Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 1. Общие сведения о функциях

Определение (прямое произведение множеств).

1. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$, $A_1, \dots, A_N$ — множества. Обозначим:

$$A_1 \times \cdots \times A_N = \big\{(x_1, \dots, x_N) \colon x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_N \in A_N\big\} =$$
$$\Big\{y \colon \exists x_1 \cdots \exists x_N \big(x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_N \in A_N \wedge y = (x_1, \dots, x_N)\big)\Big\}.$$

Множество $A_1 \times \cdots \times A_N$ называют прямым произведением множеств $A_1, \dots, A_N$.

2. Пусть: A — множество, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$. Обозначим: $A_1, \dots, A_N = A$, $A^N = A_1 \times \cdots \times A_N$.
3. Пусть A — множество. Обозначим, $A^1 = A$.

Определение.

1. Пусть F — функция. Обозначим через $\mathrm{D}(F)$ область определения функции F.
2. Пусть F — функция. Обозначим:

$$\mathrm{R}(F) = \big\{F(x) \colon x \in \mathrm{D}(F)\big\} = \Big\{y \colon \exists x \big(x \in \mathrm{D}(F) \wedge y = F(x)\big)\Big\}.$$

Множество $\mathrm{R}(F)$ называют областью значений функции F (образом функции F). Иногда множество $\mathrm{R}(F)$ обозначают через $\mathrm{Im}(F)$.

3. Пусть A, B — множества. Будем писать $F \colon A \to B$, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) \subseteq A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$. Обозначим через $\mathrm{fun}(A, B)$ множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F \colon A \to B$.
4. Пусть A, B — множества. Будем писать $F \colon A \implies B$, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) = A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$. Обозначим через $\mathrm{Fun}(A, B)$ множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F \colon A \implies B$.
5. Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим через $F|_A$ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(F|_A) = \mathrm{D}(F) \cap A$, $F|_A(x) = F(x)$ при $x \in \mathrm{D}(F) \cap A$. Функцию $F|_A$ называют ограничением функции F на множество A.
6. Пусть: F — функция, B — множество. Обозначим:

$$F^{-1}\{B\} = \big\{x \colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) \in B\big\}.$$

Множество $F^{-1}\{B\}$ называют полным прообразом множества B под действием функции F.

7. Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим:

$$F[A] = \big\{F(x) \colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge x \in A\big\} = \Big\{y \colon \exists x \big(x \in \mathrm{D}(F) \wedge x \in A \wedge y = F(x)\big)\Big\}.$$

Множество $F[A]$ называют образом множества A под действием функции F.

8. Пусть F_1, F_2 — функции. Обозначим через $F_2 \circ F_1$ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\}$, $(F_2 \circ F_1)(x) = F_2\bigl(F_1(x)\bigr)$ при: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$. Функцию $F_2 \circ F_1$ называют суперпозицией функций F_2, F_1 (композицией функций F_1, F_2; произведением функций F_2, F_1; сложной функцией, образованной функциями F_2, F_1). Иногда функцию $F_2 \circ F_1$ обозначают через $F_2 F_1$.

Утверждение. *Пусть F_1, F_2, F_3 — функции. Тогда $(F_3 \circ F_2) \circ F_1 = F_3 \circ (F_2 \circ F_1)$.*

Доказательство. Очевидно:

$$\mathrm{D}\bigl((F_3 \circ F_2) \circ F_1\bigr) = \{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_3 \circ F_2)\} =$$
$$\Bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2) \wedge F_2\bigl(F_1(x)\bigr) \in \mathrm{D}(F_3)\Bigr\} =$$
$$\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1) \wedge (F_2 \circ F_1)(x) \in \mathrm{D}(F_3)\} = \mathrm{D}\bigl(F_3 \circ (F_2 \circ F_1)\bigr).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\bigl((F_3 \circ F_2) \circ F_1\bigr)$. Тогда: $\bigl((F_3 \circ F_2) \circ F_1\bigr)(x) = (F_3 \circ F_2)\bigl(F_1(x)\bigr) = F_3\Bigl(F_2\bigl(F_1(x)\bigr)\Bigr) = F_3\bigl((F_2 \circ F_1)(x)\bigr) = \bigl(F_3 \circ (F_2 \circ F_1)\bigr)(x)$. В силу произвольности выбора x получаем, что $(F_3 \circ F_2) \circ F_1 = F_3 \circ (F_2 \circ F_1)$. $\square$

Определение.

1. Пусть F — функция. Будем говорить, что F — обратимая функция, если: $F(x_1) = F(x_2) \implies x_1 = x_2$ при $x_1, x_2 \in \mathrm{D}(F)$.
2. Пусть F — обратимая функция. Будем говорить, что φ — обратная функция к функции F, если: φ — функция, $\mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{R}(F)$, $\mathrm{R}(\varphi) \subseteq \mathrm{D}(F)$, $F\bigl(\varphi(y)\bigr) = y$ при $y \in \mathrm{D}(\varphi)$.

