МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математики

В.Ф. Бутузов, А.А. Быков, Н.Т. Левашова, Н.Е. Шапкина.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(II семестр)

Москва-2008

Тема 1. Множества точек пространства R^m.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение шаровой окрестности точки пространства R^m.
1.2. Сформулируйте определение прямоугольной окрестности точки пространства R^m.
1.3. Сформулируйте определение окрестности точки пространства R^m.
1.4. Сформулируйте определение внутренней точки множества D точек пространства R^m.
1.5. Сформулируйте определение изолированной точки множества D точек пространства R^m.
1.6. Сформулируйте определение граничной точки множества D точек пространства R^m.
1.7. Сформулируйте определение границы множества.
1.8. Сформулируйте определение открытого множества точек пространства R^m.
1.9. Сформулируйте определение замкнутого множества точек пространства R^m.
1.10. Сформулируйте определение предельной точки множества D точек пространства R^m.
1.11. Сформулируйте определение связного множества точек пространства R^m.
1.12. Сформулируйте определение прямой в пространстве R^m.
1.13. Сформулируйте определение непрерывной кривой в пространстве R^m.

2. Вопросы и задачи.

Замечание: *Пустое множество считается одновременно открытым и замкнутым.*

2.1. Докажите, что объединение любого числа открытых множеств является открытым множеством.
2.2. Докажите, что любая внутренняя точка множества является его предельной точкой.
2.3. Докажите, что граничная точка множества является либо предельной точкой, либо изолированной точкой этого множества.
2.4. Докажите, что граница сферы в пространстве R^m совпадает с самой сферой.
2.5. Приведите пример множества точек, которое является одновременно открытым и замкнутым.
2.6. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, которое не имеет внутренних точек.
2.7. Может ли множество, содержащее хотя бы одну свою граничную точку, быть открытым?
2.8. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого граничные.
2.9. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого предельные.
2.10. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, которое совпадает со своей границей.
2.11. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, для которого множество всех предельных точек не совпадает с множеством всех граничных точек.
2.12. Приведите пример непустого замкнутого множества точек на плоскости, которое не имеет ни одной предельной точки.
2.13. Докажите, что любая точка множества точек на плоскости, которая не является внутренней, является его граничной точкой.
2.14. Приведите пример множества, каждая граничная точка которого является его предельной точкой.
2.15. Приведите пример множества, каждая граничная точка которого является его изолированной точкой.
2.16. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$.
2.17. Найдите все предельные точки множества точек на плоскости $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

3. Задачи повышенной трудности.

3.1. Докажите, что дополнение к открытому множеству является замкнутым
3.2. Докажите, что дополнение к замкнутому множеству является открытым.

3.3. Докажите, что сфера в пространстве R^m является замкнутым множеством.
3.4. Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством. Верно ли это для любого числа открытых множеств?
3.5. Докажите, что объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством. Верно ли это для любого числа замкнутых множеств?
3.6. Докажите, что пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.
3.7. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\left\{\left(\cos\frac{\pi}{n},\sin\frac{\pi}{n}\right), n\in N\right\}$.
3.8. Найдите все предельные точки множества точек на плоскости $\left\{\left(\cos\frac{\pi}{n},\sin\frac{\pi}{n}\right), n\in N\right\}$.
3.9. Найдите все множества точек на плоскости, которые не имеют граничных точек.

Тема 2. Последовательности точек пространства R^m.

1. Определения.
1.1. Сформулируйте определение ограниченной последовательности точек пространства R^m.
1.2. Сформулируйте определение неограниченной последовательности точек пространства R^m.
1.3.Сформулируйте определение предельной точки последовательности точек пространства R^m.
1.4. Сформулируйте определение предела последовательности точек пространства R^m.
1.5. Сформулируйте определение сходящейся последовательности точек пространства R^m.
1.6. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности точек пространства R^m.

2. Основные теоремы (без доказательства).
2.1. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности точек пространства R^m.
2.2. Сформулируйте теорему Больцано-Вейерштрасса.

3. Теоремы с доказательством.
3.1. Докажите, что ограниченная последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости имеет по крайней мере одну предельную точку.
3.2. Докажите, что если последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является сходящейся, то числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися.
3.3. Докажите, что если числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися, то последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является сходящейся.
3.4. Докажите теорему о критерии Коши сходимости последовательности точек пространства R^m.

4. Вопросы и задачи.
4.1. Докажите, что сходящаяся последовательность точек пространства R^m является ограниченной.
4.2. Докажите, что если числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися, то последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является ограниченной.
4.3. Докажите, что если числовые последовательности x_n и y_n являются фундаментальными, то последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является фундаментальной.
4.4. Докажите, что последовательность точек на плоскости, расположенных на окружности, имеет по крайней мере одну предельную точку.
4.5. Найдите предел последовательности точек $M_n\left(\cos\frac{\pi}{n},\sin\frac{\pi}{n}\right)$ на плоскости.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Найдите предел последовательности точек $M_n\left(x_n, y_n\right)$ на плоскости, если $x_1 = 8$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{4}{x_n}\right)$, $y_n = x_{2n}$, $n \in N$.

Тема 3. Функции, предел, непрерывность.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение ограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.

1.2. Сформулируйте определение неограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.

1.3. Сформулируйте определение ограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.

1.4. Сформулируйте определение неограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.

1.5. Сформулируйте определение точной верхней грани функции m переменных на множестве D точек пространства R^m.

1.6. Сформулируйте определение точной нижней грани функции m переменных на множестве D точек пространства R^m.

1.7. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R^m$.

1.8. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R^m$.

1.9. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $u(M)$ при $M \to \infty$.

1.10. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $u(M)$ при $M \to \infty$.

1.11. Сформулируйте определение непрерывной функции $u(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$.

1.12. Сформулируйте определение непрерывной функции $u(x, y)$ по совокупности переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R_{m.}$

2.2. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы непрерывных функций нескольких переменных.

2.3. Сформулируйте теорему о непрерывности произведения непрерывных функций нескольких переменных.

2.4. Сформулируйте теорему о непрерывности частного двух непрерывных функций нескольких переменных.

2.5. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции нескольких переменных через любое промежуточное значение.

2.6. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.

2.7. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.

2.8. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции нескольких переменных.

2.9. Сформулируйте теорему Кантора для функции нескольких переменных.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о непрерывности суммы двух непрерывных функций нескольких переменных.

3.2. Докажите теорему о непрерывности произведения двух непрерывных функций нескольких переменных.

