Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 2. Подпространства

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $Q_1, \dots, Q_r \subseteq L$. Обозначим:

$$Q_1 + \dots + Q_r = \{x_1 + \dots + x_r \colon x_1 \in Q_1 \wedge \dots \wedge x_r \in Q_r\} =$$
$$\big\{y \colon \exists x_1 \cdots \exists x_r (x_1 \in Q_1 \wedge \dots \wedge x_r \in Q_r \wedge y = x_1 + \dots + x_r)\big\}.$$

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.*

1. *Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq L$. Тогда: $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$.*
2. *Пусть Q_1, Q_2, $Q_3 \subseteq L$. Тогда $(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3)$.*
3. *Пусть $Q \subseteq L$. Тогда $Q + \{\theta\} = Q$.*
4. *Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$, $Q_1, \dots, Q_r \subseteq L$. Тогда $Q_1 + \dots + Q_r = (Q_1 + \dots + Q_{r-1}) + Q_r$.*
5. *Пусть Q_1, Q_2 — подпространства пространства L. Тогда: $Q_1 + Q_2$ — подпространство пространства L, Q_1, $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$.*
6. *Пусть: Q_1 — подпространство пространства L, $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_2 \neq \varnothing$. Тогда $Q_1 + Q_2 = Q_1$.*
7. *Пусть: r_1, $r_2 \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_{r_1}$, $y_1, \dots, y_{r_2} \in L$. Тогда: $L(x_1, \dots, x_{r_1}) + L(y_1, \dots, y_{r_2}) = L(x_1, \dots, x_{r_1}, y_1, \dots, y_{r_2})$.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Следовательно: $x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in Q_2 + Q_1$.

Пусть $x \in Q_2 + Q_1$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1 \in Q_2$, $x_2 \in Q_1$, $x = x_1 + x_2$. Следовательно: $x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in Q_1 + Q_2$.

2. Пусть $x \in (Q_1 + Q_2) + Q_3$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, x_3, что: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $x = (x_1 + x_2) + x_3$. Следовательно: $x = (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) \in Q_1 + (Q_2 + Q_3)$.

Пусть $x \in Q_1 + (Q_2 + Q_3)$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, x_3, что: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $x = x_1 + (x_2 + x_3)$. Следовательно: $x = x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 \in (Q_1 + Q_2) + Q_3$.

3. Пусть $x \in Q + \{\theta\}$. Тогда можно указать такой вектор x_1, что: $x_1 \in Q$, $x = x_1 + \theta$. Следовательно: $x = x_1 + \theta = x_1 \in Q$.

Пусть $x \in Q$. Так как $\theta \in \{\theta\}$, то: $x = x + \theta \in Q + \{\theta\}$.

4. Пусть $x \in Q_1 + \dots + Q_r$. Тогда можно указать такие векторы $x_1, \dots, x_r$, что: $x_1 \in Q_1, \dots, x_r \in Q_r$, $x = x_1 + \dots + x_r$. Следовательно: $x = x_1 + \dots + x_r = (x_1 + \dots + x_{r-1}) + x_r \in (Q_1 + \dots + Q_{r-1}) + Q_r$.

Пусть $x \in (Q_1 + \dots + Q_{r-1}) + Q_r$. Тогда можно указать такие векторы $x_1, \dots, x_r$, что: $x_1 \in Q_1, \dots, x_r \in Q_r$, $x = (x_1 + \dots + x_{r-1}) + x_r$. Следовательно: $x = (x_1 + \dots + x_{r-1}) + x_r = x_1 + \dots + x_r \in Q_1 + \dots + Q_r$.

5. Покажем, что $Q_1 + Q_2$ — подпространство пространства L. Очевидно, $Q_1 + Q_2 \subseteq L$. Так как Q_1, $Q_2 \neq \varnothing$, то $Q_1 + Q_2 \neq \varnothing$.

Пусть x, $y \in Q_1 + Q_2$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, y_1, y_2, что: x_1, $y_1 \in Q_1$, x_2, $y_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$. Следовательно: $x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in Q_1 + Q_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Следовательно: $\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in Q_1 + Q_2$. Итак, $Q_1 + Q_2$ — подпространство пространства L.

Покажем, что Q_1, $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$. Пусть $x \in Q_1$. Так как $\theta \in Q_2$, то: $x = x + \theta \in Q_1 + Q_2$. Итак, $Q_1 \subseteq Q_1 + Q_2$.

Пусть $x \in Q_2$. Так как $\theta \in Q_1$, то: $x = \theta + x \in Q_1 + Q_2$. Итак, $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$.

