|=R_0} \frac{dz}{z-z_0}$  ?

**50** Запишите формулу замены переменной в  $\int_C f(z)dz$ .

**51** Сформулируйте теорему Коши для односвязной области.

**52** Сформулируйте теорему Коши для интеграла по границе односвязной области от аналитической функции.

**53** Сформулируйте теорему Коши для многосвязной области.

- 54** Что такое неопределенный интеграл от  $f(z)$ ?
- 55** Сформулируйте условия аналитичности неопределенного интеграла от  $f(z)$ ?
- 56** Что такое первообразная функции  $f(z)$ ? Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
- 57** Запишите формулу Коши-Адамара. Сформулируйте условия ее применимости.
- 58** Запишите интегральную формулу Коши. Сформулируйте условия ее применимости.
- 59** Запишите формулу среднего значения.
- 60** Сформулируйте принцип максимума модуля аналитической функции.
- 61** Сформулируйте принцип минимума модуля аналитической функции.
- 62** Что такое интеграл типа Коши?
- 63** Сформулируйте теорему о возможности дифференцирования интеграла типа Коши под знаком интеграла.
- 64** Сформулируйте свойства интеграла типа Коши.
- 65** Сформулируйте теорему о производных высших порядков аналитической функции. Запишите интегральную формулу для  $n$ -той производной аналитической функции.
- 66** Сформулируйте теорему Морера.

- 67 Сформулируйте теорему Лиувилля.
- 68 Определение целой функции. Пример. Сформулируйте основное свойство целой функции.
- 69 Что такое криволинейный интеграл, зависящий от параметра?
- 70 Сформулируйте теорему о дифференцировании криволинейного интеграла по параметру.

Вопрос 4. Числовые и функциональные ряды.

- 71 Что такое числовой ряд? Что такое частичная сумма ряда? Что такое сумма ряда? Что такое остаток ряда?
- 72 Определение сходящегося числового ряда. Определение расходящегося числового ряда. Примеры
- 73 Сформулируйте критерий Коши для числового ряда.
- 74 Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.
- 75 Сформулируйте признак Даламбера. Сформулируйте признак Даламбера в предельной форме.
- 76 Сформулируйте признак Коши. Сформулируйте признак Коши в предельной форме.
- 77 Что такое функциональный ряд? Что такое частичная сумма ряда? Что такое сумма ряда? Что такое остаток ряда?
- 78 Сформулируйте критерий Коши сходимости функционального ряда.
- 79 Определение равномерно сходящегося функционального ряда. Примеры

- 80** Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.
- 81** Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
- 82** Сформулируйте условия непрерывности суммы функционального ряда.
- 83** Сформулируйте условия, при которых возможно почленное интегрирования функционального ряда.
- 84** Сформулируйте теорему Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
- 85** Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
- 86** Сформулируйте теорему Абеля для степенного ряда.
- 87** Что такое круг сходимости степенного ряда? Что такое радиус сходимости степенного ряда?
- 88** Запишите формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
- 89** Укажите область равномерной сходимости степенного ряда.
- 90** Укажите область, где возможно почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Меняется ли при этом радиус сходимости?
- 91** Пусть степенной ряд с центром в точке  $z_0$  сходится к функции  $f(z)$ . Запишите выражения коэффициентов ряда через значения функции и ее производных в точке  $z_0$ .



**92** Чему равна сумма степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n$  ?

**93** Сформулируйте теорему Тейлора.

**94** Запишите интегральную формулу для коэффициентов ряда Тейлора.

**95** Чем определяется радиус круга сходимости ряда Тейлора для аналитической функции?

**96** Запишите ряды для  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ .

**97** Сформулируйте теорему о наличии особой точки на границе круга сходимости.

Вопрос 5. Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек. Вычеты.

**98** Что такое ряд Лорана? Что представляет собой область его сходимости? Примеры

**99** Сформулируйте теорему о разложимости функции в ряд Лорана.

**100** Что такое неизолированная особая точка. Примеры. В окрестности каких особых точек нельзя раскладывать функцию в ряд Лорана?