3.3. Докажите теорему о непрерывности частного двух непрерывных функций нескольких переменных.
3.4. Докажите теорему о непрерывности сложной функции нескольких переменных.
3.5. Докажите теорему о прохождении непрерывной функции нескольких переменных через любое промежуточное значение.
3.6. Докажите первую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.
3.7. Докажите вторую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.
3.8. Докажите теорему Кантора для функции нескольких переменных.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0.
4.2. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M \to \infty$.
4.3. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0.
4.4. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M \to \infty$.
4.5. Сформулируйте “по Гейне” отрицание того, что число b является пределом функции $u(M)$ точке M_0.
4.6. Нарисуйте семейство линий уровня функции
4.6.1. $u(x,y) = xy$.
4.6.2. $u(x,y) = \dfrac{y}{x}$.
4.6.3. $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$.
4.6.4. $u(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$.
4.6.5. $u(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x}$.
4.6.6. $u(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x + 2y}$.
4.6.7. $u(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.
4.7. Приведите пример ограниченной сверху и неограниченной снизу функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\right\}$.
4.8. Приведите пример неограниченной сверху и ограниченной снизу функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\right\}$.
4.9. Приведите пример неограниченной снизу и неограниченной сверху функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\right\}$.
4.10. Приведите пример функции двух переменных, которая является равномерно непрерывной на заданном множестве.
4.11. Приведите пример непрерывной функции, которая не является равномерно непрерывной на заданном множестве.
4.12. Приведите пример функции двух переменных, которая непрерывна на заданном ограниченном, но незамкнутом множестве, и является неограниченной на этом множестве.
4.13. Приведите пример функции двух переменных, которая непрерывна и ограничена на заданном ограниченном множестве, но не достигает на этом множестве своей точной верхней грани.

4.14. Найдите предел функции $u(x,y)$ при $M(x,y) \to \infty$ или докажите, что предел не существует:

$$u(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}; \quad u(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^4}; \quad u(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}; \quad u(x,y) = xy\sin\frac{1}{x^2 + y^2};$$

$$u(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\sin\frac{1}{x^2 + y^2}.$$

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Исследуйте функцию на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в заданной точке.

5.1.1. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0,0)$;

5.1.2. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0,0)$;

5.1.3. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0,0)$;

5.1.4. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$ в точках $(0,0)$ и $(0,1)$;

5.1.5. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$;

5.1.6. $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0,0)$.

5.1.7. $u(x,y) = \begin{cases} xy\ln(|xy|), & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$ в точке $(0,0)$.

5.1.8. $u(x,y) = \begin{cases} x\ln(|xy|), & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$ в точке $(0,0)$.

Тема 4. Дифференцируемые функции.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение дифференцируемой функции $f(x_1,\ldots,x_m)$ в точке $M(x_1,x_2,\ldots,x_m)$.

1.2. Сформулируйте определение частной производной функции $f(x_1,\ldots,x_m)$ по переменной x_k в точке $M(x_1,x_2,\ldots,x_m)$.

1.3. Сформулируйте определение первого дифференциала функции нескольких переменных.

1.4. Сформулируйте определение касательной плоскости к графику функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0\left(x_0, y_0, f\left(x_0, y_0\right)\right)$.

1.5. Сформулируйте определение n раз дифференцируемой функции нескольких переменных в данной точке.

1.6. Сформулируйте определение второго дифференциала функции $u\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ в данной точке.

1.7. Сформулируйте определение $n-$ого дифференциала функции $u\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ в данной точке.

1.8. Сформулируйте определение градиента функции $f(x, y, z)$ в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

1.9. Сформулируйте определение производной по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ для функции $f(x, y, z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

2. **Основные теоремы и формулы (без доказательства).**

2.1. Сформулируйте теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $u(x, y)$ в точке.

2.2. Сформулируйте теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ в точке $M_0(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots, \mathring{x}_m)$.

2.3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях равенства $u_{xy} = u_{yx}$ в данной точке.

2.4. Сформулируйте теорему о касательной плоскости к графику функции двух переменных.

2.5. Сформулируйте теорему о дифференцируемости сложной функции.

2.6. Запишите формулу для частных производных сложной функции.

2.7. Запишите выражение производной функции $f(x, y, z)$ по заданному направлению в данной точке через частные производные функции в этой точке.

2.8. Запишите выражение производной функции $f(x, y, z)$ по заданному направлению в данной точке через градиент функции в этой точке.

2.9. Запишите формулу Лагранжа конечных приращений для функции нескольких переменных. При каких условиях эта формула верна?

2.10. Запишите выражение для второго дифференциала функции нескольких независимых переменных.

2.11. Запишите выражение для дифференциала n–го порядка функции нескольких независимых переменных.

2.12. Запишите выражение для второго дифференциала сложной функции нескольких переменных.

2.13. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ с центром разложения в точке $M_0(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots, \mathring{x}_m)$.

2.14. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ с центром разложения в точке $M_0(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots, \mathring{x}_m)$.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ в точке $M_0(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots, \mathring{x}_m)$.

3.2. Докажите теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ в точке $M_0(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots, \mathring{x}_m)$.

3.3. Докажите теорему о достаточных условиях равенства $u_{xy} = u_{yx}$ в данной точке.

3.4. Докажите теорему о касательной плоскости к графику функции двух переменных.

3.5. Докажите теорему о дифференцируемости сложной функции.

3.6. Докажите, что производная дифференцируемой в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ функции $f(x, y, z)$ по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ равна скалярному произведению вектора $\vec{l}$ и градиента функции f в точке M.

3.7. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x_1,...,x_m)$ с центром разложения в точке $M_0(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2,...,\mathring{x}_m)$.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Докажите, что если функция $u(x,y)$ имеет частные производные первого порядка в любой точке круга единичного радиуса и $\left|u_x(x,y)\right| \le 1$, $\left|u_y(x,y)\right| \le 1$, то для любых двух точек M и N этого круга справедливо неравенство $\left|u(M)-u(N)\right| < 3$.

4.2. Что такое “инвариантность формы первого дифференциала”?

4.3. Что такое “неинвариантность формы дифференциала второго порядка”?

4.4. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2. Докажите, что функция $u(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ дифференцируема в точке $M=(x_1,x_2)$.

4.5. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2. Докажите, что функция $u(x,y) = f(x)+g(y)$ дифференцируема в точке $M=(x_1,x_2)$.

