

Примерные экзаменационные задания по курсу "Дифференциальные уравнения" 2010 г.

1. Сформулируйте теорему существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка.
2. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения  $y' = f(x, y)$ . Проверьте выполнение условий этой теоремы для задачи  $y' = 4x - 4y$ ,  $x > 0$ ,  $y(0) = 0$ .
3. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения  $y' = f(x, y)$ . Проверьте выполнение условий этой теоремы для задачи  $y' = \sqrt[4]{y}$ ,  $x > 0$ ,  $y(0) = 0$ .
4. Сформулируйте теорему Чаплыгина существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка.
5. Дайте определение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения. Какой вид имеет общее решение такого уравнения? Приведите пример.
6. Метод вариации постоянной для решения неоднородного линейного ОДУ первого порядка. Приведите пример.
7. Метод вариации постоянных для решения неоднородной линейной нормальной системы ОДУ первого порядка. Приведите пример.
8. Покажите равносильность задачи Коши для ОДУ  $n$ -го порядка задаче Коши для нормальной системы 1-го порядка. Приведите пример.
9. Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для системы уравнений первого порядка.
10. Что такое фундаментальная матрица? Как с ее помощью построить общее решение однородной системы? Приведите пример.

- 11 Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для уравнения  $n$ -го порядка, разрешенного относительно старшей производной.
- 12 Сформулируйте теорему о структуре ФСР однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения. Приведите пример.
- 13 Сформулируйте определение матрицы Коши однородной системы линейных ОДУ. Приведите пример.
- 14 Алгоритм решения линейного неоднородного ОДУ  $n$ -го порядка с помощью функции Коши. Приведите пример.
- 15 Определение и свойства фундаментальной матрицы однородной линейной системы ОДУ. Приведите пример.
- 16 Определение и свойства определителя Вронского, построенного из решений однородного ОДУ  $n$ -го порядка. Приведите пример.
- 17 Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ.
- 18 Алгоритм решения задачи Коши для линейного неоднородного ОДУ  $n$ -го порядка с нулевыми начальными условиями с помощью функции Коши. Приведите пример.
- 19 Алгоритм построения решения задачи Коши для линейной однородной системы ОДУ с помощью матрицы Коши. Приведите пример.
- 20 Алгоритм построения решения задачи Коши для линейной неоднородной системы ОДУ с помощью матрицы Коши. Приведите пример.

- 21 Какому интегральному уравнению равносильна задача Коши для ОДУ первого порядка? Приведите пример.
- 22 Что такое характеристическое уравнение линейного однородного ОДУ  $n$ -го порядка? Приведите пример.
- 23 Запишите математические постановки задач Коши для нормальной системы линейных ОДУ 1-го порядка и линейного ОДУ  $n$ -го порядка.
- 24 Что такое фундаментальная матрица однородной системы линейных ОДУ? Приведите пример.
- 25 Что такое матрица Коши однородной системы линейных ОДУ? Приведите пример.
- 26 Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению.
- 27 Дайте определения устойчивого решения. Приведите пример решения устойчивого, но не асимптотически.
- 28 Дайте определения асимптотически устойчивого решения. Приведите пример.
- 29 Дайте определения неустойчивого решения. Приведите пример.
- 30 Сформулируйте критерий устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Приведите примеры.
- 31 Сформулируйте теорему о достаточных условиях устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
- 32 Какое положение равновесия линейной динамической системы на

плоскости называется устойчивым узлом ? Неустойчивым узлом? Приведите примеры.

- 33** Какое положение равновесия линейной динамической системы на плоскости называется устойчивым фокусом ? Неустойчивым фокусом? Приведите примеры.
- 34** Какое положение равновесия линейной динамической системы на плоскости называется седлом ? Что можно сказать про устойчивость седла? Приведите пример.
- 35** Какое положение равновесия линейной динамической системы на плоскости называется центром ? Что можно сказать про устойчивость центра? Приведите пример.
- 36** Сформулируйте теорему единственности решения краевой задачи и теорему о достаточных условиях существования только тривиального решения у однородной краевой задачи с краевыми условиями первого рода.
- 37** Сформулируйте теорему Нагумо о существовании решения нелинейной краевой задачи.
- 38** Сформулируйте теорему о представлении решения краевой задачи с помощью функции Грина.
- 39** Сформулируйте определение функция Грина краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.
- 40** Алгоритм построения функции Грина и решения первой краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка.
- 41** Определение и алгоритм построения функции Грина первой краевой задачи.

