Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 3. Тензорная алгебра

3.1. Числовые наборы

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $r \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$.

1. Обозначим через $\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$ множество всех функций A, удовлетворяющих условию $A\colon \{1, \ldots, N_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, N_r\} \implies \mathbb{K}$.
2. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Будем говорить, что A — числовой набор степени r.

Замечание. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Далее часто будем писать $A_{i_1, \ldots, i_r}$ или $A^{i_1, \ldots, i_r}$ вместо $A(i_1, \ldots, i_r)$.
2. Пусть: $p, q \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_{p+q} \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_{p+q}}$. Далее часто будем писать $A^{j_1, \ldots, j_q}_{i_1, \ldots, i_p}$ вместо $A(j_1, \ldots, j_q, i_1, \ldots, i_p)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $r \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$.

1. Пусть $A, B \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Тогда: $(A+B)_{i_1, \ldots, i_r} = A_{i_1, \ldots, i_r} + B_{i_1, \ldots i_r}$ при: $i_1 = \overline{1, N_1}, \ldots, i_r = \overline{1, N_r}$.
2. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Тогда: $(\lambda A)_{i_1, \ldots, i_r} = \lambda A_{i_1, \ldots, i_r}$ при: $i_1 = \overline{1, N_1}, \ldots, i_r = \overline{1, N_r}$.
3. Очевидно, $\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.
4. Нетрудно показать, что $\dim\left(\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}\right) = N_1 \cdots N_r$.

Утверждение. *Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — различные математические объекты, $D = \{x_1, \ldots, x_r\}$; $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Фиксируем номер $i = \overline{1, r}$. Пусть: $F_i(x) = 1$ при $x = x_i$; $F_i(x) = 0$ при: $x \in D$, $x \neq x_i$. Тогда $F_1, \ldots, F_r$ — базис пространства $\operatorname{Fun}(D, \mathbb{K})$.*

Доказательство. Пусть: $C^1, \ldots, C^r \in \mathbb{K}$, $\sum\limits_{i=1}^{r} C^i F_i = \Theta$; $k = \overline{1, r}$. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{r} C^i F_i(x) = \Theta(x) \text{ при } x \in D,$$

$$\sum_{i=1}^{r} C^i F_i(x_k) = \Theta(x_k),$$

$$\sum_{i=1}^{r} C^i \delta_i^k = 0,$$

$$C^k = 0.$$

Итак, $F_1, \ldots, F_r$ — линейно независимые функции.

Пусть $F \in \operatorname{Fun}(D, \mathbb{K})$. Покажем, что $F = \sum\limits_{i=1}^{r} F(x_i) F_i$. Пусть $x \in D$. Тогда можно указать такой номер $k = \overline{1, r}$, что $x = x_k$. Следовательно: $\sum\limits_{i=1}^{r} F(x_i) F_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} F(x_i) F_i(x_k) = \sum\limits_{i=1}^{r} F(x_i) \delta_i^k = F(x_k) = F(x)$. Итак, $F_1, \ldots, F_r$ — базис пространства $\operatorname{Fun}(D, \mathbb{K})$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$.

1. Пусть: $r \in \mathbb{N}$; $N_1 = \dots = N_r = N$. Обозначим, $\mathbb{K}^{(N,r)} = \mathbb{K}^{N_1 \times \dots \times N_r}$. Обозначим, $\mathbb{K}^{(N,0)} = \mathbb{K}$.
2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}_+$, $A \in \mathbb{K}^{(N,r)}$. Будем говорить, что A — числовой набор степени r.
3. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, $\mathbb{K}^{(N,r)}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.
4. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, $\dim\Big(\mathbb{K}^{(N,r)}\Big) = N^r$.

3.2. Геометрические объекты

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть: $x \in L$, e — базис пространства L. Будем говорить, что $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x, если: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $x = \tilde{x}^j e_j$. Обозначим через $[x](e)$ столбец координат вектора x в базисе e.
2. Пусть e, e' — базисы пространства L. Обозначим: $\alpha^i_{i'}(e, e') = [e'_{i'}]^i(e)$ при $i, i' = \overline{1, N}$. Матрицу $\alpha(e, e')$ называют матрицей перехода от базиса e к базису e'.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$.