4.6. Для функции $z=u(x,y)$ найдите частные производные первого порядка, градиент, первый и второй дифференциалы в точке $M(x,y)$, запишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z=u(x,y)$ в точке $M(x,y,u(x,y))$, найдите вектор нормали к этой плоскости. Вычислите все указанные величины в точке $M_0(x_0,y_0)$. Вычислите производную по направлению заданного вектора $\vec{L}$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

4.6.1. $u(x,y) = 2x+3y$, $M_0=(3;2)$, $\vec{L}=(3;-2)$;

4.6.2. $u(x,y) = 8x^2+2y^2-x^4-y^4$, $M_0=(2;1)$, $\vec{L}=(-1;-1)$;

4.6.3. $u(x,y) = xy(3-x-y)$, $M_0=(1;1)$, $\vec{L}=(-1;-1)$;

4.6.4. $u(x,y) = x^2y^3(6-2x-3y)$, $M_0=(1;1)$, $\vec{L}=(-1;-1)$;

4.6.5. $u(x,y) = x^3+y^3-3xy$ $M_0=(1;1)$, $\vec{L}=(-1;-1)$;

4.6.6. $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0=\left(\sqrt{3},1\right)$, $\vec{L}_1=\left(1;-\sqrt{3}\right)$, $\vec{L}_2=\left(\sqrt{3};1\right)$;

4.6.7. $u(x,y) = x^y-y^x$, $M_0=(e;e)$, $M_1=(1;1)$, $\vec{L}=(1;-1)$;

4.6.8. $u(x,y) = x^3-x^2y+y^3-1$, $\vec{L}$ образует угол $\dfrac{\pi}{6}$ с осью Ox.

4.7. Для функции $f(x,y,z)$ найдите частные производные первого порядка, градиент, первый и второй дифференциалы. Вычислите все указанные величины в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Найдите производную по направлению заданного вектора $\vec{L}$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

4.7.1. $u(x,y,z) = x^3+x+y+xyz$, $M_0=(1;1;1)$, $\vec{L}=(1,1,1)$;

4.7.2. $u(x,y,z) = \ln(xyz)$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, $M_0=(1;1;1)$, $\vec{L}=(1,1,1)$;

4.7.3. $u(x,y,z) = xyz(4-x-y-z)$, $M_0=(1;1;1)$, $\vec{L}=(1,1,1)$;

4.7.4. $u(x,y,z) = x^3y^4z^5(13-3x-4y-5z)$, $M_0=(1;1;1)$, $\vec{L}=(1,1,1)$.

4.7.5. $u(x,y,z) = x^3+x+y+xyz$, $M_0=(1;1;1)$, $\vec{L}=(1,1,1)$.

4.8. Для функции $u(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$ найдите $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

4.9. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции u, если f — дважды дифференцируемая функция, x и y — независимые переменные:

4.9.1. $u=f(\xi,\theta)$, $\xi=x^2+y^2$, $\theta=x^2-y^2$;

4.9.2. $u=f(\xi,\eta,\theta)$, $\xi=xy$, $\eta=x-y$, $\theta=x+y$.

4.10. Предполагая, что функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить следующее равенство:

4.10.1. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$, если $z=y\varphi(x^2-y^2)$;

4.10.2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$, если $z=xy+x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

4.10.3. $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $z=\varphi(x-ay)+\psi(x+ay)$.

4.11. Запишите формулу Тейлора порядка n с центром разложения в точке M_0 и с остаточным членом в форме Пеано для функций:

4.11.1. $u(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\quad M_0(2,3),\quad n=2$;

4.11.2. $u=x^y,\quad M_0(e,e),\quad n=2$;

4.11.3. $u=e^x\sin y,\quad M_0(0,0),\quad n=3$;

4.11.4. $u=\ln(1+x+y),\quad M_0(0,0),\quad n=3$;

4.11.5. $u(x,y,z)=x^3+x+y+xyz,\quad M_0(x_0,y_0)$, $n=3$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Пусть $u=f(x,y)$, d^2u в точке $M_0(x_0,y_0)$ существует и является положительно определённой квадратичной формой. Докажите, что при этом условии в некоторой окрестности точки $N_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательная плоскость к графику функции $u=f(x,y)$ в точке N_0 имеет единственную общую точку с графиком.

5.2. Имеет ли функция $u(x,y)$ частные производные первого порядка в точке $(0,0)$? Если имеет, найдите их и исследуйте эти частные производные на непрерывность в точке$(0,0)$.

$u(x,y)=\sqrt[3]{xy(x+y)}$; $\quad u(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$; $\quad u(x,y)=\sqrt[3]{xy}$; $\quad u(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$;

$u(x,y)=\sqrt[3]{xy(x^2+y^2)}$; $\quad u(x,y)=\sqrt[3]{x^4-y^4}$; $\quad u(x,y)=\sqrt[3]{x^5-y^5}$; $\quad u(x,y)=\sqrt[3]{yx^4+xy^4}$.

5.3. Является ли функция $u(x,y)$ дифференцируемой в точке$(0,0)$?

$u(x,y)=\sqrt[3]{xy}$; $u(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$; $u(x,y)=xy\cdot\sqrt[3]{xy}$; $u(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$; $u(x,y)=\sqrt[3]{x^4-y^4}$;

$u(x,y)=\sqrt[3]{xy(x^2+y^2)}$; $u(x,y)=\sqrt[3]{xy(x+y)}$; $\quad u(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$, если $x^2+y^2>0$,

$u(0,0)=0$; $\quad u(x,y)=xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$, если $x^2+y^2>0$, $u(0,0)=0$;

$u(x,y)=xy\cdot\sqrt[3]{x^3+y^3}\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$, если $x^2+y^2>0$, $u(0,0)=0$.

5.4. Пусть функция $u(x,y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$ и в некоторой окрестности точки $N_0(x_0,y_0,u(x_0,y_0))$ касательная плоскость к графику функции в этой точке имеет единственную общую точку с графиком. Докажите, что второй дифференциал в указанной точке является либо положительно определённой, либо квазиположительно определенной квадратичной формой.

5.5. Известно, что касательная плоскость к графику в точке $N_0(x_0,y_0,u(x_0,y_0))$ дважды дифференцируемой функции $z=u(x,y)$ имеет в любой окрестности точки N_0 не менее двух общих точек с графиком. Может ли при этом условии второй дифференциал d^2u в точке $M_0(x_0,y_0)$ являться знакоопределенной квадратичной формой?

5.6. Докажите, что отличный от нуля градиент дифференцируемой функции $z = u(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ направлен перпендикулярно касательной к линии уровня функции $u(x,y)$ в точке M_0.

5.7. Пусть функция $u(x,y)$ дифференцируема два раза в точке $M_0(x_0, y_0)$ и $R_3(x,y) = u(x,y) - P_2(x,y)$ – остаточный член формулы Тейлора, где $P_2(x,y)$ – многочлен Тейлора второго порядка. Докажите, что функция $R_3(x,y)$ и все её частные производные первого и второго порядка обращаются в нуль в точке M_0.

5.8. Пусть функция $u(x,y)$ такова, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ $u(M_0) = 0, \quad du\big|_{M_0} = 0, \quad d^2u\big|_{M_0} = 0$. Докажите, что $u(x,y) = o(\rho^2)$ при $\rho \to 0$, где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Тема 5. Локальный экстремум.

1. **Определения.**

1.1. Сформулируйте определение локального экстремума функции нескольких переменных.

2. **Основные теоремы (без доказательства).**

2.1. Сформулируйте необходимые условия локального экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ функции $u(x,y)$, дифференцируемой в этой точке.