- 42 Сформулируйте определение и перечислите свойства функции Грина первой краевой задачи.
- 43 Запишите математические постановки известных Вам краевых задач.
- 44 Запишите линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка в общем виде опишите алгоритм нахождения решения этого уравнения.
- 45 Что такое характеристическая система и характеристики линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка?
- 46 Что такое первый интеграл характеристической системы линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка?
- 47 Сформулируйте теорему о решении квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка.
- 48 Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' = y(y^2 - 1)$ . Используя фазовую плоскость, установите при каких  $y^0$  разрешима краевая задача  
 $y'' = y(y^2 - 1), x \in (0, \infty), y(0) = y^0, y(\infty) = 1.$
- 49 Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' + \sin y = 0$ . Используя первый метод Ляпунова, исследуйте устойчивость точек покоя этого уравнения.
- 50 Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y' = \sin y$ . Исследуйте устойчивость точек покоя этого уравнения.
- 51 Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' = \sin y$ . Исследуйте расположение траекторий на фазовой плоскости и изобразите эскиз фазового портрета.
- 52 Найдите в квадратурах общее решение уравнения

$y' = y(y + 1)(y - 2)$ . Найдите точки покоя и исследуйте их устойчивость.

- 53** Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y' = \cos y$ . Найдите точки покоя и исследуйте их устойчивость.
- 54** Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' = y(1 - y)$ . Исследуйте расположение траекторий на фазовой плоскости. Изобразите на фазовой плоскости эскиз фазового портрета.
- 55** Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' = y(y - 1)$ . Используя фазовую плоскость, установите при каких  $y^0$  разрешима краевая задача,  $y'' = y(y - 1)$ ,  $x \in (0, \infty)$ ,  $y(0) = y^0$ ,  $y(\infty) = 0$ .
- 56** Найдите общее решение уравнения  $y'' + y = 0$ . Используя фазовую плоскость, исследуйте устойчивость точек покоя уравнения.
- 57** Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' = y(1 - y)$ . Нарисуйте на фазовой плоскости эскизы фазовых траекторий, найдите точки покоя и исследуйте их устойчивость.
- 58** Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' = y(1 - y)$ . Исследуйте по первому приближению устойчивость точек покоя.
- 59** Классификация точек покоя системы двух линейных уравнений первого порядка.
- 60** Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' = y(1 - y)$ . Исследуйте расположение траекторий на фазовой плоскости. Изобразите на фазовой плоскости эскиз фазового портрета.
- 61** Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' = y(1 - y^2)$ . Используя теорему Нагумо, установите разрешимость краевой задачи  $y'' = y(1 - y^2)$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $y(0) = y^0$ ,  $y(1) = y^1$ ,  $0 < y^0, y^1 < 1$ .
- 62** Найдите общее решение уравнения  $y'' - y = 0$ . Используя фазовую

плоскость, исследуйте устойчивость точек покоя..

- 63** Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' = \cos y$ .  
Исследуйте расположение траекторий на фазовой плоскости.  
Изобразите на фазовой плоскости эскиз фазового портрета.
- 64** Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' = \cos y$ .  
Исследуйте устойчивость точек покоя
- 65** Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' + \sin y = 0$ .  
Исследуйте расположение траекторий на фазовой плоскости.  
Изобразите на фазовой плоскости эскиз фазового портрета.
- 66** Найдите в квадратурах общее решение уравнения  $y'' + \sin y = 0$ .  
Исследуйте по первому приближению устойчивость точек покоя.
- 67** На фазовой плоскости определите тип и исследуйте на устойчивость точку покоя  $(0, 0)$  системы ОДУ  $\dot{y}_1 = -y_2, \dot{y}_2 = y_1$ .
- 68** На фазовой плоскости определите тип и исследуйте на устойчивость точку покоя  $(0, 0)$  системы ОДУ  $\dot{y}_1 = -y_1 - y_2, \dot{y}_2 = y_1 - y_2$ .
- 69** На фазовой плоскости определите тип и исследуйте на устойчивость точку покоя  $(0, 0)$  системы ОДУ  $\dot{y}_1 = -y_1, \dot{y}_2 = -2y_2$ .
- 70** На фазовой плоскости определите тип и исследуйте на устойчивость точку покоя  $(0, 0)$  системы ОДУ  $\dot{y}_1 = y_1, \dot{y}_2 = -2y_2$ .
- 71** На фазовой плоскости определите тип и исследуйте на устойчивость точку покоя  $(0, 0)$  системы ОДУ  $\dot{y}_1 = y_1, \dot{y}_2 = 2y_2$ .
- 72** Исследуйте на устойчивость по первому приближению тривиальное решение  $y = 0$  системы  $\dot{y}_1 = -y_2 - y_1^3, \dot{y}_2 = y_1 - y_2^3$ .
- 73** Исследуйте на устойчивость по первому приближению тривиальное решение  $y = 0$  системы  $\dot{y}_1 = -y_1 - y_1^3, \dot{y}_2 = -2y_2 - y_2^3$ .

