ЗАДАЧИ КУРСОВОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И ОБЩЕГО ЗАЧЕТА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (2 КУРС, ЗИМА 2008-2009)

Тема 1. Поверхностные интегралы.

1. Найдите вектор нормали и запишите уравнение касательной плоскости к поверхности S в заданной точке М:

- $S:\ z = x^2 + y^2$; $M(3,4,25)$;
- $S:\ x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 2$, $M(1,1,0)$;
- $S:\ x = 2uv$, $y = u + v$, $z = u^2 + v^2$,

$M(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, *где* $u_0 = 1$, $v_0 = -1$.

1.1 Найдите площадь поверхности с помощью двойного интеграла:

2. $z = 3x + 4y$, $x^2 + y^2 \le 1$;

- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$;
- $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$;
- $z = xy$, $x^2 + y^2 \le a^2$;
- $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0$, $x^2 + y^2 \le \dfrac{1}{2}$;
- $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v, 0 \le u \le a, 0 \le v \le 2\pi$.

3. Вычислите поверхностный интеграл I рода.

- $\iint_S dS$, где поверхность $S:\ x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$;
- $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность $S:\ x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$;
- $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \bigcap z \ge 0$;
- $\iint\limits_S (x^2 + y^2)ds$, где S – граница тела $V = \{(x,y,z): \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\}$;
- $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2})ds$, где S – часть параболоида $2z = 2 - x^2 - y^2, z \ge 0$.

4. Найдите координаты центра масс части однородной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ с помощью поверхностного интеграла.

5. Вычислите поверхностный интеграл второго рода, не пользуясь формулой Остроградского-Гаусса:

- $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 1$,

$x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$, то есть нормаль к плоскости составляет острый угол с осью Oz;

- $\iint\limits_S (y^2 + z^2)dxdy$, где S - часть внешней стороны цилиндрической поверхности

$z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le y \le b$;

- $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$, где S - часть внешней стороны конической поверхности

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le c$ (внешняя нормаль образует тупой угол с осью Oz);

- $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S - часть внутренней стороны гиперболоида

$x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \le z \le 3$;

- $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

6. Используя формулу Остроградского-Гаусса, вычислите интеграл:
   - $\iint\limits_S (x + e^y)dydz + (y - e^z)dxdz + (z + e^x)dxdy$, где S – внешняя

   сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
   - $\iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)ds$, где

   S –гладкая поверхность, ограничивающая область D, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеют в $\bar{D}$ непрерывные частные производные второго порядка.
   - $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S - внутренняя сторона эллипсоида

   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;
   - $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S - внешняя сторона

   поверхности тела $\left\{ x^2 + y^2 \le z \le H \right\}$;
   - $\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности

   куба $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$, $z \in [-1;1]$.
7. Используя формулу Стокса, вычислите интеграл:
   - $\int\limits_{AB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$, где AB есть отрезок винтовой

   линии $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \frac{h}{2\pi}\varphi$ от точки $A(a,0,0)$ до точки $B(a,0,h)$.
   - $\oint\limits_L y^2dx + xydy + (x^2 + y^2)dz$, где L – замкнутый контур, образованный при

   пересечении трех плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = a$ с эллиптическим параболоидом $x^2 + y^2 = az$, причем $x \ge 0$, $y \ge 0$ ($a > 0$). Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,0,2a)$.
   - $\oint\limits_L xdx + xdy + zdz$, где L – окружность, образованная при пересечении

   сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ и плоскости $x = z$. Обход окружности совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,0,5)$.
   - $\oint\limits_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, где L – эллипс, образованный при

   пересечении цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$ и плоскости $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a > 0$, $h > 0$), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a,0,0)$.

8. Найдите поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S в направлении внешней нормали к S:

- $\vec{F} = \left\{-x^3, -y^3, -z^3\right\}$, S — поверхность куба $\left\{0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le a,\ \ 0 \le z \le a\right\}$;
- $\vec{F} = \left\{0, y^3, z\right\}$, S — часть параболоида $z = x^2 + y^2,\ \ 0 \le z \le 2.$

9. Докажите, что объём V тела, ограниченного гладкой поверхностью $S,$ выражается формулой $V = \dfrac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,ds$, где $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности $S.$

10. Применяя формулу Остроградского-Гаусса, сведите к тройному интегралу поверхностный интеграл $\iint\limits_S \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)ds$, где S — гладкая поверхность, ограничивающая конечную область D, $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S, $u(x,y,z)$ имеет в $\overline{D}$ непрерывные частные производные второго порядка.