6. Пусть $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Так как $Q_2 \subseteq Q_1$, то $x_2 \in Q_1$. Тогда: $x = x_1 + x_2 \in Q_1$.

Пусть $x \in Q_1$. Так как $Q_2 \neq \varnothing$, то можно указать такой вектор x_2, что $x_2 \in Q_2$. Так как $Q_2 \subseteq Q_1$, то $x_2 \in Q_1$. Тогда: $x = x + \theta = x + \big(x_2 + (-x_2)\big) = \big(x_1 + (-x_2)\big) + x_2 \in Q_1 + Q_2$.

7. Пусть $u \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2})$. Тогда можно указать такие числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_1}$, $\beta^1, \ldots, \beta^{r_2} \in \mathbb{K}$, что $u = (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2})$. Следовательно: $u = (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}) = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2} \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2})$.

Пусть $u \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2})$. Тогда можно указать такие числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_1}$, $\beta^1, \ldots, \beta^{r_2} \in \mathbb{K}$, что $u = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}$. Следовательно: $u = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2} = (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}) \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2})$.

□

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, если: $x_1 + \cdots + x_r = \theta \implies x_1 = \theta \wedge \cdots \wedge x_r = \theta$ при: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L. Обозначим, $Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_r = Q_1 + \cdots + Q_r$. Сумму линейно независимых подпространств называют прямой суммой.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L. Подпространства $Q_1, \ldots, Q_r$ линейно независимы тогда и только тогда, когда: $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r \implies x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_r = y_r$ при: $x_1, y_1 \in Q_1, \ldots, x_r, y_r \in Q_r$.*

Доказательство. Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Пусть: $x_1, y_1 \in Q_1, \ldots, x_r, y_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r$. Тогда: $x_1 - y_1 \in Q_1, \ldots, x_r - y_r \in Q_r$, $(x_1 - y_1) + \cdots + (x_r - y_r) = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $x_1 - y_1 = \theta, \ldots, x_r - y_r = \theta$. Тогда: $x_1 = y_1, \ldots, x_r = y_r$.

Пусть: $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r \implies x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_r = y_r$ при: $x_1, y_1 \in Q_1, \ldots, x_r, y_r \in Q_r$. Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Обозначим, $y_1, \ldots, y_r = \theta$. Тогда: $x_1, y_1 \in Q_1, \ldots, x_r, y_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r$. Следовательно: $x_1 = y_1 = \theta, \ldots, x_r = y_r = \theta$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L. Подпространства Q_1, Q_2 линейно независимы тогда и только тогда, когда $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$.*

Доказательство. Пусть Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства. Так как: $\theta \in Q_1$, $\theta \in Q_2$, то $\theta \in Q_1 \cap Q_2$. Пусть $x \in Q_1 \cap Q_2$. Тогда: $x \in Q_1$, $x \in Q_2$. Следовательно: $x \in Q_1$, $-x \in Q_2$, $x + (-x) = \theta$. Так как Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства, то $x = \theta$. Итак, $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$.

Пусть $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$. Пусть: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_1 + x_2 = \theta$. Тогда: $x_1 \in Q_1$, $x_1 = -x_2 \in Q_2$; $x_2 = -x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$. Следовательно: $x_1 \in Q_1 \cap Q_2$, $x_2 \in Q_1 \cap Q_2$. Так как $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$, то: $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta$. Итак, Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.*

1. *Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L, $\sigma \in S_r$. Тогда $Q_{\sigma(1)}, \ldots, Q_{\sigma(r)}$ — линейно независимые подпространства.*

2. *Пусть: $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_{r_1}$, $D_1, \ldots, D_{r_2}$ — линейно независимые подпространства пространства L, $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_{r_1}$ — подпространства пространства L, $\tilde{Q}_1 \subseteq Q_1, \ldots, \tilde{Q}_{r_1} \subseteq Q_{r_1}$. Тогда $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_{r_1}$ — линейно независимые подпространства.*

3. *Пусть: $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_{r_1}$ — линейно независимые подпространства пространства L, $D_1, \dots, D_{r_2} = \{\theta\}$. Тогда $Q_1, \dots, Q_{r_1}$, $D_1, \dots, D_{r_2}$ — линейно независимые подпространства.*

4. *Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$, $Q_1, \dots, Q_r$ — подпространства пространства L. Подпространства $Q_1, \dots, Q_r$ линейно независимы тогда и только тогда, когда: подпространства $Q_1, \dots, Q_{r-1}$ линейно независимы, подпространства $Q_1 + \dots + Q_{r-1}$, Q_r линейно независимы. Подпространства $Q_1, \dots, Q_r$ линейно независимы тогда и только тогда, когда: подпространства $Q_2, \dots, Q_r$ линейно независимы, подпространства Q_1, $Q_2 + \dots + Q_r$ линейно независимы.*

Доказательство.

