

Вопросы к первой части экзамена по курсу “Методы математической физики” (2008-2009 учебный год)

1. Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения  $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0$ ,  $x \in (a, b)$ , где  $k(x) = (x - a)\varphi(x)$ ,  $\varphi(a) \neq 0$ , в особых точках.
2. Напишите уравнение Бесселя и его фундаментальную систему решений.
3. Дайте определение цилиндрической функции. Приведите примеры цилиндрических функций.
4. Назовите особые точки функций, которые являются решениями уравнения Бесселя.
5. Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда.
6. Напишите формулу, связывающую функции Бесселя порядков  $n$  и  $-n$ .
7. Напишите формулы для функций Бесселя порядков  $1/2$  и  $-1/2$ . Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?
8. Напишите интегральное представление для функции Бесселя.
9. Дайте определение функции Ханкеля.
10. Напишите формулу, связывающую функции Ханкеля положительного и отрицательного индексов.
11. Напишите формулу, связывающую функции Бесселя и функции Ханкеля.
12. Дайте определение функции Неймана.
13. Напишите формулу, связывающую функции Бесселя, Неймана и Ханкеля.
14. Напишите асимптотические формулы при больших значениях аргумента для функций Ханкеля первого и второго рода.
15. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Бесселя.
16. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Неймана.
17. Опишите поведение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля в окрестности нуля.
18. Поставьте задачу на собственные значения для оператора Бесселя.
19. Сформулируйте теорему Стеклова в случае задачи на собственные значения для оператора Бесселя.
20. Поставьте задачу на собственные значения для круга в случае граничных условий 1-ого рода.
21. Поставьте задачу на собственные значения для круга в случае граничных условий 2-ого рода.
22. Напишите собственные функции круга.
23. Напишите характеристическое уравнение для определения

- собственных значений задачи для круга в случае граничных условий первого, второго и третьего рода.
24. Напишите формулу для квадрата нормы собственной функции задачи на собственные значения для оператора Бесселя в случае граничных условий первого, второго и третьего рода.
  25. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента.
  26. Дайте определение функции Инфельда.
  27. Напишите формулу, связывающую функции Инфельда порядков  $n$  и  $-n$ .
  28. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Инфельда.
  29. Дайте определение функции Макдональда.
  30. Напишите асимптотическую формулу для функции Макдональда.
  31. Дайте определение классических ортогональных полиномов.
  32. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов.
  33. Являются ли производные классических ортогональных полиномов классическими ортогональными полиномами? Если да, то с каким весом они ортогональны?
  34. Напишите уравнение для классических ортогональных полиномов.
  35. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках.
  36. Напишите формулу для собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для классических ортогональных полиномов.
  37. Напишите общую формулу для классических ортогональных полиномов (общую формулу Родрига).
  38. Дайте определение полиномов Якоби.
  39. Напишите формулу Родрига для полиномов Якоби.
  40. Дайте определение полиномов Лежандра.
  41. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра.
  42. Напишите выражение собственных значений для полиномов Лежандра.
  43. Напишите выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра.
  44. Дайте определение полиномов Лагерра.
  45. Дайте определение полиномов Эрмита.
  46. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов.
  47. Напишите выражение производящей функции полиномов Лежандра.
  48. Является ли система полиномов Лежандра замкнутой и полной?