11. Найдите момент инерции относительно оси Oz части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$. Поверхностная плотность $\rho = x$.

12. Найдите момент инерции относительно оси Oz части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$, $y \ge 0$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$. Поверхностная плотность $\rho = zy$.

13. Пользуясь формулой Стокса, найдите циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \left\{z^3, x^3, y^3\right\}$ вдоль контура, образованного при пересечении гиперболоида $2x^2 + z^2 - y^2 = a^2$ и плоскости $x + y = 0$. Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 2a, 0)$.

14. Найдите работу силового поля $\vec{F} = \{x + 3y + 2z, 2x + z, x - y\}$ вдоль замкнутого контура *MNPM*, где *MNP* — треугольник с вершинами в точках $M(1,0,0)$, $N(0,1,0)$, $P(0,0,1)$. Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(5,5,5)$.

Тема 2. Скалярные и векторные поля.

1. Найдите угол между:

- Градиентами функций $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ и $v = xy + yz + zx - 18x - 6z - y$ в точке $M(3,5,4)$.
- Градиентами скалярного поля $u = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $M_1(1,2,2)$ и $M_2(-3,1,0)$.

2. Вычислите, если $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ – постоянные векторы:

- $\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right)$;

- $\operatorname{div}\vec{r}$, $\operatorname{div}(r\vec{r})$, $\operatorname{div}(r^2\vec{r})$, $\operatorname{div}(r^{-1}\vec{r})$, $\operatorname{div}(r^{-2}\vec{r})$;
- $\operatorname{grad}(\vec{c},\vec{r})$;
- $\operatorname{div}(r\vec{c})$, $\operatorname{div}(\vec{b}(\vec{r},\vec{c}))$;
- $\operatorname{rot}\vec{r}$, $\operatorname{rot}(r\vec{r})$, $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$;
- $\operatorname{div}[\vec{c}\times\vec{r}]$;
- $\operatorname{rot}[\vec{c}\times\vec{r}]$.

3. Вычислите $\operatorname{grad}(uv)$, $\operatorname{grad}(u^2)$, $\operatorname{grad} f(u)$, $\operatorname{grad}(\sin u)$, $\operatorname{grad}\dfrac{1}{u}$, где u, v – дифференцируемые скалярные поля.
4. Применяя оператор Гамильтона, докажите следующие соотношения, если u – дифференцируемое скалярное поле, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – дифференцируемые векторные поля:
   - $\operatorname{div}(u\vec{a}) = (\operatorname{grad} u \cdot \vec{a}) + u \operatorname{div} \vec{a}$;
   - $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = [\operatorname{grad} u \cdot \vec{a}] + u \operatorname{rot}\vec{a}$;
   - $\operatorname{div}[\vec{a},\vec{b}] = \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}$.
5. Используя оператор Гамильтона ∇, докажите следующие соотношения, если u и v – дважды дифференцируемые скалярные поля, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - дважды дифференцируемые векторные поля, Δ - оператор Лапласа:
   - $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + u\Delta v$;
   - $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$;
   - $\operatorname{rot}\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \left(\vec{b},\nabla\right)\vec{a} - (\vec{a},\nabla)\vec{b} + \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} - \vec{b}\operatorname{div}\vec{a}$;
   - $\operatorname{grad}\left(\vec{a},\vec{b}\right) = (\vec{a},\nabla)\vec{b} + \left(\vec{b},\nabla\right)\vec{a} + \left[\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b}\right] + \left[\vec{b}\times\operatorname{rot}\vec{a}\right]$.

2 Вычислите $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, где u – дважды дифференцируемое скалярное поле.

3 Вычислите $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$, где $\vec{a}$ – дважды дифференцируемое векторное поле.

4 Вычислите дивергенцию электрического поля $\vec{E}$ точечного заряда e, помещенного в точку (x_0, y_0, z_0).