1. Пусть: $x_1 \in Q_{\sigma(1)}, \dots, x_r \in Q_{\sigma(r)}$, $x_1 + \dots + x_r = \theta$. Тогда: $x_{\sigma^{-1}(1)} \in Q_1, \dots, x_{\sigma^{-1}(r)} \in Q_r$, $x_{\sigma^{-1}(1)} + \dots + x_{\sigma^{-1}(r)} = \theta$. Так как $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(r)} = \theta$. Тогда $x_1, \dots, x_r = \theta$. Итак, $Q_{\sigma(1)}, \dots, Q_{\sigma(r)}$ — линейно независимые подпространства.

2. Пусть: $x_1 \in \tilde{Q}_1, \dots, x_{r_1} \in \tilde{Q}_{r_1}$, $x_1 + \dots + x_{r_1} = \theta$. Обозначим, $y_1, \dots, y_{r_2} = \theta$. Тогда: $x_1 \in Q_1, \dots, x_{r_1} \in Q_{r_1}$, $y_1 \in D_1, \dots, y_{r_2} \in D_{r_2}$, $x_1 + \dots + x_{r_1} + y_1 + \dots + y_{r_2} = \theta$. Так как $Q_1, \dots, Q_{r_1}$, $D_1, \dots, D_{r_2}$ — линейно независимые подпространства, то $x_1, \dots, x_{r_1} = \theta$. Итак, $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{r_1}$ — линейно независимые подпространства.

3. Пусть: $x_1 \in Q_1, \dots, x_{r_1} \in Q_{r_1}$, $y_1 \in D_1, \dots, y_{r_2} \in D_{r_2}$, $x_1 + \dots + x_{r_1} + y_1 + \dots + y_{r_2} = \theta$. Так как $D_1, \dots, D_{r_2} = \{\theta\}$, то $y_1, \dots, y_{r_2} = \theta$. Тогда: $x_1 \in Q_1, \dots, x_{r_1} \in Q_{r_1}$, $x_1 + \dots + x_{r_1} = \theta$. Так как $Q_1, \dots, Q_{r_1}$ — линейно независимые подпространства, то $x_1, \dots, x_{r_1} = \theta$. Итак, $Q_1, \dots, Q_{r_1}$, $D_1, \dots, D_{r_2}$ — линейно независимые подпространства.

4. Пусть $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Тогда $Q_1, \dots, Q_{r-1}$ — линейно независимые подпространства. Пусть: $y \in Q_1 + \dots + Q_{r-1}$, $x_r \in Q_r$, $y + x_r = \theta$. Так как $y \in Q_1 + \dots + Q_{r-1}$, то можно указать такие векторы $x_1, \dots, x_{r-1}$, что: $x_1 \in Q_1, \dots, x_{r-1} \in Q_{r-1}$, $y = x_1 + \dots + x_{r-1}$. Тогда: $x_1 \in Q_1, \dots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \dots + x_r = \theta$. Так как $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $x_1, \dots, x_r = \theta$. Тогда: $y = x_1 + \dots + x_{r-1} = \theta$, $x_r = \theta$. Итак, $Q_1 + \dots + Q_{r-1}$, Q_r — линейно независимые подпространства.

Пусть: $Q_1, \dots, Q_{r-1}$ — линейно независимые подпространства, $Q_1 + \dots + Q_{r-1}$, Q_r — линейно независимые подпространства. Пусть: $x_1 \in Q_1, \dots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \dots + x_r = \theta$. Тогда: $x_1 + \dots + x_{r-1} \in Q_1 + \dots + Q_{r-1}$, $x_r \in Q_r$, $(x_1 + \dots + x_{r-1}) + x_r = \theta$. Так как $Q_1 + \dots + Q_{r-1}$, Q_r — линейно независимые подпространства, то: $x_1 + \dots + x_{r-1} = \theta$, $x_r = \theta$. Так как: $x_1 \in Q_1, \dots, x_{r-1} \in Q_{r-1}$, $x_1 + \dots + x_{r-1} = \theta$, $Q_1, \dots, Q_{r-1}$ — линейно независимые подпространства, то $x_1, \dots, x_{r-1} = \theta$. Итак, $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Аналогично доказывается второе утверждение рассматриваемого пункта.

