ЗАДАЧИ К ОБЩЕМУ ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ, II СЕМЕСТР.

I. Точки и множества в пространстве

Найдите все граничные и все предельные точки множества точек на плоскости.

1. $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\right\}$,
2. $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\right\}$,
3. $\left\{\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right), n \in N\right\}$

Нарисуйте семейство линий равного уровня функции

1. $u(x,y) = xy$,
2. $u(x,y) = \frac{y}{x}$,
3. $u(x,y) = \frac{y}{x^2}$,
4. $u(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$,
5. $u(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2x}$,
6. $u(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$,
7. $u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

II. Предел функции нескольких переменных. Непрерывные функции.

Исследуйте функцию на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в заданной точке.

8. $u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0;0)$,

9. $u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0;0)$,

10. $u(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$ в точках $(0;0)$ и $(0;1)$,

11. $u(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ в точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$,

12. $u(x,y) = \begin{cases} xy \ln\left(x^2 + y^2\right), & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$ в точке $(0;0)$.

III. Дифференцируемые функции нескольких переменных

Для функции $z = u(x,y)$ найдите частные производные первого и второго порядков, первый и второй дифференциалы, градиент. Запишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x,y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$, найдите вектор нормали к этой плоскости. Найдите производную по направлению $\vec{L}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

13. $u(x,y) = 2x + 3y$, $M_0 = (3;2)$, $\vec{L} = (3;-2)$,
14. $u(x,y) = 8x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4$, $M_0 = (2;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$,
15. $u(x,y) = xy(3 - x - y)$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$,
16. $u(x,y) = x^2y^3(6 - 2x - 3y)$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$,
17. $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$,
18. $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0 = \left(\sqrt{3},1\right)$, $\vec{L}_1 = \left(1;-\sqrt{3}\right)$, $\vec{L}_2 = \left(\sqrt{3};1\right)$,
19. $u(x,y) = x^y - y^x$, $M_0 = (e;e)$, $M_1 = (1;1)$, $\vec{L} = (1;-1)$,
20. $u\left(x,y\right) = x^3 - x^2y + y^3 - 1$, $\vec{L} = \left(\sqrt{3};\,1\right)$.
21. Для функции $u(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ найдите $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции

22. $u = f(\xi, \theta), \quad \xi = \sin t, \quad \theta = \cos t$,
23. $u = f(\xi, \theta), \quad \xi = x^2 + y^2, \quad \theta = x^2 - y^2$,
24. $u = f(\xi, \eta, \theta), \quad \xi = xy, \quad \eta = x - y, \quad \theta = x + y$,

Имеет ли функция $u\left(x,y\right)$ частные производные первого порядка в точке $(0;0)$? Если имеет, найдите их.

25. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy(x+y)}$,
26. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$,
27. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy}$,
28. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy\left(x^2 + y^2\right)}$,
29. $u\left(x,y\right) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$,
30. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^5 - y^5}$,
31. $u(x,y) = \sqrt[3]{yx^4 + xy^4}$

IV. Формула Тейлора

Запишите формулу Тейлора порядка n с центром разложения в точке M_0 и с остаточным членом в форме Пеано, если

32. $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad M_0(2,3), \quad n = 2$,
33. $u = x^y, \quad M_0(e,e), \quad n = 2$,

34. $u = e^x \sin y, \quad M_0(0,0), \quad n = 3$,
35. $u = \ln(1+x+y), \quad M_0(0,0), \quad n = 3$,
36. $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad M_0(1;1), n = 2$,
37. $u(x,y,z) = x^3 + x + y + xyz, \quad M_0(0;0), n = 3$.

Найдите все точки локального экстремума функций

38. $u(x,y) = x^2 + xy + y^2$,
39. $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,
40. $u(x,y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$,
41. $u(x,y) = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y}$,
42. $u(x,y,z) = xy + xz + yz$,
43. $u(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$,
44. $u(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.
45. $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.
46. **Исследуйте на экстремум функцию** $u = x\cos y + z\cos x$ **в точке** $M\left(\dfrac{\pi}{2};0;1\right)$.