5 Вычислите ротор векторного поля $\vec{a} = x\mathbf{i} + \dfrac{y}{y^2+z^2}\mathbf{j} - \dfrac{z}{y^2+z^2}\mathbf{k}$ в точках, где $y^2+z^2 \neq 0$, и циркуляцию этого поля вдоль окружности $L: \left\{y^2+z^2=1,\ x=x_0\right\}$.

6 Найдите поток векторного поля $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$: а) через внешнюю сторону боковой поверхности конуса $x^2+y^2 \le z^2$ $(0 \le z \le h)$; б) через внутреннюю сторону основания этого конуса.

7 Найдите поток векторного поля $\vec{a} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ в направлении внешней нормали к поверхности: а) через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2 \le a^2$ $(0 \le z \le h)$; б) через полную поверхность этого цилиндра.

8 Найдите поток векторного поля $\vec{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ через сферу $x^2+y^2+z^2 = x$ в направлении внешней нормали к поверхности.

9. Проверьте, что векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным и найдите его скалярный потенциал:
   - $\vec{a} = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$;

- $\vec{a}=\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ $(x^2+y^2\neq 0)$;
- $\vec{a}=yz(2x+y+z)\mathbf{i}+xz(x+2y+z)\mathbf{j}+xy(x+y+2z)\mathbf{k}$.

10. Убедитесь, что векторное поле $\vec{a}=\dfrac{2}{(y+z)^{1/2}}\mathbf{i}-\dfrac{x}{(y+z)^{3/2}}\mathbf{j}-\dfrac{y}{(y+z)^{3/2}}\mathbf{k}$ является потенциальным и найдите работу этого поля вдоль пути, соединяющего точки $M\left(1,1,3\right)$ и $N\left(2,4,5\right)$ и расположенного в октанте $x>0, y>0, z>0$.

11. Проверьте, что векторное поле $\vec{a}=ye^{x^2}\mathbf{i}+2yz\mathbf{j}-\left(2xyze^{x^2}+z^2\right)\mathbf{k}$ является соленоидальным.

Тема 3. Функциональные последовательности и ряды.

1. Найдите предел и исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность на заданном промежутке:

- $f_n(x)=x^n$, $x\in(0,1)$;
- $f_n(x)=\arcsin(x^n)$, $x\in(0,1)$;
- $f_n(x)=\operatorname{arctg}(x^n)$, $x\in(0,1)$;
- $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$, $x\in(0,1)$;
- $f_n(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$, $x\in(0,1)$;
- $f_n(x)=\dfrac{1}{1+(x-n)^2}$, $x\in(-\infty;+\infty)$;
- $f_n(x)=e^{-nx^2}$, $x\in(-\infty;+\infty)$;
- $f_n(x)=\ln(1-x^n)$, $x\in(0,1)$;
- $f_n(x)=\operatorname{arctg}(nx)$, $x\in(-\infty;+\infty)$;
- $f_n(x)=e^{-nx}$ а) $x\in(0,1)$; б) $x\in[1,\infty)$;
- $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$, $x\in[0;1]$;
- $f_n(x)=\dfrac{1}{1+n^2x^2}$, $x\in(-\infty;+\infty)$;
- $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, а) $x\in[1;+\infty)$;
- б) $x\in[0;1]$;
- $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{1+nx}$, $x\in[0;+\infty)$;
- $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^4x^4}$, $x\in(-\infty;+\infty)$

2. Докажите, что последовательность $f_n(x)=nx(1-x)^n$ сходится неравномерно на сегменте [0;1], но $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx=\int\limits_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,dx$.

3. Докажите, что последовательность $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n)$ сходится равномерно на $(-\infty;+\infty)$, но $\left(\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\right)'\Big|_{x=1}\neq\lim\limits_{n\to\infty}\left(f_n'(x)\Big|_{x=1}\right)$.

4. Докажите, что последовательность $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ сходится равномерно на $(-\infty;+\infty)$, но соотношение $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n{}'(x)$ не имеет места.

5. Определите область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$.

6. Определите область абсолютной и условной сходимости функционального ряда:

- $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k}{k^x}$;
- $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k^x+(-1)^k}$.

7. Исследуйте ряд на равномерную сходимость.

- $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} e^{-kx}$, $x \in (0;+\infty)$;
- $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(2kx)}{k\sqrt{k}}$, $x \in (-\infty;+\infty)$;
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}x}{1+k^4x^2}$, $x \in (-\infty;+\infty)$;
- $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{x}}$, $x \in [0;+\infty)$;
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$, $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \pi$.