2.2. Сформулируйте достаточные условия локального экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ дважды дифференцируемой в этой точке функции $u(x,y)$.

3. **Теоремы с доказательством.**

3.1. Докажите теорему о необходимых условиях локального экстремума функции нескольких переменных.

3.2. Докажите теорему о достаточных условиях локального экстремума функции нескольких переменных.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$. Докажите, что функция $u(x,y) + v(x,y)$ также имеет локальный минимум в указанной точке.

4.2. Приведите пример функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функция $u(x,y) \cdot v(x,y)$ имеет локальный максимум в указанной точке.

4.3. Приведите пример функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функция $u(x,y) \cdot v(x,y)$ не имеет локального экстремума в указанной точке.

4.4. Пусть функция $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ имеет локальный экстремум в точке $M(x_1, x_2)$, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, $f(x_1) \neq 0$, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2, $g(x_2) \neq 0$. Докажите, что $f'(x_1) = 0$, $g'(x_2) = 0$.

4.5. Пусть функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_1, $f(x_1) > 0$, функция $g(x)$ имеет локальный минимум в точке x_2, $g(x_2) > 0$. Докажите, что функция $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ имеет локальный минимум в точке $M(x_1, x_2)$.

4.6. Найдите все точки локального экстремума функций:

$u(x,y)=x^2+xy+y^2$; $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$; $u(x,y)=xy+\dfrac{8}{x}+\dfrac{8}{y}$;

$u(x,y)=(5-2x+y)e^{x^2-y}$; $u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$; $u(x,y,z)=xy+xz+yz$;

$u(x,y,z)=xyz(4-x-y-z)$; $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$;

$u(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$.

4.7. Исследуйте на экстремум функцию $u=x\cos y+z\cos x$ в точке $M\left(\dfrac{\pi}{2};0;1\right)$.

4.8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области:
$u=xy-x^2y-\dfrac{1}{2}y^2x,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что если $d^2u(M_0)$ - знакопеременная квадратичная форма, то функция u не имеет локального экстремума в точке M_0.

5.2. Докажите, что если в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $u(x,y)$ трижды дифференцируема, $du|_{M_0}=0,\ d^2u\big|_{M_0}=0,\ d^3u\big|_{M_0}\neq 0,$ то функция u не имеет локального экстремума в точке M_0.

5.3. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_1, $f'(x_1)=0$, функция $g(x)$ дважды дифференцируема в точке x_2, $g'(x_2)=0$, $f(x_1)g(x_2)f''(x_1)g''(x_2)>0$. Докажите, что функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ имеет локальный экстремум в точке $M(x_1,x_2)$.

5.4. Пусть функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_1, $f(x_1)>0$, функция $g(x)$ имеет локальный максимум в точке x_2, $g(x_2)>0$. Докажите, что функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ не имеет локального экстремума в точке $M(x_1,x_2)$.

5.5. Пусть функция $u(x,y)$ имеет локальный минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, а функции $x=\varphi(t,s)$ и $y=\psi(t,s)$ имеют отличный от нуля первый дифференциал в точке $K_0(s_0,t_0)$, причем $x_0=\varphi(t_0,s_0)$ и $y_0=\psi(t_0,s_0)$. Докажите, что сложная функция $u(\varphi(t,s),\psi(t,s))$ имеет локальный минимум в точке K_0.

5.6. Пусть непрерывные функции $x=\varphi(t,s)$ и $y=\psi(t,s)$ имеют локальный максимум в точке $K_0(s_0,t_0)$, а дифференцируемая в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $u(x,y)$ такова, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0)>0$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)>0$, причем $x_0=\varphi(t_0,s_0)$ и $y_0=\psi(t_0,s_0)$. Докажите, что сложная функция $u(\varphi(t,s),\psi(t,s))$ имеет локальный максимум в точке K_0.

Тема 6. Неявные функции.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение зависимости функций $f_1(x_2,\dots,x_n),\dots, f_k(x_2,\dots,x_n)$.

1.2. Сформулируйте определение независимости функций $f_1(x_2,\dots,x_n),\dots, f_k(x_2,\dots,x_n)$.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $y=f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y)=0$.

2.2. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $y=f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y)=0$.

2.3. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$.

2.4. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$.

2.5. Сформулируйте теорему о существовании и дифференцируемости функций $y = f(x)$, $z = g(x)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$

2.6. Сформулируйте теорему о достаточных условиях независимости функций.

2.7. Сформулируйте теорему о зависимости и независимости функций.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о существовании и непрерывности функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$.

3.2. Докажите теорему о дифференцируемости функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$.

3.3. Докажите теорему о существовании и непрерывности функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$.

3.4. Докажите теорему о существовании и дифференцируемости функций $y = f(x)$, $z = g(x)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$

3.5. Докажите теорему о достаточных условиях независимости функций.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Докажите, что уравнение $x^2 + xy + y^2 = 3$ окрестности точки $(1;1)$ однозначно определяет функцию $y = y(x)$.

4.2. Докажите, что уравнение $xy + \ln(xy) = 1$ в окрестности точки $(2;0.5)$ однозначно определяет функцию $y = y(x)$.

4.3. Пусть функции $y = u(x)$, $z = v(x)$ заданы системой уравнений $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$. Вычислите первый дифференциал функции $u(x)$.

4.4. Пусть функции $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ заданы неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y) = u, \\ G(x,y) = v. \end{cases}$

Найдите $\dfrac{\partial x}{\partial v}$.

4.5. Пусть функции $y = f(x)$, $z = g(x)$ заданы неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$.

Найдите $\dfrac{dz}{dx}$.

4.6. Докажите, что дифференцируемая функция $z(x,y)$, определяемая уравнением $F\left(z^2 - y^2, x^2 + (y-z)^2\right) = 0$, где F – дифференцируемая функция, является решением уравнения $(z-y)^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xz \dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$.

4.7. Проверьте, что дифференцируемая функция $z\,(x,y)$, определяемая уравнением $F\left(x^2+y^2,\dfrac{z}{x}\right)=0$, где F – дифференцируемая функция, является решением уравнения $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}-x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz$.

4.8. Найдите первую и вторую производные, найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий экстремума для дифференцируемой неявной функции $y=f(x)$, определяемой уравнением $F\,(x,y)=0$.

4.8.1. $F\,(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$;

4.8.2. $F\,(x,y)=8x^2y-x^4-y^4=0,\quad x>0,\quad y>0$;

4.8.3. $F\,(x,y)=y^2-ay-\sin x=0,\quad 0\le x\le 2\pi$.

4.9. Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z=z(x,y)$, заданной неявно уравнением

4.9.1. $xyz=x^2+y^2+z^2$;

4.9.2. $z\cos x+y\cos z+x\cos y=3$;

4.9.3. $x^2+zx+z^2+y=0$.