Утверждение. *Пусть F — обратимая функция. Существует единственная функция φ, удовлетворяющая условию: φ — обратная функция к функции F.*

Доказательство. Так как F — обратимая функция, то $\forall y \in \mathrm{R}(F) \exists! x\bigl(x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) = y\bigr)$. Тогда существует единственная функция φ, удовлетворяющая условиям: $\mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{R}(F)$, $\varphi(y) \in \mathrm{D}(F)$, $F\bigl(\varphi(y)\bigr) = y$ при $y \in \mathrm{D}(\varphi)$. Следовательно, существует единственная функция φ, удовлетворяющая условию: φ — обратная функция к функции F. $\square$

Определение. Пусть F — обратимая функция. Обозначим через F^{-1} обратную функцию к функции F.

Утверждение.

1. *Пусть: F_1, F_2 — функции;* $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\bigl(F_1(x)\bigr) = x$ *при* $x \in \mathrm{D}(F_1)$. *Тогда: F_1 — обратимая функция,* $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$.
2. *Пусть F — обратимая функция. Тогда: F^{-1} — функция,* $\mathrm{D}(F^{-1}) = \mathrm{R}(F)$, $\mathrm{R}(F^{-1}) = \mathrm{D}(F)$, $F\bigl(F^{-1}(y)\bigr) = y$ *при* $y \in \mathrm{D}(F^{-1})$; $F^{-1}\bigl(F(x)\bigr) = x$ *при* $x \in \mathrm{D}(F)$.
3. *Пусть: F_1, F_2 — функции;* $\mathrm{R}(F_1) = \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\bigl(F_1(x)\bigr) = x$ *при* $x \in \mathrm{D}(F_1)$. *Тогда: F_1, F_2 — обратимые функции, $F_2 = F_1^{-1}$, $F_1 = F_2^{-1}$.*
4. *Пусть: F_1, F_2 — функции;* $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\bigl(F_1(x)\bigr) = x$ *при* $x \in \mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\bigl(F_2(y)\bigr) = y$ *при* $y \in \mathrm{D}(F_2)$. *Тогда: F_1, F_2 — обратимые функции, $F_2 = F_1^{-1}$, $F_1 = F_2^{-1}$.*

Доказательство.

1. Пусть: $x_1, x_2 \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x_1) = F_2(x_2)$. Тогда: $x_1 = F_2\bigl(F_1(x_1)\bigr) = F_2\bigl(F_1(x_2)\bigr) = x_2$. В силу произвольности выбора x_1, x_2 получаем, что F_1 — обратимая функция.

   Пусть $x \in \mathrm{D}(F_1)$. Тогда: $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $x = F_2\bigl(F_1(x)\bigr)$. Следовательно, $x \in \mathrm{R}(F_2)$. В силу произвольности выбора x получаем, что $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$.

2. Очевидно: F^{-1} — функция, $\mathrm{D}(F^{-1}) = \mathrm{R}(F)$, $\mathrm{R}(F^{-1}) \subseteq \mathrm{D}(F)$, $F\big(F^{-1}(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F^{-1})$.

Пусть $x \in \mathrm{D}(F)$. Тогда $F(x) \in \mathrm{D}(F^{-1})$. Следовательно: $F^{-1}\big(F(x)\big) \in \mathrm{D}(F)$, $F\Big(F^{-1}\big(F(x)\big)\Big) = F(x)$. Так как F — обратимая функция, то $F^{-1}\big(F(x)\big) = x$.

Так как: $\mathrm{R}(F) = \mathrm{D}(F^{-1})$, $F^{-1}\big(F(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F)$, то $\mathrm{D}(F) \subseteq \mathrm{R}(F^{-1})$. Так как: $\mathrm{R}(F^{-1}) \subseteq \mathrm{D}(F)$, $\mathrm{D}(F) \subseteq \mathrm{R}(F^{-1})$, то $\mathrm{R}(F^{-1}) = \mathrm{D}(F)$.

3. Так как: $\mathrm{R}(F_1) = \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то F_1 — обратимая функция. Очевидно: $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$, $\mathrm{D}(F_1^{-1}) = \mathrm{R}(F_1)$. Пусть $y \in \mathrm{R}(F_1)$. Тогда можно указать такой объект x, что: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $y = F_1(x)$. Следовательно: $F_2(y) = F_2\big(F_1(x)\big) = x = F_1^{-1}\big(F_1(x)\big) = F_1^{-1}(y)$. В силу произвольности выбора y получаем, что $F_2 = F_1^{-1}$.

Так как $F_2 = F_1^{-1}$, то: $\mathrm{R}(F_2) = \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$. Тогда: F_2 — обратимая функция, $F_1 = F_2^{-1}$.

4. Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то F_1 — обратимая функция.