V. Неявные функции

Найдите первую и вторую производные, найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий экстремума для дифференцируемой неявной функции $y = f(x)$**, определяемой уравнением** $F(x,y) = 0$**, если**

47. $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$,
48. $F(x,y) = 8x^2y - x^4 - y^4 = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$,
49. $F(x,y) = y^2 - ay - \sin x = 0, \quad 0 \le x \le 2\pi$.

Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z = z(x,y)$, **заданной неявно уравнением**

50. $xyz = x^2 + y^2 + z^2$;
51. $x^2 + zx + z^2 + y = 0$.
52. $z\cos x + y\cos z + x\cos y = 3$;

Функция $z = f(x,y)$ **задана неявно уравнением** $F(x,y,z) = 0$**. Найдите указанные частные производные**.

53. $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
54. $F(x,y,z) = \operatorname{arctg}\dfrac{z}{x} - (z + x + y)$, найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
55. $F(x,y,z) = \ln(xy + yz) - (z^2 + x^2 + y^2 - 2)$, найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

56. **Найдите первый и второй дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений** $\begin{cases} xu + yv = 1, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$

Преобразуйте уравнение, введя новые переменные.

57. $y^2 + (x^2 - xy)\dfrac{dy}{dx} = 0, \quad y = tx, \quad y = y(t)$;

58. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + y = 0, \quad x = e^t, \quad y = y(t)$.

Приняв v за новую функцию $v(x,y)$, преобразуйте уравнение

59. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = -u, \quad u = ve^{-x-y}$.

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуйте уравнение

60. $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad u = x, \quad v = x - y, \quad w = x - y + z$;

61. $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{2}x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{y}, \quad u = \dfrac{y}{x}, \quad v = y, \quad w = zy - x$.

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуйте уравнение

62. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad u = x, \quad v = 2\sqrt{y}, \quad (y > 0)$.

VI. Условный экстремум

Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума указанной функции при заданных условиях.

63. $u(x,y) = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 2$,
64. $u(x,y) = x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 2$,
65. $u(x,y) = x + y$ при условии $xy = 1$,
66. $u(x,y) = xy$ при условии $x^3 + y^3 - 2xy = 0$.
67. $u(x,y,z) = x + y + z$ при условии $xyz = 1$,
68. $u(x,y,z) = x^2y^3z^4$ при условии $2x + 3y + 4z = 9$,
69. $u(x,y,z) = xyz$ при условиях $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0$.

VII. Определенный интеграл

Найдите

70. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 - \sin x}$,

71. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$,

72. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\left(x^2 + x + 1\right)(x - 1)}$,

73. $\int\limits_0^{\pi} e^{2x}\cos 3x dx$,

74. $\int\limits_1^{e} \ln x dx$,

75. $\int\limits_0^{\pi/8} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Найдите

76. $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x} \sin t^2 dt$,

77. $\frac{d}{dx}\int\limits_x^{1} \arcsin\sqrt{t} dt$,

78. $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \ln\left(1+2t^2\right) dt$,

79. $\frac{d}{dx}\int\limits_{\operatorname{arctg} x}^{\cos x} e^{-t^2} dt$.

80. $\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x} \sin\left(t^2\right) dt$;

81. $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$.

VIII. Приложения определенного интеграла

Вычислите площадь фигуры, заданной неравенствами

82. $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le x(3-x)^2$,

83. $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le x^2(5-x)$,

84. $(x^2+y^2)^{1{,}75} \le y^2\sqrt{x}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$,

85. $(x^2+y^2)^2 \le xy^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой:

86. $x^2+y^2=2x$,

87. $\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(x^2-y^2\right), \quad x>0$.