4.10. Пусть в окрестности точки (x_0,y_0,z_0) данное уравнение имеет единственное решение вида $z=z(x,y)$. Найдите указанные частные производные функции $z=z(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

4.10.1. $\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x}=z+x+y$; $\dfrac{\partial z}{\partial x},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

4.10.2. $\ln(xy+yz)=z^2+x^2+y^2-2$, $\dfrac{\partial z}{\partial x},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4.11. Найдите первый и второй дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} xu+yv=1,\\ x+y+u+v=0.\end{cases}$

4.12. Предполагая, что φ – дифференцируемая функция, проверьте выполнение равенства: $xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$, если $z^2=xy+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

4.13. Преобразуйте уравнение, введя новые переменные.

4.13.1. $y^2+(x^2-xy)\dfrac{dy}{dx}=0,\quad y=tx,\quad y=y(t)$;

4.13.2. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+y=0,\quad x=e^t,\quad y=y(t)$.

4.14. Приняв v за новую функцию $v(x,y)$, преобразуйте уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=-u,\quad u=ve^{-x-y}.$$

4.15. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуйте уравнение

4.15.1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=4x,\quad u=x,\quad v=x-y,\quad w=x-y+z$;

4.15.2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{2}x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{y}, \quad u=\dfrac{y}{x}, \quad v=y, \quad w=zy-x$.

4.16. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуйте уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0, \qquad u=x, \quad v=2\sqrt{y}, \ (y>0).$$

5. **Задачи повышенной трудности.**

5.1. Найдите du и dv, если функции $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$, заданы неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0. \end{cases}$ Сформулируйте достаточные условия существования и дифференцируемости неявных функций.

5.2. Найдите du и dv, если функции $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$, заданы неявно системой уравнений $\begin{cases} x=F(u,v), \\ y=G(u,v). \end{cases}$ Сформулируйте достаточные условия существования и дифференцируемости неявных функций.

Тема 7. Условный экстремум.

1. **Определения.**

1.1. Сформулируйте определение экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$.

1.2. Сформулируйте определение экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z)=0$.

1.3. Сформулируйте определение экстремума функции $u(x,y,z)$ с двумя условиями связи $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$.

2. **Основные теоремы (без доказательства).**

2.1. Сформулируйте теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$ в форме Лагранжа.

2.2. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$ в форме Лагранжа.

2.3. Сформулируйте теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

2.4. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

2.5. Сформулируйте теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с двумя условиями связи $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

2.6. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с двумя условиями связи $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

3. **Теоремы с доказательством.**

3.1. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$ в форме Лагранжа.

3.2. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

3.3. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с двумя условиями связи $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

4. **Вопросы и задачи.**

4.1. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции u при заданных условиях связи.

4.1.1. $u(x,y)=x^2+y^2$ при условии $x+y=2$;

4.1.2. $u(x,y)=x+y$ при условии $x^2+y^2=2$;

4.1.3. $u(x,y)=x+y$ при условии $xy=1$;

4.1.4. $u(x,y)=xy$ при условии $x^3+y^3-2xy=0$;

4.1.5. $u(x,y,z)=x+y+z$ при условии $xyz=1$;

4.1.6. $u(x,y,z)=x^2y^3z^4$ при условии $2x+3y+4z=9$;

4.1.7. $u(x,y,z)=xyz$ при условиях $x^2+y^2+z^2=1, \quad x+y+z=0$.

5. **Задачи повышенной трудности.**

5.1. Пусть в точке $N_0(x_0,y_0,\lambda)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа) условия экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$ и к тому же $gradu(x_0,y_0)\neq 0$, $gradf(x_0,y_0)\neq 0$. Докажите, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ градиенты функций $u(x,y)$ $f(x,y)$ коллинеарны.

5.2. Пусть в точке $N_0(x_0,y_0,\lambda)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа) условия экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $ax+by=c$ и $d^2u\big|_{M_0}>0$, $M_0(x_0,y_0)$. Докажите, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет место экстремум указанной функции с указанным условием связи.

5.3. Пусть в точке $N_0(x_0,y_0,\lambda)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа) условия экстремума функции $u(x,y)=ax+by$ с условием связи $f(x,y)=0$ и $d^2f\big|_{M_0}>0$, $M_0(x_0,y_0)$. Докажите, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет место экстремум указанной функции с указанным условием связи.

Тема 8. Определённый интеграл.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение интегральной суммы

1.2. Сформулируйте определение предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.

1.3. Сформулируйте определение нижней суммы (Дарбу).

1.4. Сформулируйте определение верхней суммы (Дарбу).

1.5. Сформулируйте определение предела верхних (нижних) сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.

1.6. Сформулируйте определение верхнего (нижнего) интеграла Дарбу.

1.7. Сформулируйте определение длины плоской кривой, заданной в параметрической форме.

1.8. Сформулируйте определение квадрируемой плоской фигуры.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Перечислите свойства сумм Дарбу.

2.2. Сформулируйте лемму Дарбу.

2.3. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ в терминах нижнего и верхнего интегралов Дарбу.

2.4. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ в терминах нижних и верхних сумм.

2.5. Запишите формулу среднего значения и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
2.6. Запишите формулу Ньютона – Лейбница и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
2.7. Запишите формулу замены переменной и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
2.8. Запишите формулу интегрирования по частям и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
2.9. Запишите формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной параметрически, и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
2.10. Запишите формулу прямоугольников приближенного вычисления определенных интегралов и выражение для остаточного члена этой формулы.
2.11. Запишите формулу трапеций приближенного вычисления определенных интегралов и выражение для остаточного члена этой формулы.
2.12. Запишите формулу парабол приближенного вычисления определенных интегралов и выражение для остаточного члена этой формулы.
2.13. Запишите формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

2.14. Запишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла.
2.15. Запишите формулу для вычисления площади криволинейного сектора помощью определенного интеграла.
2.16. Запишите формулу для вычисления массы кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$; линейная плотность равна $\rho(t)$.
2.17. Запишите формулу для вычисления массы кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$; линейная плотность равна $\rho(x)$.
2.18. Запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Линейная плотность постоянна.
2.19. Запишите формулу для вычисления y – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$; линейная плотность постоянна.
2.20. Запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$; линейная плотность постоянна.
2.21. Запишите формулу для вычисления y – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$; линейная плотность постоянна.
2.22. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Ox кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$; линейная плотность постоянна и равна 1.
2.23. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Oy кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$; линейная плотность постоянна и равна 1.

2.24. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Ox кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$; линейная плотность постоянна и равна 1.

2.25. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Oy кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$; линейная плотность постоянна и равна 1.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения T путем добавления к нему новых точек. Докажите, что нижняя сумма функции $f(x)$ для разбиения T' не меньше, чем нижняя сумма для разбиения T.

3.2. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения T путем добавления к нему новых точек. Докажите, что верхняя сумма функции $f(x)$ для разбиения T' не больше, чем верхняя сумма для разбиения T.