- Сформулируйте соответствующие утверждения.
49. Сформулируйте теорему Стеклова для полиномов Лежандра.
  50. Дайте определение присоединенных функций Лежандра.
  51. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра.
  52. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра.
  53. Напишите выражение квадрата нормы для присоединенных функций Лежандра.
  54. Является ли система присоединенных функций Лежандра замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.
  55. Сформулируйте теорему Стеклова для присоединенных функций Лежандра.
  56. Дайте определение сферических функций.
  57. Поставьте задачу на собственные значения для сферических функций.
  58. Является ли система сферических функций замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.
  59. Напишите условие ортогональности для сферических функций.
  60. Напишите выражение квадрата нормы для сферических функций.
  61. Сформулируйте теорему Стеклова для сферических функций.
  62. Дайте определение шаровых функций.
  63. Являются ли шаровые функции собственными функциями соответствующей задачи на собственные значения? Обоснуйте ответ.
  64. Поставьте задачу на собственные значения для шара в случае граничных условий Дирихле.
  65. Поставьте задачу на собственные значения для шара в случае граничных условий Неймана.
  66. Напишите собственные функции шара.
  67. Что такое характеристики уравнения в частных производных второго порядка в случае двух переменных?
  68. Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных.
  69. Напишите каноническую форму уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных.
  70. Дайте определение корректно поставленной задачи по Адамару.
  71. Приведите пример постановки начально-краевой задачи для уравнения колебаний.
  72. Дайте определение классического решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний.
  73. Приведите пример постановки начально-краевой задачи для

- уравнения теплопроводности.
74. Дайте определение классического решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.
  75. Изложите общую схему метода разделения переменных (метода Фурье).
  76. К решению каких задач можно свести решение общей начально-краевой задачи в линейном случае?
  77. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле на границе  $S$  области  $D$  и перечислите основные свойства собственных функций и собственных значений этой задачи.
  78. Изложите применение метода Фурье в случае неоднородных граничных условий.
  79. Напишите первую формулу Грина. Каковы условия ее применимости?
  80. Напишите вторую формулу Грина. Каковы условия ее применимости?
  81. Напишите третью формулу Грина.
  82. Приведите пример постановки краевой задачи для уравнения Лапласа.
  83. Дайте определение гармонических функций. Приведите примеры.
  84. Сформулируйте теорему Гаусса для гармонических функций.
  85. Сформулируйте теорему о среднем для гармонических функций.
  86. Является ли гармоническая функция бесконечно дифференцируемой? Обоснуйте ответ.
  87. Сформулируйте принцип максимума для гармонических функций.
  88. Сформулируйте принцип сравнения для гармонических функций.
  89. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий Дирихле. Каким методом она доказывается?
  90. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий третьего рода. Каким методом она доказывается?
  91. Имеет ли место единственность решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий второго рода? Обоснуйте ответ.
  92. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае трех переменных.
  93. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае двух переменных.
  94. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае.
  95. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае.

- Каким методом она доказывается?
96. Имеет ли место единственность решения внешней краевой задачи с граничными условиями Неймана для уравнения Лапласа в двумерном случае?
  97. Имеет ли место единственность решения внешней краевой задачи с граничными условиями Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае?
  98. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае.
  99. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае.
  100. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае.
  101. Дайте определение объемного потенциала. Перечислите его основные свойства.
  102. Сформулируйте теорему о равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.
  103. Дайте определение поверхностного потенциала простого слоя.
  104. Дайте определение поверхностного потенциала двойного слоя.
  105. Дайте определение логарифмического потенциала простого слоя.
  106. Дайте определение логарифмического потенциала двойного слоя.
  107. Дайте определение поверхности Ляпунова.
  108. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности потенциала простого слоя.
  109. Сформулируйте теорему о существовании потенциала двойного слоя.
  110. Претерпевает ли разрыв при переходе через несущую поверхность потенциал простого слоя? Обоснуйте ответ.
  111. Чему равно значение потенциала двойного слоя с постоянной плотностью внутри, на и вне несущей поверхности?
  112. Напишите формулу скачка потенциала двойного слоя при переходе через несущую поверхность.
  113. Напишите два союзных интегральных уравнения Фредгольма, к которым сводятся внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа.
  114. Напишите два союзных интегральных уравнения Фредгольма, к которым сводятся внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа.
  115. Сформулируйте теорему существования решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
  116. Сформулируйте теорему существования решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае.
  117. Сформулируйте теорему существования решения внутренней