1. *Пусть* e *— базис пространства* L*. Тогда* $\alpha(e, e) = \tilde{I}$ *(здесь:* $\tilde{I} \in \mathbb{K}^{N \times N}$*,* $\tilde{I}$ *— единичная матрица).*
2. *Пусть* e*,* e'*,* e'' *— базисы пространства* L*. Тогда* $\alpha(e, e'') = \alpha(e, e')\alpha(e', e'')$.
3. *Пусть* e*,* e' *— базисы пространства* L*. Тогда:* $\det\Big(\alpha(e, e')\Big) \neq 0$*,* $\Big(\alpha(e, e')\Big)^{-1} = \alpha(e', e)$.
4. *Пусть:* e *— базис пространства* L*,* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$*,* $\det(A) \neq 0$*;* $e'_{i'} = A^i_{i'} e_i$ *при* $i' = \overline{1, N}$*. Тогда:* e' *— базис пространства* L*,* $\alpha(e, e') = A$.
5. *Пусть:* $x \in L$*,* e*,* e' *— базисы пространства* L*. Тогда:* $[x](e') = \alpha(e', e)[x](e)$*;* $[x]^{j'}(e') = \alpha^{j'}_j(e', e)[x]^j(e)$ *при* $j' = \overline{1, N}$.

Доказательство.

1. Пусть $i = \overline{1, N}$. Тогда $e_i = \delta^j_i e_j$. Следовательно: $\alpha^j_i(e, e) = \delta^j_i$ при $j = \overline{1, N}$.
2. Пусть $i'' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$e''_{i''} = \alpha^{i'}_{i''}(e', e'') e'_{i'} = \alpha^{i'}_{i''}(e', e'')\Big(\alpha^i_{i'}(e, e') e_i\Big) = \Big(\alpha^i_{i'}(e, e')\alpha^{i'}_{i''}(e', e'')\Big) e_i.$$

Следовательно: $\alpha^i_{i''}(e, e') = \alpha^i_{i'}(e, e')\alpha^{i'}_{i''}(e', e'')$ при $i = \overline{1, N}$.

3. Очевидно: $\alpha(e, e')\alpha(e', e) = \alpha(e, e) = \tilde{I}$. Тогда: $\det\Big(\alpha(e, e')\Big) \neq 0$, $\Big(\alpha(e, e')\Big)^{-1} = \alpha(e', e)$.
4. Очевидно, $e'_1, \dots, e'_N \in L$. Пусть: $C^1, \dots, C^N \in \mathbb{K}$, $C^{i'} e'_{i'} = \theta$. Тогда: $\theta = C^{i'} e'_{i'} = C^{i'}(A^i_{i'} e_i) = (A^i_{i'} C^{i'}) e_i$. Так как $e_1, \dots, e_N$ — линейно независимые векторы, то: $A^i_{i'} C^{i'} = 0$ при $i = \overline{1, N}$. Так как $\det(A) \neq 0$, то: $C^{i'} = 0$ при $i' = \overline{1, N}$. Итак, $e'_1, \dots, e'_N$ — линейно независимые векторы. Так как $\dim(L) = N$, то e' — базис пространства L. Так как: $e'_{i'} = A^i_{i'} e_i$ при $i' = \overline{1, N}$, то $\alpha(e, e') = A$.

5. Очевидно:

$$x = [x]^j(e)e_j = [x]^j(e)\Big(\alpha_j^{j'}(e', e)e'_{j'}\Big) = \Big(\alpha_j^{j'}(e', e)[x]^j(e)\Big)e'_{j'}.$$

Тогда: $[x]^{j'}(e') = \alpha_j^{j'}(e', e)[x]^j(e)$ при $j' = \overline{1, N}$.

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $r \in \mathbb{Z}_+$.