8. Определите радиус и интервал сходимости степенного ряда:

- $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3+(-1)^n\right)^n}{n} x^n$.
- $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$;

9. Укажите область определения функции $f(x)$ и исследуйте функцию на непрерывность:

- $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}$,
- $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k}{k^x}$.

10. Докажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную на интервале $(-\infty;\infty)$.

11. Найдите сумму степенного ряда и укажите область сходимости:

- $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k$;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$;
- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

12. Получите разложение в степенной ряд функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Указание: сначала разложите в степенной ряд производную $f(x) = \operatorname{arctg} x$, а потом примените почленное интегрирование.

13. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке и в среднем на сегменте $[0;1]$ к функции $f(x) = 0$.

14. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x) = nx^n\sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке сегмента $[0;1]$ к функции $f(x) = 0$ и не сходится в среднем на сегменте $[0;1]$ к этой функции.

Тема 4. Несобственные интегралы.

1. Исследуйте интегралы на сходимость:
   - $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$;
   - $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4+1} dx$;
   - $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}} dx$;
   - $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^4\sqrt{x}} dx$;
   - $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) dx$;
   - $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}\right) dx$;
   - $\int_0^{+\infty} x\sin(x^3) dx$.
2. Докажите, что интеграл сходятся:
   - $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$;
   - $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$, $n \in Z$, $n > -1$.
3. Докажите, что интеграл сходится, и вычислите его:
   - $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$;
   - $\int_0^1 x\ln x dx$;
   - $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$;
   - $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$.
4. Исследуйте интеграл на сходимость и вычислите в случае сходимости.
   - $\int_1^{+\infty} \sin(\ln x) dx$;
   - $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$;
   - $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^2} dx$.

5. Найдите, при каких значениях параметра p сходится интеграл:

- $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$;
- $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$;
- $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctg(ax)\, dx}{x^p}, a > 0$

6. Найдите, при каких значениях параметра p интеграл сходится абсолютно и при каких − условно:

- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx$.

Тема 5. Интегралы, зависящие от параметра.

1. Исследуйте интеграл на равномерную сходимость в указанном промежутке изменения параметра *p*, используя определение равномерной сходимости несобственного интеграла.

- $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $p \in (1;+\infty)$. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$, $p \in (0;1)$;
- $\int\limits_0^{+\infty} pe^{-px}dx$, а) $p \in [a;b]$, $0 < a < b$, б) $p \in [0;b]$, $b > 0$;
- $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} \sin x dx$, а) $p \in (0;+\infty)$, б) $p \in [a;+\infty)$, $a > 0$;
- $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}dx$ а) $p \in (0;+\infty)$; б) $p \in [a;+\infty)$, $a > 0$.

2. Исследуйте интеграл на равномерную сходимость в указанном промежутке изменения параметра *p*, используя признаки равномерной сходимости интеграла.

- $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$,

$p \in [a;+\infty)$, $a > 0$;

- $\int\limits_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x}} dx$,

$p \in [0;+\infty)$:

- $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} e^{-px} dx$,

$p \in [0;+\infty)$;

3. Докажите, что функция $f(p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(px)}{1+x^2}dx$ непрерывна на промежутке $p\in(-\infty;+\infty)$.

4. Для каких значений p сходится интеграл $\int_0^1 x^p(\ln x)^2\,dx$? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл $\int\limits_0^1 x^p dx$. Обоснуйте возможность применения этого метода.

5. Вычислите:

- $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx$, дифференцируя по параметру интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-px^2}dx$;
- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, дважды дифференцируя по параметру интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-px^2}dx$.
- $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-px}dx$, $p>0$, дифференцируя по параметру.

6. Укажите область сходимости интеграла и выразите его через интегралы Эйлера .

- $\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-t^2}dt$;
- $\int_0^{+\infty}e^{-x^p}dx$;
- $\int_0^1(-\ln t)^p\,dt$;
- $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^q}dx$;
- $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx \quad (q>0)$;
- $\int_0^1(1-x^p)^{\left(\frac{-1}{p}\right)}dx$, $p>0$.