3.3. Докажите, что нижняя сумма функции $f(x)$ для любого разбиения T отрезка $[a;b]$ не превосходит верхней суммы той же функции $f(x)$ для любого другого разбиения T' отрезка $[a;b]$.

3.4. Докажите, что множество верхних сумм функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a;b]$ ограничено снизу.

3.5. Докажите, что множество нижних сумм функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a;b]$ ограничено сверху.

3.6. Докажите, что нижний интеграл Дарбу не превосходит верхнего интеграла Дарбу.

3.7. Докажите лемму Дарбу

3.8. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a;b]$ в терминах нижнего и верхнего интегралов Дарбу.

3.9. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a;b]$ в терминах нижних и верхних сумм.

3.10. Докажите теорему об интегрируемости непрерывной на сегменте функции.

3.11. Докажите теорему об интегрируемости некоторых разрывных на сегменте функций.

3.12. Докажите теорему об интегрируемости монотонной на сегменте функции.

3.13. Докажите теорему о формуле среднего значения.

3.14. Докажите теорему о существовании первообразной непрерывной функции.

3.15. Докажите теорему о формуле Ньютона – Лейбница.

3.16. Докажите теорему о формуле замены переменной.

3.17. Докажите теорему о формуле интегрирования по частям.

3.18. Докажите теорему о вычислении длины дуги кривой с помощью определённого интеграла.

3.19. Докажите теорему о вычислении площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла.

3.20. Докажите теорему о формуле прямоугольников приближенного вычисления определенных интегралов.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения T путем добавления к нему p новых точек. Дайте оценку разности верхних сумм функции $f(x)$ для разбиений T и T'.

4.2. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения T путем добавления к нему p новых точек. Дайте оценку разности нижних сумм функции $f(x)$ для разбиений T и T'.

4.3. Пусть разбиение T' получено путем добавления к разбиению T некоторого числа новых точек. Как изменится при этом верхняя сумма ?

4.4. Пусть $b(x)$ - дифференцируемая функция, $f(x)$ - непрерывная функция. Найдите $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^{b(x)} f(t)\,dt\right)$.

4.5. Пусть $a(x)$ и $b(x)$ - дифференцируемые функции, $f(x)$ - непрерывная функция. Найдите $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right)$.

4.6. Используя определённый интеграл, запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс однородной фигуры D на плоскости $(x;y)$, заданной системой неравенств $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, все указанные функции непрерывны.

4.7. Используя определённый интеграл, запишите формулу для вычисления y – координаты центра масс однородной фигуры D на плоскости $(x;y)$, заданной системой неравенств $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, все указанные функции непрерывны.

4.8. Пусть фигура D на плоскости $(x;y)$ задана системой неравенств $a \le x \le b$, $0 \le \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, все указанные функции непрерывны. Используя определённый интеграл, запишите формулу для вычисления объёма тела G, которое получается в результате вращения фигуры D вокруг оси x.

4.9. Пусть фигура D на плоскости $(x;y)$ задана системой неравенств $a \le x \le b$, $0 \le \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, все указанные функции непрерывны. Используя определённый интеграл, запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс однородного тела G, которое получается в результате вращения фигуры D вокруг оси Ox.

4.10. Вычислите $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin x}$; $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)(x-1)}$; $\int\limits_0^{\pi} e^{2x}\cos 3x\,dx$; $\int\limits_1^{e} \ln x\,dx$; $\int\limits_0^{\pi/8} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

4.11. Найдите

$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x} \sin t^2\,dt$; $\frac{d}{dx}\int\limits_x^{1} \arcsin\sqrt{t}\,dt$; $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \ln\left(\frac{2t^2}{1+\operatorname{arctg}^2 t+\sin^4 t}\right)dt$; $\frac{d}{dx}\int\limits_{\operatorname{arctg} x}^{\cos x} e^{-t^2}\,dt$;

$\frac{d}{db}\int\limits_a^{b} \sin\left(x^2\right)dx$; $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$.

4.12. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой:

4.12.1. $x^2+y^2=2x$;

4.12.2. $\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2-y^2\right),\quad x>0$;

4.13. Вычислить площадь фигуры, заданной неравенствами:

4.13.1. $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le x(3-x)^2$;

4.13.2. $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le x^2(5-x)$;

4.13.3. $(x^2+y^2)^{1{,}75} \le y^2\sqrt{x}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

4.13.4. $(x^2+y^2)^2 \le xy^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

4.14. Вычислите длину кривой $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$.

4.15. Вычислите массу кривой $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$ с линейной плотностью $\rho(x)=2\sqrt{1+x}$.

4.16. Вычислите x-координату центра масс кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если линейная плотность постоянна.

4.17. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$, если линейная плотность $\rho \equiv 1$.

4.18. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$; линейная плотность $\rho(t) = \sin t$.

4.19. Вычислите координаты центра масс и моменты инерции относительно координатных осей плоской фигуры, ограниченной линиями $x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = x$; поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

4.20. Вычислите координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = \cos x, \quad y = \sin x \quad (0 \le x \le 2\pi)$; поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

4.21. Вычислите момент инерции относительно оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = \arcsin x$; поверхностная плотность $\rho(x) \equiv 1$.

4.22. Найдите объём тела, поверхность которого задана уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

4.23. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры G, заданной системой неравенств $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$.

4.24. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры G, заданной системой неравенств $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$.

4.25. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры G, заданной системой неравенств $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x^2(2 - x)$.

4.26. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры G, заданной системой неравенств $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x^2(2 - x)$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Вычислите верхнюю сумму Дарбу для функции $y = e^x$ на отрезке $[0,1]$ в случае разбиения этого отрезка на N равных частей. Найдите предел полученного выражения при $N \to \infty$.

5.2. Вычислите нижнюю сумму Дарбу для функции $y = e^x$ на отрезке $[0,1]$ в случае разбиения этого отрезка на N равных частей. Найдите предел полученного выражения при $N \to +\infty$.

5.3. Вычислите верхнюю сумму Дарбу для функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[0;1]$ в случае разбиения этого отрезка на N равных частей. Найдите предел полученного выражения при $N \to +\infty$. Можно использовать формулу $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5.4. Вычислите нижнюю сумму Дарбу для функции $f(x) = \ln x$ на отрезке $[1;2]$ в случае разбиения этого отрезка на N равных частей. Найдите предел полученного выражения при $N \to +\infty$. Можно использовать формулу Стирлинга $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$ при $n \to +\infty$.

5.5. Вычислите верхнюю сумму Дарбу для функции $f(x) = \ln x$ на отрезке $[1;2]$ в случае разбиения этого отрезка на N равных частей. Найдите предел полученного выражения при $N \to +\infty$. Можно использовать формулу Стирлинга $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$ при $n \to +\infty$.