1. Будем говорить, что A — геометрический объект степени r в пространстве L, если A это отображение, которое каждому базису e пространства L ставит в соответствие числовой набор $A(e) \in \mathbb{K}^{(N,r)}$.
2. Обозначим через $(GL)_r$ множество всех геометрических объектов степени r в пространстве L.
3. Далее часто будем писать $A_{i_1,\ldots,i_r}(e)$ вместо $\Big(A(e)\Big)_{i_1,\ldots,i_r}$.
4. Пусть $A, B \in (GL)_r$. Тогда: $(A+B)(e) = A(e) + B(e)$ при: e — базис пространства L.
5. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in (GL)_r$. Тогда: $(\lambda A)(e) = \lambda A(e)$ при: e — базис пространства L.
6. Очевидно, $(GL)_r$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

3.3. Тензоры

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что A — тензор порядка $\binom{q}{p}$ в пространстве L, если A это геометрический объект степени $p+q$ в пространстве L, удовлетворяющий условию:

$$A^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(e') = A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e, e').$$

Здесь: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p, j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$.

2. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что A — тензор порядка $\binom{0}{p}$ в пространстве L, если A это геометрический объект степени p в пространстве L, удовлетворяющий условию:

$$A_{i'_1,\ldots,i'_p}(e') = A_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e, e').$$

Здесь: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p = \overline{1, N}$.

3. Пусть $q \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что A — тензор порядка $\binom{q}{0}$ в пространстве L, если A это геометрический объект степени q в пространстве L, удовлетворяющий условию:

$$A^{j'_1,\ldots,j'_q}(e') = A^{j_1,\ldots,j_q}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e', e).$$

Здесь: e, e' — базисы пространства L, $j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$.

4. Будем говорить, что A — тензор порядка $\binom{0}{0}$ в пространстве L, если A это геометрический объект степени 0 в пространстве L, удовлетворяющий условию:

$$A(e') = A(e).$$

Здесь e, e' — базисы пространства L.

5. Пусть $p, q \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $(TL)^q_p$ множество всех тензоров порядка $\binom{q}{p}$ в пространстве L.
6. Пусть: $p, q \in Z_+$, $A, B \in (TL)^q_p$. Тогда: $(A+B)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) + B^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)$ при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$.

7. Пусть: $p, q \in Z_+$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in (TL)_p^q$. Тогда: $(\lambda A)_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e) = \lambda A_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e)$ при: e — базис пространства L, $i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q = \overline{1,N}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $p, q \in \mathbb{Z}_+$*. Тогда* $(TL)_p^q$ *— подпространство пространства* $(GL)_{p+q}$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $(TL)_p^q \subseteq (GL)_{p+q}$.

2. Пусть Θ — нулевой элемент пространства $(GL)_{p+q}$. Покажем, что $\Theta \in (TL)_p^q$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p,j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$, тогда:

$$\Theta_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') = 0 = \Theta_{i'_1,\dots,i'_p}^{j'_1,\dots,j'_q}(e').$$

3. Пусть $A, B \in (TL)_p^q$. Покажем, что $A+B \in (TL)_p^q$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p,j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$, тогда:

$$\begin{gathered}(A+B)_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') = \\ \Big(A_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e) + B_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e)\Big)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') = \\ A_{i'_1,\dots,i'_p}^{j'_1,\dots,j'_q}(e') + B_{i'_1,\dots,i'_p}^{j'_1,\dots,j'_q}(e') = (A+B)_{i'_1,\dots,i'_p}^{j'_1,\dots,j'_q}(e').\end{gathered}$$

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in (TL)_p^q$. Покажем, что $\lambda A \in (TL)_p^q$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p,j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$, тогда:

$$\begin{gathered}(\lambda A)_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') = \\ \Big(\lambda A_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e)\Big)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') = \\ \lambda A_{i'_1,\dots,i'_p}^{j'_1,\dots,j'_q}(e') = (\lambda A)_{i'_1,\dots,i'_p}^{j'_1,\dots,j'_q}(e').\end{gathered}$$

$\square$

Замечание (примеры). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть $x \in L$. Очевидно, $[x] \in (TL)_0^1$.