Так как: $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$, то $\mathrm{D}(F_2) \subseteq \mathrm{R}(F_1)$. Так как: $\mathrm{D}(F_2) \subseteq \mathrm{R}(F_1)$, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, то $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$. Так как: $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$, $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$, то $F_2 = F_1^{-1}$.

Аналогично получаем, что: F_2 — обратимая функция, $F_1 = F_2^{-1}$.

$\square$

Утверждение.

1. Пусть F — обратимая функция. Тогда: F^{-1} — обратимая функция, $F = (F^{-1})^{-1}$.

2. Пусть F_1, F_2 — обратимые функции. Тогда: $F_2 \circ F_1$ — обратимая функция, $F_1^{-1} \circ F_2^{-1} = (F_2 \circ F_1)^{-1}$.

Доказательство.

1. Так как: $\mathrm{R}(F^{-1}) = \mathrm{D}(F)$, $F\big(F^{-1}(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F^{-1})$, то: F^{-1} — обратимая функция, $F = (F^{-1})^{-1}$.

2. Пусть $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$. Обозначим, $z = (F_2 \circ F_1)(x)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) = F_1(x)$. Тогда: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) \in \mathrm{D}(F_1^{-1})$, $F_1^{-1}\big(F_2^{-1}(z)\big) = x$. Следовательно: $z \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z) = x$. Итак: $(F_2 \circ F_1)(x) \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})\big((F_2 \circ F_1)(x)\big) = x$.

Пусть $z \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$. Обозначим, $x = (F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z)$. Тогда: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) \in \mathrm{D}(F_1^{-1})$, $x = F_1^{-1}\big(F_2^{-1}(z)\big)$. Следовательно: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) = F_2^{-1}(z)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = z$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $(F_2 \circ F_1)(x) = z$. Итак: $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z) \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $(F_2 \circ F_1)\big((F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z)\big) = z$.

Окончательно получаем, что: $F_2 \circ F_1$ — обратимая функция, $F_1^{-1} \circ F_2^{-1} = (F_2 \circ F_1)^{-1}$.

$\square$

Теорема (о базисном миноре)**.** *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.*

Пусть: $r = \overline{1, \min\{N_1, N_2\}}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$; $\Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A) \neq 0$.

Пусть все миноры матрицы A порядка $r + 1$ равны нулю (если они существуют).

Тогда: столбцы $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ образуют базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$; строки $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ образуют базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$.

Доказательство. Обозначим, $\delta = \Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A)$.

Предположим, что $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда:

$$\delta = \begin{vmatrix} A_{i_1}^{j_1} & \cdot & A_{i_r}^{j_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i_1}^{j_r} & \cdot & A_{i_r}^{j_r} \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — линейно независимые столбцы.

Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Обозначим:

$$B(i,j) = \begin{pmatrix} A_{i_1}^{j_1} & \cdot & A_{i_r}^{j_1} & A_i^{j_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i_1}^{j_r} & \cdot & A_{i_r}^{j_r} & A_i^{j_r} \\ A_{i_1}^{j} & \cdot & A_{i_r}^{j} & A_i^{j} \end{pmatrix}.$$

Пусть $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$. Тогда последний столбец матрицы $B(i,j)$ равен одному из предыдущих столбцов матрицы $B(i,j)$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Пусть $j \in \{j_1, \ldots, j_r\}$. Тогда последняя строка матрицы $B(i,j)$ равна одной из предыдущих строк матрицы $B(i,j)$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Пусть: $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, $j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$. Тогда $\det\bigl(B(i,j)\bigr)$ равен (с точностью до знака) одному из миноров матрицы A порядка $r+1$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Итак, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$. Тогда:

$$0 = \det\bigl(B(i,j)\bigr) = (-1)^{r+1+1}\overline{\Delta}_1^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_{i_1}^j + \cdots + (-1)^{r+1+r}\overline{\Delta}_r^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_{i_r}^j + (-1)^{r+1+r+1}\overline{\Delta}_{r+1}^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_i^j.$$

Так как: $(-1)^{r+1+r+1}\overline{\Delta}_{r+1}^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr) = \delta \neq 0$, то:

$$A_i^j = -(-1)^{r+1+1}\frac{\overline{\Delta}_1^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)}{\delta}A_{i_1}^j - \cdots - (-1)^{r+1+r}\frac{\overline{\Delta}_r^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)}{\delta}A_{i_r}^j.$$

Пусть $k = \overline{1, r}$. Число $-(-1)^{r+1+k}\frac{\overline{\Delta}_k^{r+1}(B(i,j))}{\delta}$ не зависит от номера j. Обозначим, $C^k(i) = -(-1)^{r+1+k}\frac{\overline{\Delta}_k^{r+1}(B(i,j))}{\delta}$. Тогда $A_i^j = C^1(i)A_{i_1}^j + \cdots + C^r(i)A_{i_r}^j$. В силу произвольности выбора j получаем, что $A_i = C^1(i)A_{i_1} + \cdots + C^r(i)A_{i_r}$.

Аналогично проводятся рассуждения для строк. □

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.