88. **Вычислите длину кривой** $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$**,** $0 \le x \le 3$**.**

89. **Вычислите массу кривой** $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$**,** $0 \le x \le 3$ **с линейной плотностью** $\rho(x)=2\sqrt{1+x}$**.**

90. **Вычислите** x**-координату центра масс кривой** $x=\cos t$**,** $y=\sin t$**,** $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$**, если линейная плотность постоянна.**

91. **Вычислите момент инерции относительно оси** Ox **кривой** $x=\cos t$**,** $y=\sin t$**,** $0 \le t \le \pi$**, если линейная плотность** $\rho \equiv 1$**.**

92. **Вычислите момент инерции относительно оси** Ox **кривой** $x=\cos t$**,** $y=\sin t$**,** $0 \le t \le \pi$**; линейная плотность** $\rho(t)=\sin t$**.**

93. **Вычислите координаты центра масс и моменты инерции относительно координатных осей плоской фигуры, ограниченной линиями** $x=1, \quad x=2, \quad y=0, \quad y=x$**, поверхностная плотность** $\rho \equiv 1$**.**

94. **Вычислите момент инерции относительно оси** Oy **плоской фигуры, ограниченной линиями** $x=0, \quad x=1, \quad y=0, \quad y=\arcsin x$**; поверхностная плотность** $\rho(x) \equiv 1$**.**

95. **Найдите объём тела, граница которого задана уравнением** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$**.**

96. **Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси** Ox **фигуры** G**, заданной системой неравенств** $0 \le x \le 2$**,** $0 \le y \le x$**.**

97. **Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси** Oy **фигуры** G, **заданной системой неравенств** $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$.

98. **Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси** Ox **фигуры** G, **заданной системой неравенств** $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x^2(2-x)$.

99. **Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси** Oy **фигуры** G, **заданной системой неравенств** $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x^2(2-x)$.

IX. Кратные интегралы

Измените порядок интегрирования в повторных интегралах. Вычислите повторный интеграл.

100. $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} 2y dy$,

101. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 2y dy$,

102. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y dy$,

103. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 xy dx$,

Сведите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ **к повторному двумя способами:**

104. $D = \left\{(x,y) : |x| + |y| \le 1\right\}$;

105. $D = \left\{(x,y) : y^2 \le x+2,\ y \ge x\right\}$

Вычислите

106. $\iint\limits_G \left(x^2+y^2\right)dxdy, \quad D = \left\{x^2+y^2 \le 6\right\}$;

107. $\iint\limits_G \left(x^2-y^2\right)dxdy, \quad D = \left\{1 \le x^2+y^2 \le 4\right\} \bigcap \left\{\frac{\pi}{6} \le \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \le \frac{\pi}{4}\right\} \bigcap x > 0$.

108. **Найдите замену переменных** $(u,v) \leftrightarrow (x,y)$**, при которой область *D* на плоскости (*x*,*y*), ограниченная линиями** $y^2 = 16x, \quad y^2 = 9x, \quad x = 2y, \quad x = 4y$, **переходит в прямоугольник на плоскости (*u*,*v*). Вычислите площадь области *D*, используя замену переменных в двойном интеграле.**

109. **Найдите замену переменных** $(u,v) \leftrightarrow (x,y)$**, при которой область *D* на плоскости (*x*,*y*), ограниченная линиями** $xe^y = 1, \quad xe^y = 2, \quad x = e^y, \quad x = 2e^y$, **переходит в прямоугольник на плоскости** (u,v)**. Вычислите площадь области *D*, используя замену переменных в двойном интеграле.**

Вычислите массу $m = \iint\limits_G dxdy$, **статические моменты** $M_x = \iint\limits_G ydxdy$, $M_y = \iint\limits_G xdxdy$ **и моменты инерции** $I_x = \iint\limits_G y^2dxdy$, $I_y = \iint\limits_G x^2dxdy$ **однородной пластинки с плотностью** $\rho = 1$, **ограниченной линиями**

110. $0 \le x \le 2, 0 \le y \le x$;

111. $0 \le x \le 4, 0 \le y \le x(4-x)$;

112. $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin x$;

113. $10^{-3} \le x \le 1, 0 \le y \le x^{-1}$.