Тема 7. Ряды Фурье

1. Найдите разложение в ряд Фурье функции $f(x)=x$, $x\in(-\pi;\pi]$ по тригонометрической системе функций и нарисуйте график его суммы на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

2. Найдите разложение в ряд Фурье функции $f(x)=1$, $x\in(0;\pi)$, по системе функций $\left\{\sin nx,\ n\ge 1\right\}$ и нарисуйте график его суммы на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

3. Найдите разложение в ряд Фурье функции $f(x)=1$, $x\in(0;\pi)$, по системе функций $\left\{\cos nx,\ n\ge 0\right\}$ и нарисуйте график его суммы на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

4. Найдите разложение в ряд Фурье функции $f(x)=x$, $x\in(0;\pi)$, по системе функций $\left\{\sin nx,\ n\ge 1\right\}$ и нарисуйте график его суммы на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

5. Найдите разложение в ряд Фурье функции $f(x)=x$, $x\in(0;\pi)$, по системе функций $\left\{\cos nx,\ n\geq 0\right\}$ и нарисуйте график его суммы на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

6. Пусть $S(x)$ – сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leq x<0\\ x, & 0\leq x\leq\pi\end{cases}$. Найдите $S(\pi)$.

7. Пусть $S(x)$ – сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)=x$, $0\leq x<2\pi$, продолженной на всю числовую ось с периодом 2π. Найдите $S(0)$.

8. Пусть $S(x)$ – сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x<\pi\\ 2, & \pi\leq x<2\pi\end{cases}$, продолженной на всю числовую ось с периодом 2π. Найдите $S(0)$.

9. Пусть $S(x)$ – сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)=x^2$, $0\leq x<2\pi$, продолженной на всю числовую ось с периодом 2π. Найдите $S(0)$.

Тема 8. Интеграл Фурье.

1. Представьте в виде интеграла Фурье следующие функции:

- $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\leq\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & |x|\geq\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$
- $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn} x, & |x|<1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

2. Найдите образ Фурье следующих функций:

- $f(x)=e^{-p|x|}$, $p>0$;
- $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$;
- $f(x)=e^{-p|x|}\sin\beta x$, $p>0$;
- $f(x)=1$, $x\in[-p;p]$ $f(x)=0$, $x\notin[-p;p]$.

3. Найдите косинус - образ Фурье четной функции $f(x)$.

- $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<p,\\ 0, & |x|\geq p.\end{cases}$, $p>0$. Чему равно значение интеграла Фурье в точках $x=0$, $x=\dfrac{p}{2}$, $x=-p$?
- $f(x)=e^{-p|x|}$, $p>0$;
- $f(x)=\dfrac{\cos qx}{p^2+x^2}$, $p>0$, $q>0$;
- $f(x)=x^2e^{-p|x|}$, $p>0$;
- $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma>0$.
- $f(x)=e^{-p|x|}\cos qx$, $p>0$, $q>0$;
- $f(x)=\dfrac{1}{p^2+x^2}$, $p>0$;

4. Найдите синус - образ Фурье нечетной функции $f(x)$.

- $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<p,\\ 0, & x\ge p,\end{cases}$, $f(-x)=-f(x)$, $p>0$. Чему равно значение интеграла Фурье в точках $x=0, x=\dfrac{p}{2}, x=-p$?
- $f(x)=\operatorname{sign}x\cdot e^{-p|x|}$, $p>0$;
- $f(x)=xe^{-p|x|}$, $p>0$;
- $f(x)=e^{-p|x|}\sin qx$, $p>0$, $q>0$;
- $f(x)=\dfrac{x}{p^2+x^2}$, $p>0$;
- $f(x)=\dfrac{x\sin qx}{p^2+x^2}$, $p>0$, $q>0$;
- $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma>0$. При решении этой задачи можно использовать дифференцирование по параметру образа Фурье четной функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

5. Приведите пример отличной от нуля функции, которая совпадает со своим образом Фурье.

6. Восстановите функцию $f(x)$ по её образу Фурье $\hat{f}(\lambda)$.

- $\hat{f}_c(\lambda)=\dfrac{p}{\lambda^2+p^2}$, $p>0$;
- $\hat{f}_s(\lambda)=\dfrac{\lambda}{\lambda^2+p^2}$, $p>0$;
- $\hat{f}(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.