2. Пусть: $\delta_i^j(e) = \delta_i^j$ при: e — базис пространства L, $i, j = \overline{1,N}$. Покажем, что $\delta \in (TL)_1^1$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i', j' = \overline{1,N}$, тогда:

$$\begin{gathered}\delta_i^j(e)\alpha_j^{j'}(e',e)\alpha_{i'}^i(e,e') = \delta_i^j\alpha_j^{j'}(e',e)\alpha_{i'}^i(e,e') = \\ \alpha_i^{j'}(e',e)\alpha_{i'}^i(e,e') = \delta_{i'}^{j'} = \delta_{i'}^{j'}(e').\end{gathered}$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $p, q \in \mathbb{Z}_+$*,* e_0 *— базис пространства* L*.*

1. *Пусть:* $A, B \in (TL)_p^q$*,* $A(e_0) = B(e_0)$*. Тогда* $A = B$*.*

2. *Пусть* $A_0 \in \mathbb{K}^{(N,p+q)}$*. Тогда можно указать такой тензор* A*, что:* $A \in (TL)_p^q$*,* $A(e_0) = A_0$*.*

Доказательство.

1. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q=\overline{1,N}$, тогда:

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)=A^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}(e_0)\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e)=$$
$$B^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}(e_0)\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e)=B^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e).$$

2. Обозначим:

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)=(A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q=\overline{1,N}$.

Покажем, что $A\in(TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\ldots,i'_p,j'_1,\ldots,j'_q=\overline{1,N}$, тогда:

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e')=$$
$$\Big((A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e)\Big)$$
$$\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e')=$$
$$(A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\alpha^{j'_1}_{j^0_1}(e',e_0)\cdots\alpha^{j'_q}_{j^0_q}(e',e_0)\alpha^{i^0_1}_{i'_1}(e_0,e')\cdots\alpha^{i^0_p}_{i'_p}(e_0,e')=A^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\cdots,i'_p}(e').$$

Покажем, что $A(e_0)=A_0$. Пусть $i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q=\overline{1,N}$, тогда:

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e_0)=(A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e_0,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e_0,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e_0)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e_0)=$$
$$(A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\delta^{j_1}_{j^0_1}\cdots\delta^{j_q}_{j^0_q}\delta^{i^0_1}_{i_1}\cdots\delta^{i^0_p}_{i_p}=(A_0)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}.$$

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N\in\mathbb{N}$, $\dim(L)=N$; $p,q\in\mathbb{Z}_+$. Тогда $(TL)^q_p\approx\mathbb{K}^{(N,p+q)}$. Следовательно: $\dim\Big((TL)^q_p\Big)=\dim\Big(\mathbb{K}^{(N,p+q)}\Big)=N^{p+q}$.

Определение. Пусть $r\in\mathbb{N}$. Обозначим через S_r множество всех перестановок множества $\{1,\ldots,N\}$. Обозначим через S_0 множество всех перестановок множества $\varnothing$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N\in\mathbb{N}$, $\dim(L)=N$.

1. Пусть: $p_1,q_1\in\mathbb{Z}_+$, $A\in(TL)^{q_1}_{p_1}$; $p_2,q_2\in\mathbb{Z}$, $p_2,q_2\geqslant 0$, $B\in(TL)^{q_2}_{p_2}$. Обозначим:

$$(A\otimes B)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p_1+p_2},j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}=\overline{1,N}$. Геометрический объект $A\otimes B$ называют прямым произведением тензоров A, B.

2. Пусть: $r\in\mathbb{Z}$, $r\geqslant 3$; $p_k,q_k\in\mathbb{Z}_+$, $A_k\in(TL)^{q_k}_{p_k}$ при $k=\overline{1,r}$. Обозначим: $\tilde p_k=p_1+\cdots+p_k$, $\tilde q_k=q_1+\cdots+q_k$ при $k=\overline{1,r}$;

$$(A_1\otimes\cdots\otimes A_r)^{j_1,\ldots,j_{\tilde q_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde p_r}}(e)=$$
$$(A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde q_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde p_1}}(e)(A_2)^{j_{\tilde q_1+1},\ldots,j_{\tilde q_2}}_{i_{\tilde p_1+1},\ldots,i_{\tilde p_2}}(e)\cdots(A_r)^{j_{\tilde q_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde q_r}}_{i_{\tilde p_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde p_r}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{\tilde p_r},j_1,\ldots,j_{\tilde q_r}=\overline{1,N}$. Геометрический объект $A_1\otimes\cdots\otimes A_r$ называют прямым произведением тензоров $A_1,\ldots,A_r$.

3. Пусть: $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. Обозначим:

$$\Big(\langle A\rangle^m_k\Big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e) = A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p-1}, j_1, \ldots, j_{q-1} = \overline{1, N}$. Геометрический объект $\langle A\rangle^m_k$ называют свёрткой тензора A.