114. **Изобразите на плоскости (x,y) область D, для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному:** $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y}^{3-2y} f(x,y)\,dx$ **. Измените порядок интегрирования.**

115. **Изобразите на плоскости (x,y) область D, для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному:** $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-2y}^{1-y} f(x,y)\,dx$ **. Вычислите указанный интеграл для $f(x,y) = y$.**

116. **Вычислите координаты центра масс и моменты инерции плоской фигуры относительно осей координат, если фигура ограничена линиями** $x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = x$ **; поверхностная плотность** $\rho \equiv 1$ **.**

117. **Вычислите координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной кривыми** $y = \cos x, \quad y = \sin x \quad (\pi / 4 \le x \le 5\pi / 4)$ **; поверхностная плотность** $\rho \equiv 1$ **.**

118. **Вычислите момент инерции относительно оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями** $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = \arcsin x$ **; поверхностная плотность** $\rho(x) \equiv 1$ **.**

119. **Вычислите тройной интеграл** $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)dxdydz$ **, где область G ограничена поверхностями** $x^2 + y^2 = 2z, \ \ z = 2.$

120. **Сведите тройной интеграл** $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz$ **к повторному, если G - область, ограниченная поверхностями** $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 2$ **.**

121. **Вычислите координаты центра масс и момент инерции относительно начала координат тела с плотностью** $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ **, ограниченного поверхностями** $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \ge 0)$ **.**

122. **Пусть G – тело, ограниченное поверхностями** $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1 \quad (z \ge 1)$ **. Найдите силу притяжения этим телом материальной точки массы m_0 , находящейся в начале координат.**

Вычислите криволинейные интегралы первого рода

123. $\int\limits_L ds$, где L – кривая $y = \dfrac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$,

124. $\int\limits_L yds$, где L – кривая $y = e^x$, $0 \le x \le 2$,

125. $\int\limits_L xydl,$ где L – часть ломаной линии
$x + y = 1, \quad x - y = -1, \quad -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$

126. $\int\limits_L x^2ydl,$ где $L = \left\{(x,y) : \ x = 4\cos t, \ y = \sin 2t, \ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right\}.$

127. **Найдите координаты силы притяжения материальной точки массы m однородной полуокружностью массой M и радиусом R; точка помещена в центре соответствующей окружности.**

Вычислите криволинейные интегралы второго рода:

128. $\int\limits_{AB} xdx + ydy$, где кривая AB задана уравнением $y = x^2, \quad A(0,0), \quad B(1,1)$.

129. $\int\limits_{L} (2-y)dx + xdy$, где кривая L задана уравнениями $x = t - \sin t, \ y = 1 - \cos t, \ \ 0 \le t \le 2\pi$ и пробегается в направлении возрастания параметра t.

130. $\oint\limits_{L} xdy + 2ydx$, где кривая L задана соотношениями $y = 0, \quad y = \sqrt{1-x^2}, \quad y = x, \quad 0 \le y \le x$.

131. $\int\limits_{L} xydx - x^3y^3dy$, где L – замкнутый контур, заданный уравнением $|x-y| + |x+y| = 1$.

132. $\int\limits_{L} ydx + zdy + xdz$, где L – кривая $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \ 0 \le t \le 2\pi$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

С помощью криволинейного интеграла найдите площадь области, ограниченной:

133. эллипсом $x = a\sin t, \ y = b\cos t, \ 0 \le t \le 2\pi, \ a > 0, \ b > 0$;

134. параболой $(x+y)^2 = 2ax \quad (a > 0)$ и осью Ox.

135. астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

136. **Вычислите моменты инерции относительно осей координат кривой, заданной как пересечение поверхности $2x^2 + y^2 - z^2 = -1$ и плоскости $z = x + 1$.**

137. **Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \{x - y, 2x + y^2\}$ вдоль части параболы $x = y^2$, пробегаемой от точки $A(1, -1)$ до точки $B(1, 1)$.**

138. **Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \{y, x\}$ вдоль контура, заданного как пересечение эллипсоида $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $z = x - 2$, пробегаемого против часовой стрелки, если смотреть из точки (0,0,-3).**