□

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $N_1, \dots, N_r \in \mathbb{N}$.*

1. *Пусть: $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L; $e_{k,1}, \dots, e_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы подпространства Q_k при $k = \overline{1,r}$. Тогда $e_{1,1}, \dots, e_{1,N_1}, \dots, e_{r,1}, \dots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы.*

2. *Пусть: $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L; $e_{k,1}, \dots, e_{k,N_k}$ — базис подпространства Q_k при $k = \overline{1,r}$. Тогда $e_{1,1}, \dots, e_{1,N_1}, \dots, e_{r,1}, \dots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \dots + Q_r$.*

3. *Пусть: $e_{1,1}, \dots, e_{1,N_1}, \dots, e_{r,1}, \dots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы пространства L; $Q_k = L(e_{k,1}, \dots, e_{k,N_k})$ при $k = \overline{1,r}$. Тогда $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L.*

Доказательство.

1. Пусть: $\alpha^{k,m} \in \mathbb{K}$ при $k = \overline{1,r}$, $m = \overline{1,N_k}$; $\sum\limits_{\substack{k=\overline{1,r},\\ m=\overline{1,N_k}}} \alpha^{k,m} e_{k,m} = \theta$. Тогда: $\sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} e_{k,m} \in Q_k$ при $k = \overline{1,r}$; $\sum\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} e_{k,m} = \theta$. Так как $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $\sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} e_{k,m} = \theta$ при $k = \overline{1,r}$. Фиксируем номер $k = \overline{1,r}$. Так как

$e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы, то: $\alpha^{k,m}=0$ при $m=\overline{1,N_k}$. Итак, $e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы.

2. Очевидно: $Q_1+\cdots+Q_r = L(e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1})+\cdots+L(e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r}) = L(e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r})$. Так как $Q_1,\ldots,Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы. Тогда $e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1+\cdots+Q_r$.

3. Пусть: $x_1\in Q_1,\ldots,x_r\in Q_r$, $x_1+\cdots+x_r=\theta$. Фиксируем номер $k=\overline{1,r}$. Так как $x_k\in Q_k$, то можно указать такие числа $\alpha^{k,1},\ldots,\alpha^{k,N_k}\in\mathbb{K}$, что $x_k=\alpha^{k,1}e_{k,1}+\cdots+\alpha^{k,N_k}e_{k,N_k}$. Тогда:

$$\theta=\sum_{k=1}^{r}x_k=\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{N_k}\alpha^{k,m}e_{k,m}=\sum_{\substack{k=\overline{1,r},\\ m=\overline{1,N_k}}}\alpha^{k,m}e_{k,m}.$$

Так как $e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы, то: $\alpha^{k,m}=0$ при $k=\overline{1,r}$, $m=\overline{1,N_k}$. Тогда: $x_k=\alpha^{k,1}e_{k,1}+\cdots+\alpha^{k,N_k}e_{k,N_k}=\theta$ при $k=\overline{1,r}$. Итак, $Q_1,\ldots,Q_r$ — линейно независимые подпространства.

□

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r\in\mathbb{Z}$, $r\geqslant 2$, $Q_1,\ldots,Q_r$ *— подпространства пространства* L*;* $\dim(Q_k)\neq+\infty$ *при* $k=\overline{1,r}$*. Подпространства* $Q_1,\ldots,Q_r$ *линейно независимы тогда и только тогда, когда* $\dim(Q_1+\cdots+Q_r)=\dim(Q_1)+\cdots+\dim(Q_r)$.

Доказательство. Обозначим: $N_k=\dim(Q_k)$ при $k=\overline{1,r}$.

1. Пусть: $N_k\neq 0$ при $k=\overline{1,r}$. Фиксируем номер $k=\overline{1,r}$. Так как $N_k\in\mathbb{N}$, то можно указать такие векторы $e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k}$, что $e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k}$ — базис подпространства Q_k.

Пусть $Q_1,\ldots,Q_r$ — линейно независимые подпространства. Тогда $e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1+\cdots+Q_r$. Следовательно: $\dim(Q_1+\cdots+Q_r)=N_1+\cdots+N_r$.

Пусть $\dim(Q_1+\cdots+Q_r)=N_1+\cdots+N_r$. Предположим, что $e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r}$ — линейно зависимые векторы. Тогда:

$$\dim(Q_1+\cdots+Q_r)=\dim\bigl(L(e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1})+\cdots+L(e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r})\bigr)=$$
$$\dim\bigl(L(e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r})\bigr)<N_1+\cdots+N_r.$$

Итак, $e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы. Так как: $Q_k=L(e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k})$ при $k=\overline{1,r}$, то $Q_1,\ldots,Q_r$ — линейно независимые подпространства.