5.6. Вычислите нижнюю сумму Дарбу для функции $f(x)$ на отрезке $[0;1]$ в случае разбиения этого отрезка на N равных частей. Найдите предел при $N \to +\infty$.

5.6.1. $f(x) = x^2$ Можно использовать формулу $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5.6.2. $f(x) = x^3$. Можно использовать формулу $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{(n+1)^3}{2} + \frac{(n+1)^2}{4}$.

5.6.3. $f(x) = x^4$. Можно использовать формулу $\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ при $n \to \infty$ для любого натурального p.

5.7. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом сегменте.

5.8. Приведите пример функции $f(x)$, такой, что $\int_a^b |f(x)|dx$ существует, а $\int_a^b f(x)dx$ не существует.

5.9. Докажите интегрируемость произведения интегрируемых функций.

5.10. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$ и $\inf\limits_{[a,b]} f(x) > 0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ также интегрируема на этом сегменте.

Тема 9. Кратные интегралы.

1. Определения.

1.1. Дайте определение интегральной суммы для двойного интеграла.

1.2. Для двойного интеграла дайте определение предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о сведении двойного интеграла к повторному.

2.2. Сформулируйте теорему о формуле замены переменных для двойного интеграла.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о сведении двойного интеграла к повторному.

3.2. Докажите теорему о формуле замены переменных в двойном интеграле для случая линейной замены переменных.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Измените порядок интегрирования в повторных интегралах. Вычислите повторный интеграл.

$\int_0^1 dy \int_y^1 xydx$; $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} 2ydy$; $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2ydy$; $\int_0^1 dx \int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos ydy$.

4.2. Сведите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами:

4.2.1. $D = \{(x,y) : |x| + |y| \le 1\}$;

4.2.2. $D = \left\{(x,y) : y^2 \le x + 2,\ y \ge x\right\}$.

4.3. Вычислите

4.3.1. $\iint\limits_G \left(x^2 + y^2\right)dxdy,\quad D = \left\{x^2 + y^2 \le 6\right\}$;

4.3.2. $\iint\limits_G \left(x^2 - y^2\right)dxdy,\quad D = \left\{1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\} \cap \left\{\frac{\pi}{6} \le \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \le \frac{\pi}{4}\right\} \cap x > 0$.

4.4. Найдите замену переменных $(u,v) \leftrightarrow (x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $y^2 = 16x,\quad y^2 = 9x,\quad x = 2y,\quad x = 4y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D, используя замену переменных в двойном интеграле.

4.5. Найдите замену переменных $(u,v) \leftrightarrow (x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $xe^y = 1, \quad xe^y = 2, \quad x = e^y, \quad x = 2e^y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D, используя замену переменных в двойном интеграле.

4.6. Вычислите массу $m = \iint\limits_G dxdy$, статические моменты $M_x = \iint\limits_G ydxdy$, $M_y = \iint\limits_G xdxdy$ и моменты инерции $I_x = \iint\limits_G y^2dxdy$, $I_y = \iint\limits_G x^2dxdy$ однородной пластинки с плотностью $\rho = 1$, ограниченной линиями

4.6.1. $0 \le x \le 2, 0 \le y \le x;$

4.6.2. $0 \le x \le 4, 0 \le y \le x(4-x);$

4.6.3. $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin x;$

4.6.4. $10^{-3} \le x \le 1, 0 \le y \le x^{-1}$.

4.7. Изобразите на плоскости (x,y) область D, для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному: $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y}^{3-2y} f(x,y)\,dx$. Измените порядок интегрирования.

4.8. Изобразите на плоскости (x,y) область D, для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному: $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-2y}^{1-y} f(x,y)\,dx$. Вычислите указанный интеграл для $f(x,y) = y$.

4.9. Вычислите координаты центра масс и моменты инерции плоской фигуры относительно осей координат, если фигура ограничена линиями $x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = x$; поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

4.10. Вычислите координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = \cos x, \quad y = \sin x \quad (\pi/4 \le x \le 5\pi/4)$; поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

4.11. Вычислите момент инерции относительно оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = \arcsin x$; поверхностная плотность $\rho(x) \equiv 1$.

4.12. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)dxdydz$, где область G ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z, \quad z = 2.$

4.13. Сведите тройной интеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz$ к повторному, если G - область, ограниченная поверхностями $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 2$.

4.14. Вычислите моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела (плотность $\rho \equiv 1$), ограниченного поверхностями $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = 0, \quad (z \ge 0)$.

4.15. Вычислите координаты центра масс и момент инерции относительно начала координат тела с плотностью $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \ge 0)$.

4.16. Пусть G – тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1 \quad (z \geq 1)$. Найдите силу притяжения этим телом материальной точки массы m_0, находящейся в начале координат.

Тема 10. Криволинейные интегралы.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение криволинейного интеграла I рода от функции $f(x,y)$ по заданной кривой.

1.2. Сформулируйте определение криволинейного интеграла II рода $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx \cdot$

1.3. Сформулируйте определение криволинейного интеграла II рода $\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy \cdot$

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте достаточные условия существования криволинейного интеграла $\int\limits_{L} f(x,y)\,dl$ по кривой L.

2.2. Сформулируйте достаточные условия существования криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx \cdot$

2.3. Сформулируйте достаточные условия существования криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy \cdot$

2.4. Запишите формулу Грина и сформулируйте достаточные условия применимости.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о вычислении криволинейного интеграла первого рода с помощью определённого интеграла.

3.2. Докажите теорему о вычислении криволинейного интеграла второго рода с помощью определённого интеграла.

3.3. Докажите теорему об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

3.4. Докажите теорему о достаточных условиях того, что выражение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ является полным дифференциалом.

3.5. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ таковы, что криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ не зависит от пути интегрирования. Докажите, что $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

3.6. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ таковы, что выражение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ представляет собой полный дифференциал. Докажите, что $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

3.7. Докажите теорему о формуле Грина.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Выразите криволинейный интеграл $\int\limits_{L} f(x,y)\,dl$ через определённый интеграл.

4.2. Выразите криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx$ через определённый интеграл.

4.3. Выразите криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$ через определённый интеграл.

4.4. Вычислите значение интеграла $\oint\limits_{L} [x\cos(\mathbf{n},x) + y\cos(\mathbf{n},y)]\,ds$, где L –замкнутый контур,

$\boldsymbol{n}$ – внешняя нормаль к L.

4.5. Докажите, что если L – замкнутый контур и $\mathbf{l}$ – постоянный вектор, то $\oint_L \cos(\mathbf{l},\mathbf{n})\,ds = 0$.

4.6. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L. Запишите формулу, выражающую площадь области G через интеграл вида $\oint_L f(x,y)\,dx$.

4.7. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L и площадью S. Запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс области G через интеграл вида $\oint_L f(x,y)\,dx$, если поверхностная плотность равна 1.