4. Пусть: $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. Обозначим:

$$\Big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\Big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = A^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Геометрический объект $[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$ называют результатом транспонирования тензора A.

5. Пусть: $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma \in S_p$. Обозначим:

$$\Big([A]_\sigma\Big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p)}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Геометрический объект $[A]_\sigma$ называют результатом транспонирования тензора A.

6. Пусть: $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma \in S_q$. Обозначим:

$$\Big([A]^\sigma\Big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = A^{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(q)}}_{i_1,\ldots,i_p}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Геометрический объект $[A]^\sigma$ называют результатом транспонирования тензора A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$; $p_k, q_k \in \mathbb{Z}_+$, $A_k \in (TL)^{q_k}_{p_k}$ *при* $k = \overline{1, r}$. *Тогда:* $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_{r-1}) \otimes A_r$, $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r = A_1 \otimes (A_2 \otimes \cdots \otimes A_r)$.

Доказательство.

1. Обозначим: $\tilde{p}_k = p_1 + \cdots + p_k$, $\tilde{q}_k = q_1 + \cdots + q_k$ при $k = \overline{1, r}$. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}, j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$, тогда:

$$\Big((A_1 \otimes \cdots \otimes A_{r-1}) \otimes A_r\Big)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) =$$
$$\Big((A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e) \ldots (A_{r-1})^{j_{\tilde{q}_{r-2}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_{r-1}}}_{i_{\tilde{p}_{r-2}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_{r-1}}}(e)\Big)(A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) =$$
$$(A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e) \ldots (A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e).$$

2. Обозначим: $\tilde{p}_k = p_1 + \cdots + p_k$, $\tilde{q}_k = q_1 + \cdots + q_k$ при $k = \overline{1, r}$. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}, j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$, тогда:

$$\Big(A_1 \otimes (A_2 \otimes \cdots \otimes A_r)\Big)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) =$$
$$(A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e)\Big((A_2)^{j_{\tilde{q}_1+1},\ldots,j_{\tilde{q}_2}}_{i_{\tilde{p}_1+1},\ldots,i_{\tilde{p}_2}}(e) \ldots (A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e)\Big) =$$
$$(A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e) \ldots (A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e).$$

□

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. *Пусть:* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $A \otimes B \in (TL)^{q_1+q_2}_{p_1+p_2}$.

2. *Пусть:* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A_1, A_2 \in (TL)^{q_1}_{p_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$.

3. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$; $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $(\lambda A) \otimes B = \lambda(A \otimes B)$.

4. *Пусть:* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B_1, B_2 \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2$.

5. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$; $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $A \otimes (\lambda B) = \lambda(A \otimes B)$.

6. Факультативный материал. *Пусть:* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{q_2}_{p_2}$. *Пусть:* $\sigma_1(k) = k + p_1$ *при* $k = \overline{1, p_2}$; $\sigma_1(k) = k - p_2$ *при* $k = \overline{p_2 + 1, p_2 + p_1}$; $\sigma_2(k) = k + q_1$ *при* $k = \overline{1, q_2}$; $\sigma_2(k) = k - q_2$ *при* $k = \overline{q_2 + 1, q_2 + q_1}$. *Тогда:* $\sigma_1 \in S_{p_1+p_2}$, $\sigma_2 \in S_{q_1+q_2}$, $A \otimes B = [B \otimes A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$.

7. *Пусть:* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{q_2}_{p_2}$; $p_3, q_3 \in \mathbb{Z}_+$, $C \in (TL)^{q_3}_{p_3}$. *Тогда* $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

8. *Пусть:* $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. *Тогда* $\langle A \rangle^m_k \in (TL)^{q-1}_{p-1}$.

9. *Пусть:* $p, q \in \mathbb{N}$, $A, B \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. *Тогда* $\langle A + B \rangle^m_k = \langle A \rangle^m_k + \langle B \rangle^m_k$.

10. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. *Тогда* $\langle \lambda A \rangle^m_k = \lambda \langle A \rangle^m_k$.

11. *Пусть:* $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1} \in (TL)^q_p$.