2. Пусть: $\exists k=\overline{1,r}(N_k\neq 0)$, $\exists k=\overline{1,r}(N_k=0)$. Тогда можно указать такое число $p=\overline{1,r-1}$ и такие числа $k_1,\ldots,k_p=\overline{1,r}$, что: $k_1<\cdots<k_p$, $N_{k_1},\ldots,N_{k_p}\neq 0$; $N_k=0$ при: $k=\overline{1,r}$, $k\notin\{k_1,\ldots,k_p\}$. Следовательно: $Q_k=\{\theta\}$ при: $k=\overline{1,r}$, $k\notin\{k_1,\ldots,k_p\}$.

Пусть $Q_1,\ldots,Q_r$ — линейно независимые подпространства. Тогда $Q_{k_1},\ldots,Q_{k_p}$ — линейно независимые подпространства. Следовательно, $\dim(Q_{k_1}+\cdots+Q_{k_p})=N_{k_1}+\cdots+N_{k_p}$. Тогда: $\dim(Q_1+\cdots+Q_r)=\dim(Q_{k_1}+\cdots+Q_{k_p})=N_{k_1}+\cdots+N_{k_p}=N_1+\cdots+N_r$.

Пусть $\dim(Q_1+\cdots+Q_r)=N_1+\cdots+N_r$. Тогда: $\dim(Q_{k_1}+\cdots+Q_{k_p})=\dim(Q_1+\cdots+Q_r)=N_1+\cdots+N_r=N_{k_1}+\cdots+N_{k_p}$. Следовательно, $Q_{k_1}+\cdots+Q_{k_p}$ — линейно независимые подпространства. Тогда $Q_1,\ldots,Q_r$ — линейно независимые подпространства.

3. Пусть: $N_k=0$ при $k=\overline{1,r}$. Тогда: $Q_k=\{\theta\}$ при $k=\overline{1,r}$. Следовательно: $Q_1,\ldots,Q_r$ — линейно независимые подпространства; $\dim(Q_1+\cdots+Q_r)=\dim\bigl(\{\theta\}\bigr)=0=N_1+\cdots+N_r$.

□

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $Q_1 \subseteq Q_2$. Будем говорить, что D — линейное дополнение подпространства Q_1 до подпространства Q_2, если: D — подпространство пространства L, $Q_2 = Q_1 + D$; Q_1, D — линейно независимые подпространства.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*,* $Q_1 \subseteq Q_2$*,* $\dim(Q_2) \neq +\infty$*. Тогда можно указать линейное дополнение* D *подпространства* Q_1 *до подпространства* Q_2*.*

Доказательство. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Так как $Q_1 \subseteq Q_2$, то $N_1 \leqslant N_2$.

1. Пусть: $N_1 \neq 0$, $N_1 \neq N_2$. Так как $N_1 \in \mathbb{N}$, то можно указать такие векторы $e_1, \ldots, e_{N_1}$, что $e_1, \ldots, e_{N_1}$ — базис подпространства Q_1. Так как: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$, то можно указать такие векторы $e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}$, что $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — базис пространства Q_2. Обозначим, $D = L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2})$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = L(e_1, \ldots, e_{N_1}) + L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}) = L(e_1, \ldots, e_{N_2}) = Q_2$; Q_1, D — линейно независимые подпространства.

2. Пусть $N_1 = 0$. Тогда $Q_1 = \{\theta\}$. Обозначим, $D = Q_2$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = \{\theta\} + Q_2 = Q_2$; Q_1, D — линейно независимые подпространства.

3. Пусть $N_1 = N_2$. Так как: $N_1 = N_2$, $N_2 \neq +\infty$, то $Q_1 = Q_2$. Обозначим, $D = \{\theta\}$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = Q_2 + \{\theta\} = Q_2$; Q_1, D — линейно независимые подпространства.

□

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*,* $\dim(Q_1)$*,* $\dim(Q_2) \neq +\infty$*. Тогда* $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$.

Доказательство. Так как: $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$, то можно указать линейное дополнение D подпространства $Q_1 \cap Q_2$ до подпространства Q_2. Тогда: $\dim(D) = \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$, $(Q_1 \cap Q_2) \cap D = \{\theta\}$.

Так как $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_1$, то: $Q_1 + Q_2 = Q_1 + (Q_1 \cap Q_2 + D) = (Q_1 + Q_1 \cap Q_2) + D = Q_1 + D$. Так как $D \subseteq Q_2$, то: $Q_1 \cap D = Q_1 \cap (D \cap Q_2) = (Q_1 \cap Q_2) \cap D = \{\theta\}$. Тогда Q_1, D — линейно независимые подпространства. Следовательно: $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1 + D) = \dim(Q_1) + \dim(D) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$. □

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.