4.8. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L и площадью S. Запишите формулу для вычисления y – координаты центра масс области G через интеграл вида $\oint_L f(x,y)\,dy$, если поверхностная плотность равна 1.

4.9. Пусть D – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L. Запишите в виде двойного интеграла по области D формулу для вычисления работы силы $\vec{F}(x,y) = \left(P(x,y);Q(x,y)\right)$ при перемещении материальной точки по замкнутому контуру L против часовой стрелки, если все функции непрерывно дифференцируемы в D.

4.10. Вычислите криволинейные интегралы первого рода

4.10.1. $\int_L 1ds$, где L – кривая $x = t,\quad y = \dfrac{t^2}{2},\ 0 \le t \le 1;$

4.10.2. $\int_L yds$, где L – кривая $y = e^x$, $0 \le x \le 2$;

4.10.3. $\int_L xydl,$ где L – часть ломаной линии $x + y = 1,\quad x - y = -1,\quad -1 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1$.

4.10.4. $\int_L x^2ydl,$ где $L = \left\{(x,y):\ x = 4\cos t,\ y = \sin 2t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right\}.$

4.11. Найдите координаты силы притяжения материальной точки массы m однородной полуокружностью массой M и радиусом R; точка помещена в центре соответствующей окружности.

4.12. Вычислите криволинейные интегралы второго рода:

4.12.1. $\int_{AB} xdx + ydy$, где кривая AB задана уравнением $y = x^2,\quad A(0,0),\quad B(1,1)$.

4.12.2. $\int_L (2 - y)dx + xdy$, где кривая L задана уравнениями $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\quad 0 \le t \le 2\pi$ и пробегается в направлении возрастания параметра t.

4.12.3. $\oint_L xdy + 2ydx$, где кривая L задана соотношениями

$y = 0,\quad y = \sqrt{1 - x^2},\quad y = x,\qquad 0 < y < x$.

4.12.4. $\int_L xydx - x^3y^3dy$, где L – замкнутый контур, заданный уравнением $|x - y| + |x + y| = 1$.

4.12.5. $\int_L ydx + zdy + xdz$, где L – кривая $x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad z = t,\ 0 \le t \le 2\pi$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

4.13. С помощью криволинейного интеграла найдите площадь области, ограниченной:

4.13.1. эллипсом $x = a\sin t,\ y = b\cos t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ a > 0,\ b > 0$;

4.13.2. параболой $(x+y)^2 = 2ax \quad (a > 0)$ и осью Ox.

4.13.3. астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

4.14. Вычислите моменты инерции относительно осей координат кривой, заданной как пересечение поверхности $2x^2 + y^2 - z^2 = -1$ и плоскости $z = x + 1$.

4.15. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \{x - y, 2x + y^2\}$ вдоль части параболы $x = y^2$, пробегаемой от точки $A(1,\ -1)$ до точки $B(1,\ 1)$.

4.16. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \{y, x\}$ вдоль контура, заданного как пересечение эллипсоида $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $z = x - 2$, пробегаемого против часовой стрелки, если смотреть из точки (0,0,-3).

4. Задачи повышенной трудности.

4.14. Пусть число $l(t)$ равно длине кривой L на плоскости, заданной уравнением $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le t$. Найдите $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{l(t)}{t^2}$.

4.15. Пусть функции $u(x,y),\quad v(x,y)$ и их частные производные первого и второго порядка непрерывны в замкнутой области G, ограниченной гладкой кривой L. Докажите, что справедлива формула: $\oint\limits_L \begin{vmatrix} u & v \\ \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \end{vmatrix} dl = \iint\limits_G \begin{vmatrix} u & v \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} dxdy$ (вторая формула Грина), где $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали к L, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, а интеграл в левой части есть криволинейный интеграл первого рода.

4.16. Вычислите интеграл $I = \oint\limits_L (x\cos\alpha + y\cos\beta)\,dl$, где L – замкнутая гладкая кривая, ограничивающая область площади S; α и β - углы между вектором внешней нормали **n** к кривой L в точке $M(x,y)$ и осями Ox и Oy.

4.17. Докажите, что если функция $u(x,y)$ имеет в замкнутой области G непрерывные производные второго порядка, то справедлива формула

$$\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy = -\iint\limits_G u\Delta u\,dxdy + \int\limits_L u\frac{\partial u}{\partial n}\,dl,$$

где L – гладкий контур, ограничивающий область G, $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали к L.

4.18. Применяя формулу Грина, найти $\lim\limits_{d(S)\to 0} \frac{1}{S} \oint\limits_L (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dl$, где S – площадь области, ограниченной контуром L, окружающим точку (x_0, y_0), $d(S)$ - диаметр области S, **n** – единичный вектор внешней нормали к контуру L и $\mathbf{F}\{x,y\}$ - вектор, непрерывно дифференцируемый в области S.

Тема 11. Кривые на плоскости.

Определения.

1.1. Сформулируйте определение того, что две кривые касаются (соприкасаются) в данной точке.

1.2. Сформулируйте определение порядка касания кривых в данной точке.
1.3. Сформулируйте определение огибающей однопараметрического семейства плоских кривых.
1.4. Сформулируйте определение кривизны плоской кривой.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы порядок касания двух кривых в данной точке был равен n.
2.2. Сформулируйте теорему о необходимых условиях огибающей однопараметрического семейства кривых.
2.3. Запишите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной в виде $y = f(x)$.
2.4. Запишите формулу для вычисления радиуса кривизны в заданной точке кривой $y = f(x)$.
2.5. Запишите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной в параметрической форме.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы порядок касания двух кривых в данной точке был равен n.
3.2. Докажите теорему о необходимых условиях огибающей однопараметрического семейства кривых.
3.3. Выведите формулу для вычисления кривизны кривой, заданной уравнением $y = f(x)$.
3.4. Выведите формулу для вычисления кривизны кривой, заданной в параметрической форме.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Какой порядок касания с осью Ox имеют в начале координат кривые: $y = 1 - \cos x$; $y = e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$; $y = \operatorname{tg} x - \sin x$.
4.2. При каком выборе коэффициентов a, b и c парабола $y = ax^2 + bx + c$ и кривая $y = e^x$ имеют в точке с абсциссой $x = x_0$ касание второго порядка?
4.3. Найдите огибающие однопараметрических семейств плоских кривых (C – параметр): $y = Cx + \dfrac{a}{C}$ $(a = \mathrm{const})$; $y = Cx - \ln C$; $2C^2(y - Cx) = 1$; $y^2 = 2Cx + C^2$.
4.4. Определите радиус кривизны параболы $y^2 = 2px$ в точке $(x_0, \sqrt{2px_0})$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Выведите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной в неявной форме.
5.2. Выведите формулу для вычисления радиуса кривизны плоской кривой, заданной в неявной форме.
5.3. Определите радиусы кривизны следующих кривых в произвольной точке: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.