12. *Пусть:* $p, q \in \mathbb{Z}$, $p, q \geqslant 0$, $A, B \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[A + B]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = [A]^{\sigma_2}_{\sigma_1} + [B]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$.

13. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[\lambda A]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = \lambda [A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$.

14. Факультативный материал. *Пусть:* $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A, B \in (TL)^q_p$, $\sigma_1, \sigma_3 \in S_p$, $\sigma_2, \sigma_4 \in S_q$. *Тогда* $\Big[[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\Big]^{\sigma_4}_{\sigma_3} = [A]^{\sigma_4 \sigma_2}_{\sigma_3 \sigma_1}$.

Доказательство.

1. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_{p_1+p_2}, j'_1, \ldots, j'_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$, тогда:

$$(A \otimes B)^{j_1, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) \alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_{q_1+q_2}}_{j_{q_1+q_2}}(e', e) \alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_{p_1+p_2}}_{i'_{p_1+p_2}}(e, e') =$$
$$A^{j_1, \ldots, j_{q_1}}_{i_1, \ldots, i_{p_1}}(e) B^{j_{q_1+1}, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1}, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) \alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_{q_1+q_2}}_{j_{q_1+q_2}}(e', e)$$
$$\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_{p_1+p_2}}_{i'_{p_1+p_2}}(e, e') = A^{j'_1, \ldots, j'_{q_1}}_{i'_1, \ldots, i'_{p_1}}(e') B^{j'_{q_1+1}, \ldots, j'_{q_1+q_2}}_{i'_{p_1+1}, \ldots, i'_{p_1+p_2}}(e') =$$
$$(A \otimes B)^{j'_1, \ldots, j'_{q_1+q_2}}_{i'_1, \ldots, i'_{p_1+p_2}}(e').$$

2. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$, тогда:

$$\Big((A_1 + A_2) \otimes B\Big)^{j_1, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$\Big((A_1)^{j_1, \ldots, j_{q_1}}_{i_1, \ldots, i_{p_1}}(e) + (A_2)^{j_1, \ldots, j_{q_1}}_{i_1, \ldots, i_{p_1}}(e)\Big) B^{j_{q_1+1}, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1}, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$(A_1)^{j_1, \ldots, j_{q_1}}_{i_1, \ldots, i_{p_1}}(e) B^{j_{q_1+1}, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1}, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) + (A_2)^{j_1, \ldots, j_{q_1}}_{i_1, \ldots, i_{p_1}}(e) B^{j_{q_1+1}, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1}, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$(A_1 \otimes B + A_2 \otimes B)^{j_1, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e).$$

3. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$, тогда:

$$\Big((\lambda A) \otimes B\Big)^{j_1, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) = \Big(\lambda A^{j_1, \ldots, j_{q_1}}_{i_1, \ldots, i_{p_1}}(e)\Big) B^{j_{q_1+1}, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1}, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$\lambda\Big(A^{j_1, \ldots, j_{q_1}}_{i_1, \ldots, i_{p_1}}(e) B^{j_{q_1+1}, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1}, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e)\Big) = \lambda(A \otimes B)^{j_1, \ldots, j_{q_1+q_2}}_{i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}}(e).$$

4. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p_1+p_2},j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}=\overline{1,N}$, тогда:

$$\Big(A\otimes(B_1+B_2)\Big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=$$
$$A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\Big((B_1)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)+(B_2)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\Big)=$$
$$A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)(B_1)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)+A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)(B_2)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=$$
$$(A\otimes B_1+A\otimes B_2)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

5. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p_1+p_2},j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}=\overline{1,N}$, тогда:

$$\Big(A\otimes(\lambda B)\Big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\Big(\lambda B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\Big)=$$
$$\lambda\Big(A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\Big)=\lambda(A\otimes B)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

6. Факультативный материал. Очевидно: $\sigma_1\in S_{p_1+p_2}$, $\sigma_2\in S_{q_1+q_2}$. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p_1+p_2},j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}=\overline{1,N}$, тогда:

$$(A\otimes B)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=$$
$$B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)=$$
$$B^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q_2)}}_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p_2)}}(e)A^{j_{\sigma_2(1+q_2)},\ldots,j_{\sigma_2(q_1+q_2)}}_{i_{\sigma_1(1+p_2)},\ldots,i_{\sigma_1(p_1+p_2)}}(e)=\Big([B\otimes A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\Big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

7. Очевидно: $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes B\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$.

8. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\ldots,i'_{p-1},j'_1,\ldots,j'_{q-1}=\overline{1,N}$, тогда:

$$\Big(\langle A\rangle^m_k\Big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e')=$$
$$A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e')=$$
$$A^{j_1,\ldots,j_{m-1},j,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)\delta^i_j\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e')=$$
$$A^{j_1,\ldots,j_{m-1},j,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)\alpha^i_{i'}(e,e')\alpha^{i'}_j(e',e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)$$
$$\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e')=A^{j'_1,\ldots,j'_{m-1},i',j'_m,\ldots,j'_{q-1}}_{i'_1,\ldots,i'_{k-1},i',i'_k,\ldots,i'_{p-1}}(e')=\Big(\langle A\rangle^m_k\Big)^{j'_1,\ldots,j'_{q-1}}_{i'_1,\ldots,i'_{p-1}}(e').$$

9. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p-1},j_1,\ldots,j_{q-1}=\overline{1,N}$, тогда:

$$\Big(\langle A+B\rangle^m_k\Big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e)=A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)+B^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)=$$
$$\Big(\langle A\rangle^m_k+\langle B\rangle^m_k\Big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e).$$

10. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p-1},j_1,\ldots,j_{q-1}=\overline{1,N}$, тогда:

$$\Big(\langle\lambda A\rangle^m_k\Big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e)=\lambda A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)=\Big(\lambda\langle A\rangle^m_k\Big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e).$$

11. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\ldots,i'_p,j'_1,\ldots,j'_q=\overline{1,N}$, тогда:

$$\Big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\Big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e')=$$
$$A^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e')=$$
$$A^{j'_{\sigma_2(1)},\ldots,j'_{\sigma_2(q)}}_{i'_{\sigma_1(1)},\ldots,i'_{\sigma_1(p)}}(e')=\Big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\Big)^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(e').$$

12. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$, тогда:
$$\Big([A+B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\Big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e) = A_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e) + B_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e) = \Big([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2} + [B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\Big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e).$$

13. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$, тогда:
$$\Big([\lambda A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\Big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e) = \lambda A_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e) = \lambda\Big([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\Big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e).$$

14. Факультативный материал. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$, тогда:
$$\Big(\big[[A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big]_{\sigma_3}^{\sigma_4}\Big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e) = \Big([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\Big)_{i_{\sigma_3(1)},\ldots,i_{\sigma_3(p)}}^{j_{\sigma_4(1)},\ldots,j_{\sigma_4(q)}}(e) = A_{i_{\sigma_3(\sigma_1(1))},\ldots,i_{\sigma_3(\sigma_1(p))}}^{j_{\sigma_4(\sigma_2(1))},\ldots,j_{\sigma_4(\sigma_2(q))}}(e) = A_{i_{(\sigma_3\sigma_1)(1)},\ldots,i_{(\sigma_3\sigma_1)(p)}}^{j_{(\sigma_4\sigma_2)(1)},\ldots,j_{(\sigma_4\sigma_2)(q)}}(e) = \Big([A]_{\sigma_3\sigma_1}^{\sigma_4\sigma_2}\Big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e).$$

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in (TL)_1^1$.

Пусть e — базис пространства L. Тогда: $\operatorname{tr}\Big(A(e)\Big) = A_i^i(e) = \langle A\rangle_1^1(e)$.

Пусть e, e' — базисы пространства L. Так как $\langle A\rangle_1^1 \in (TL)_0^0$, то: $\operatorname{tr}\Big(A(e')\Big) = \langle A\rangle_1^1(e') = \langle A\rangle_1^1(e) = \operatorname{tr}\Big(A(e)\Big)$. Так как: $A_{i'}^{j'}(e') = A_i^j(e)\alpha_j^{j'}(e', e)\alpha_{i'}^i(e, e')$ при $i', j' = \overline{1, N}$, то $A(e') = \alpha(e', e)A(e)\alpha(e, e')$. Тогда:
$$\det\Big(A(e')\Big) = \det\Big(\alpha(e', e)A(e)\alpha(e, e')\Big) = \det\Big(\alpha(e', e)\Big)\det\Big(A(e)\Big)\det\Big(\alpha(e, e')\Big) = \det\Big(A(e)\Big)\det\Big(\alpha(e, e')\alpha(e', e)\Big) = \det\Big(A(e)\Big)\det(\tilde{I}) = \det\Big(A(e)\Big).$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