**101** Определение изолированной особой точки. Примеры.

**102** Определение устранимой особой точки. Определение устранимой бесконечно удаленной особой точки. Примеры

**103** Сформулируйте теорему об устранимой особой точке. Как можно представить функцию в окрестности устранимой особой точки? Что можно сказать о пределе функции в устранимой особой точке?

- 104** Определение полюса. Определение полюса в бесконечно удаленной точке. Примеры
- 105** Сформулируйте теорему о полюсе. Как можно представить функцию в окрестности полюса? Что можно сказать о пределе функции в полюсе?
- 106** Определение существенно особой точки. Определение существенно особой бесконечно удаленной точки. Примеры.
- 107** Сформулируйте теорему Сохоцкого-Вейерштрасса. Что можно сказать о пределе функции существенно особой точке?
- 108** Определение вычета функции в изолированной особой точке. Определение вычета функции в бесконечно удаленной изолированной особой точке. В каких точках нельзя считать вычеты?
- 109** Сформулируйте основную теорему теории вычетов.
- 110** Чему равен вычет в устранимой особой точке? Что можно сказать о вычете в бесконечно удаленной устранимой особой точке? Примеры
- 111** Чему равен вычет в полюсе первого порядка? Запишите формулу вычисления вычета в полюсе  $n$ -го порядка. Примеры
- 112** Как считать вычет в существенно особой точке?
- 113** Как связан вычет в бесконечно удаленной изолированной особой точке с вычетами в других изолированных особых точках?
- 114** Определение мероморфной функции. Примеры
- 115** Напишите две формулы для вычисления вычета в полюсе первого порядка.

**116** Сформулируйте теорему о сумме вычетов.

**117** Что такое кольцо сходимости ряда Лорана? Как определяются меньший и больший радиусы кольца сходимости?

Вопрос 6. Применение вычетов. Конформные отображения.  
Операционное исчисление.

**118** Сформулируйте теорему о вычислении несобственного интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  при помощи теории вычетов.

**119** Сформулируйте лемму Жордана для верхней полуплоскости.

**120** Сформулируйте лемму Жордана для нижней полуплоскости.

**121** Сформулируйте лемму Жордана для левой полуплоскости.

**122** Сформулируйте лемму Жордана для правой полуплоскости.

**123** Сформулируйте теорему о вычислении несобственного интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)dx$  при помощи теории вычетов.

**124** Определение логарифмической производной. Особые точки логарифмической производной. Определение логарифмического вычета.

**125** Чему равен логарифмический вычет в нуле  $m$  –того порядка. Чему равен логарифмический вычет в полюсе  $n$  –того порядка.

**126** Сформулируйте теорему о логарифмическом вычете.

**127** Сформулируйте принцип аргумента.

- 128 Сформулируйте теорему Руше.
- 129 Сформулируйте основную теорему высшей алгебры.
- 130 Определение конформного отображения в точке. Определение конформного отображения области на область.
- 131 Сформулируйте необходимое и достаточное условие конформности отображения.
- 132 Сформулируйте принцип соответствия границ.
- 133 Сформулируйте теорему Римана.
- 134 На что отображается комплексная плоскость функцией Жуковского? Запишите обратную функцию Жуковского.
- 135 Как преобразуется оператор Лапласа при конформном отображении?
- 136 Сформулируйте задачу Робэна.
- 137 Что такое функция ограниченной степени роста?
- 138 Что такое одностороннее преобразование Лапласа?
- 139 Для каких  $p$  существует изображение  $F(p)$ ? Сформулируйте соответствующую теорему.
- 140 Каковы аналитические свойства изображения  $F(p)$ ? Сформулируйте соответствующую теорему.
- 141 Сформулируйте теорему запаздывания.

**142** Чему равно изображение производной? Чему равна производная изображения?

**143** Чему равно изображение интеграла?

**144** Чему равно изображение свертки?

**145** Запишите интеграл Дюгамеля.

**146** Сформулируйте теорему Меллина.

**147** Чему равно изображение произведения?