

**Вопросы к коллоквиуму по математическому анализу
«Предел последовательности и предел функции»**

1. Определения.
 - 1.1. Последовательности
 - 1.1.1. Сформулируйте определение бесконечно малой последовательности.
 - 1.1.2. Сформулируйте определение ограниченной последовательности.
 - 1.1.3. Сформулируйте определение последовательности ограниченной сверху.
 - 1.1.4. Сформулируйте определение последовательности ограниченной снизу.
 - 1.1.5. Сформулируйте определение неограниченной последовательности.
 - 1.1.6. Сформулируйте определение бесконечно большой последовательности.
 - 1.1.7. Сформулируйте определение сходящейся последовательности.
 - 1.1.8. Сформулируйте определение монотонной последовательности.
 - 1.1.9. Сформулируйте определение предельной точки последовательности.
 - 1.1.10. Сформулируйте определение подпоследовательности.
 - 1.1.11. Сформулируйте определение верхнего и нижнего пределов последовательности.
 - 1.1.12. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.
 - 1.2. Функции
 - 1.2.1. Сформулируйте определение предела функции.
 - 1.2.2. Сформулируйте определение монотонной функции.
 - 1.2.3. Сформулируйте определение непрерывности функции.
 - 1.2.4. Сформулируйте определение обратной функции.
 - 1.2.5. Сформулируйте определение сложной функции.
 - 1.2.6. Сформулируйте определение предела функции по Коши в точке.
 - 1.2.7. Сформулируйте определение предела функции по Коши при $x \rightarrow +\infty$.
 - 1.2.8. Сформулируйте определение правого предела функции в точке по Коши.
 - 1.2.9. Сформулируйте определение предела функции по Гейне.

2. Теоремы.
 - 2.1. Последовательности
 - 2.1.1. Сформулируйте и докажите теорему о пределе суммы двух бесконечно малых последовательностей.
 - 2.1.2. Сформулируйте и докажите теорему о пределе разности двух бесконечно малых последовательностей.
 - 2.1.3. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности бесконечно малой последовательности.
 - 2.1.4. Сформулируйте и докажите теорему о произведении ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность.
 - 2.1.5. Сформулируйте и докажите теорему о пределе последовательности $\{1/x_n\}$, если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой.
 - 2.1.6. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности.
 - 2.1.7. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности.
 - 2.1.8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе суммы сходящихся последовательностей.
 - 2.1.9. Сформулируйте и докажите теорему о пределе разности сходящихся последовательностей.

- 2.1.10. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения сходящихся последовательностей.
- 2.1.11. Сформулируйте и докажите теорему о пределе частного сходящихся последовательностей.
- 2.1.12. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенствах.
- 2.1.13. Сформулируйте и докажите теорему о пределе монотонной последовательности.
- 2.1.14. Сформулируйте и докажите теорему о монотонности последовательностей $\{x_n\} = (1+1/n)^n$ и $\{x_n\} = (1+1/n)^{n+1}$.
- 2.1.15. Сформулируйте и докажите теорему о существовании предела у монотонной последовательности.
- 2.1.16. Сформулируйте и докажите теорему о существовании предела последовательности $\{x_n\} = (1+1/n)^n$.
- 2.1.17. Сформулируйте и докажите теорему о существовании предельной точки у ограниченной последовательности.
- 2.1.18. Сформулируйте и докажите теорему Больцано-Вейерштрасса.
- 2.1.19. Сформулируйте и докажите теорему о связи существования предела последовательности с равенством верхнего и нижнего пределов этой последовательности.
- 2.1.20. Сформулируйте критерий Коши для последовательностей.
- 2.2. **Функции**
 - 2.2.1. Сформулируйте и докажите теорему о пределе суммы двух функций.
 - 2.2.2. Сформулируйте и докажите теорему о пределе разности двух функций.
 - 2.2.3. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения двух функций.
 - 2.2.4. Сформулируйте и докажите теорему о пределе отношения двух функций.
 - 2.2.5. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы двух функций.
 - 2.2.6. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности разности двух функций.
 - 2.2.7. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности произведения двух функций.
 - 2.2.8. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности отношения двух функций.
 - 2.2.9. Сформулируйте теорему об обратной функции. Примеры.
- 2.3. Первый замечательный предел.
- 2.4. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции.
- 2.5. Сформулируйте и докажите теорему о существовании предела по Гейне как следствие существования предела по Коши.
- 2.6. Сформулируйте и докажите критерий Коши существования предела функции.

3. Примеры теоретических вопросов:

- 3.1. Сформулируйте определение бесконечно большой функции по Коши:
 $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a + 0$.
- 3.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , $g(x)$ – разрывна в точке x_0 . Что можно сказать о непрерывности произведения $f(x)g(x)$ в точке x_0 ? Ответ обоснуйте.
- 3.3. Приведите пример последовательности, у которой ровно две предельные точки.

4. Примеры задач.

4.1. Найдите $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}$

4.2. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a-1) + \sqrt[n]{b}}{a} \right)^n$.

5. Пример билета.

Билет 1.

1. Сформулируйте определение бесконечно малой последовательности.
2. Докажите теорему о пределе суммы двух бесконечно малых последовательностей.
3. Сформулируйте определение бесконечно большой функции по Коши:

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow a + 0.$$

4. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$