1. Обозначим через $(\Omega L)_p^q$ множество всех тензоров A, удовлетворяющих условиям: $A \in (TL)_p^q$; $[A]_{\sigma_1}^{\sigma_2} = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)A$ при: $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$.
2. Пусть $A \in (\Omega L)_p^q$. Будем говорить, что A — антисимметричный тензор порядка $\binom{q}{p}$.
3. Очевидно, $(\Omega L)_p^q$ — подпространство пространства $(TL)_p^q$.

Определение (факультативный материал). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_p^q$. Обозначим:
$$[A] = \sum_{\substack{\sigma_1 \in S_p \\ \sigma_2 \in S_q}} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)[A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}.$$
Геометрический объект $[A]$ называют результатом альтернирования тензора A.

Утверждение (факультативный материал). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_p^q$. *Тогда* $[A] \in (\Omega L)_p^q$.

Доказательство. Пусть: $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. Тогда:
$$\big[[A]\big]_{\sigma_1}^{\sigma_2} = \Bigg[\sum_{\substack{\sigma_3 \in S_p \\ \sigma_4 \in S_q}} \operatorname{sgn}(\sigma_3)\operatorname{sgn}(\sigma_4)[A]_{\sigma_3}^{\sigma_4}\Bigg]_{\sigma_1}^{\sigma_2} = \sum_{\substack{\sigma_3 \in S_p \\ \sigma_4 \in S_q}} \operatorname{sgn}(\sigma_3)\operatorname{sgn}(\sigma_4)[A]_{\sigma_1\sigma_3}^{\sigma_2\sigma_4} = [\sigma_5 = \sigma_1\sigma_3,\ \sigma_6 = \sigma_2\sigma_4] = \sum_{\substack{\sigma_5 \in S_p \\ \sigma_6 \in S_q}} \operatorname{sgn}(\sigma_1^{-1}\sigma_5)\operatorname{sgn}(\sigma_2^{-1}\sigma_6)[A]_{\sigma_5}^{\sigma_6} = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)\sum_{\substack{\sigma_5 \in S_p \\ \sigma_6 \in S_q}} \operatorname{sgn}(\sigma_5)\operatorname{sgn}(\sigma_6)[A]_{\sigma_5}^{\sigma_6} = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)[A].$$

□

3.4. Возможные обобщения

1. Можно рассматривать не наборы чисел из поля $\mathbb{K}$, а наборы математических объектов более сложной природы. Например, базис e линейного пространства L можно интерпретировать как тензор порядка $\binom{0}{1}$.

2. Можно рассматривать геометрические объекты, определённые не для всех базисов линейного пространства.

3. Можно рассматривать геометрические объекты, у которых разные индексы относятся к разным пространствам. Например, матрицу линейного оператора $A\colon L_1 \implies L_2$ можно интерпретировать как тензор порядка $\binom{0}{1}$ в пространстве L_1 и тензор порядка $\binom{1}{0}$ в пространстве L_2.

4. Можно рассматривать тензоры, у которых по крайней мере часть индексов преобразуется с помощью матриц $\left\{\overline{\alpha^i_{i'}(e,e')}\right\}^{i=\overline{1,N}}_{i'=\overline{1,N}}$, $\left\{\overline{\alpha^{i'}_i(e',e)}\right\}^{i'=\overline{1,N}}_{i=\overline{1,N}}$ (здесь: $\overline{\alpha^i_{i'}(e,e')}$ — число, комплексно-сопряжённое числу $\alpha^i_{i'}(e,e')$, $\overline{\alpha^{i'}_i(e',e)}$ — число, комплексно-сопряжённое числу $\alpha^{i'}_i(e',e)$). Например, матрица полуторалинейной формы преобразуется по закону $A_{i'j'}(e') = A_{ij}(e)\overline{\alpha^i_{i'}(e,e')}\alpha^j_{j'}(e,e')$.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.