- задачи Неймана для уравнения Лапласа.
118. Сформулируйте теорему существования решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
  119. Напишите необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.
  120. Что такое потенциал Робена? Каков его физический смысл?
  121. Напишите фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в двумерном случае.
  122. Напишите фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в трехмерном случае.
  123. Дайте определение объемного потенциала для уравнения Гельмгольца.
  124. Дайте определение потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца.
  125. Дайте определение потенциала двойного слоя для уравнения Гельмгольца.
  126. В каком случае выполняется ли принцип максимума для уравнения Гельмгольца?
  127. В каком случае имеет место единственность решения внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца? Приведите формулировки соответствующих теорем.
  128. Сформулируйте общую начально-краевую задачу для уравнения параболического типа.
  129. Дайте определение классического решения начально-краевой задачи для уравнения параболического типа.
  130. Сформулируйте принцип максимума для уравнения параболического типа.
  131. Сформулируйте принцип сравнения для уравнения параболического типа.
  132. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения параболического типа.
  133. Сформулируйте теорему устойчивости решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения параболического типа.
  134. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи Дирихле для однородного уравнения теплопроводности на отрезке.
  135. Напишите функцию Грина для уравнения теплопроводности на отрезке в случае граничных условий Дирихле.
  136. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
  137. Сформулируйте теорему единственности решения начальной задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Каким методом она доказывается?

138. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
139. Напишите фундаментальное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
140. Перечислите основные свойства фундаментального решения уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
141. Каков физический смысл фундаментального решения для уравнения теплопроводности для бесконечной прямой?
142. Что такое "парадокс бесконечной теплопроводности"? Чем его можно объяснить?
143. Поставьте начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой.
144. В чем заключается "метод продолжения" для построения решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой для задач Дирихле и Неймана?
145. Напишите функцию Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Дирихле.
146. Напишите функцию Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Неймана.
147. Напишите общий вид решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородных граничных условий.
148. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности в пространстве.
149. Сформулируйте теорему единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.
150. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.
151. Напишите общий вид решения однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой при однородном начальном и неоднородном граничном условии Дирихле.
152. Сформулируйте принцип Дюамеля.
153. Поставьте общую начально-краевую задачу для уравнения гиперболического типа.
154. Дайте определение классического решения начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа.
155. Сформулируйте теорему единственности решения общей начально-краевой задачи для уравнения колебаний. Каким методом она доказывается?
156. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на отрезке в случае однородных граничных условий Дирихле.
157. Дайте определение функции влияния мгновенного точечного

- импульса (функции Грина) для уравнения колебаний на отрезке.
158. Поставьте начальную задачу для уравнения колебаний на бесконечной прямой.
  159. Напишите формулу Даламбера.
  160. В чем состоит метод распространяющихся волн?
  161. Сформулируйте теорему существования и единственности классического решения задачи Коши для однородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
  162. Сформулируйте теорему устойчивости решения задачи Коши для уравнения колебаний на бесконечной прямой.
  163. Что такое "характеристический треугольник" на фазовой плоскости?
  164. В чем состоит метод интегрирования по фазовой плоскости?
  165. Напишите общую формулу решения начальной задачи для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
  166. Сформулируйте теорему существования и единственности классического решения неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
  167. В чем состоит "метод продолжения" построения решения начально-краевой задачи на полупрямой в случае однородных граничных условий Дирихле и Неймана?
  168. Напишите решение начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на полупрямой в случае однородного начального условия и неоднородного граничного условия Дирихле. Каким методом можно его получить?
  169. Поставьте задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве.
  170. Напишите формулу Кирхгофа.
  171. Напишите формулу Пуассона, выражающую решение задачи Коши для уравнения колебаний в трехмерном пространстве.
  172. В чем состоит "метод спуска"?
  173. Напишите формулу Пуассона, выражающую решение задачи Коши для уравнения колебаний в двумерном пространстве.