- 74** Сформулируйте и докажите теорему существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка.
- 75** Сформулируйте и докажите теорему о зависимости решения задачи Коши для уравнения первого порядка от начальных условий и параметров.
- 76** Сформулируйте и докажите теоремы о линейной зависимости системы функций и линейной независимости решений однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка.
- 77** Сформулируйте и докажите теорему о представлении общего решения однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка через ФСР.
- 78** Сформулируйте и докажите теорему Нагумо о существовании решения нелинейной краевой задачи.
- 79** Сформулируйте и докажите теорему независимости решений однородной линейной системы уравнений.
- 80** Сформулируйте и докажите теорему Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению решения скалярного автономного уравнения первого порядка.
- 81** Сформулируйте и докажите теорему о структуре ФСР однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения.
- 82** Сформулируйте и докажите теорему о существовании функции Грина краевой задачи.
- 83** Сформулируйте и докажите теорему единственности решения краевой задачи и теорему о достаточных условиях существования только тривиального решения у однородной краевой задачи с краевыми условиями первого рода.



- 84** Сформулируйте и докажите теорему о зависимости решения задачи Коши для уравнения первого порядка от начальных условий и параметров.
- 85** Сформулируйте и докажите теоремы о линейной зависимости системы функций и линейной независимости решений однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка.
- 86** Сформулируйте и докажите теорему о представлении общего решения однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка через ФСР.
- 87** Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка – постановка и схема решения.
- 88** Сформулируйте и докажите теорему существования решения краевой задачи.
- 89** Сформулируйте и докажите теорему Ляпунова об устойчивости (метод функций Ляпунова).
- 90** Сформулируйте и докажите теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах.
- 91** Сформулируйте и докажите теорему о неустойчивости по первому приближению точки покоя скалярного уравнения.
- 92** Сформулируйте и докажите теорему о структуре ФСР однородной линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае простых собственных значений.
- 93** Сформулируйте и докажите теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости (метод функций Ляпунова).
- 94** Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка – постановка и схема решения.

- 95** Сформулируйте и докажите теорему о взаимосвязи первого интеграла характеристической системы и решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.
- 96** Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости по первому приближению точки покоя скалярного уравнения.
- 97** Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка – постановка и схема решения.
- 98** Сформулируйте и докажите теорему единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка.
- 99** Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка – постановка и схема решения.
- 100** Сформулируйте и докажите теорему Ляпунова об устойчивости (метод функций Ляпунова).
- 101** Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка – постановка и схема решения.
- 102** Сформулируйте и докажите теорему существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной.
- 103** Сформулируйте и докажите теорему о непрерывной зависимости решения задачи Коши для уравнения первого порядка от параметра, входящего в правую часть уравнения.
- 104** Сформулируйте и докажите теорему об отличии от нуля определителя Вронского линейно независимых решений однородного ОДУ  $n$ -го порядка.

- 105** Сформулируйте и докажите теорему о существовании ФСР линейного однородного ОДУ  $n$ -го порядка.
- 106** Сформулируйте и докажите теорему о структуре общего решения линейного неоднородного ОДУ  $n$ -го порядка.
- 107** Сформулируйте и докажите теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости.
- 108** Докажите первую формулу Грина.
- 109** Докажите вторую формулу Грина.
- 110** Сформулируйте и докажите теорему о решении задачи Коши для линейной неоднородной системы ОДУ с использованием матрицы Коши.
- 111** Сформулируйте и докажите теорему об отличии от нуля определителя Вронского линейно независимых решений однородного ОДУ  $n$ -го порядка.