Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 4. Общие сведения о линейных операторах

Замечание. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Обозначим, $\overline{\lambda} = \operatorname{Re}(\lambda) - i\operatorname{Im}(\lambda)$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим, $\overline{\lambda} = \lambda$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{Q}$. Обозначим, $\overline{\lambda} = \lambda$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $A\colon L_1 \to L_2$. Будем говорить, что A — линейный оператор, если: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1; $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при $x, y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$.
2. Пусть $A\colon L_1 \to L_2$. Будем говорить, что A — полулинейный оператор, если: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1; $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при $x, y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$.
3. Обозначим через $\operatorname{lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \to L_2$, A — линейный оператор.
4. Обозначим через $\operatorname{Lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор.
5. Пусть $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$. Обозначим, $\ker(A) = \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax = \theta_2\Big\}$. Множество $\ker(A)$ называют ядром оператора A. Очевидно, $\ker(A) = A^{-1}\Big\{\{\theta_2\}\Big\}$.
6. Пусть $A_1, A_2 \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$. Тогда: $(A_1 + A_2)x = A_1 x + A_2 x$ при $x \in \mathrm{D}(A_1) \cap \mathrm{D}(A_2)$.
7. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$. Тогда: $(\lambda A)x = \lambda A(x)$ при $x \in \mathrm{D}(A)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* $\operatorname{Lin}(L_1, L_2)$ *— подпространство пространства* $\operatorname{Fun}(L_1, L_2)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $\operatorname{Lin}(L_1, L_2) \subseteq \operatorname{Fun}(L_1, L_2)$.
2. Покажем, что $\Theta \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\Theta\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(\Theta) = L_1$, то $\mathrm{D}(\Theta)$ — подпространство пространства L_1.

   Пусть $x, y \in L_1$. Тогда: $\Theta(x+y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta x + \Theta y$.

   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda\theta_2 = \lambda\Theta(x)$. Итак, Θ — линейный оператор.
3. Пусть $A_1, A_2 \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$. Покажем, что $A_1 + A_2 \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $A_1 + A_2\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(A_1 + A_2) = L_1$, то $\mathrm{D}(A_1 + A_2)$ — подпространство пространства L_1.

   Пусть $x, y \in L_1$. Тогда: $(A_1 + A_2)(x+y) = A_1(x+y) + A_2(x+y) = (A_1 x + A_1 y) + (A_2 x + A_2 y) = (A_1 x + A_2 x) + (A_1 y + A_2 y) = (A_1 + A_2)x + (A_1 + A_2)y$.

   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $(A_1 + A_2)(\lambda x) = A_1(\lambda x) + A_2(\lambda x) = \lambda A_1(x) + \lambda A_2(x) = \lambda(A_1 x + A_2 x) = \lambda(A_1 + A_2)(x)$. Итак, $A_1 + A_2$ — линейный оператор.

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Покажем, что $\lambda A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\lambda A\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(\lambda A) = L_1$, то $\mathrm{D}(\lambda A)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x, y \in L_1$. Тогда: $(\lambda A)(x + y) = \lambda A(x + y) = \lambda(Ax + Ay) = \lambda A(x) + \lambda A(y) = (\lambda A)x + (\lambda A)y$.

Пусть: $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $(\lambda A)(\alpha x) = \lambda A(\alpha x) = \lambda\Big(\alpha A(x)\Big) = \alpha\Big(\lambda A(x)\Big) = \alpha(\lambda A)(x)$. Итак, λA — линейный оператор.

□

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1, L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда:*

1. $\mathrm{lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{fun}(L_1, L_2)$;
2. $\Theta \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(\Theta) = L_1$;
3. $A_1 + A_2 \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A_1 + A_2) = \mathrm{D}(A_1) \cap \mathrm{D}(A_2)$ *при* $A_1, A_2 \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$;
4. $\lambda A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(\lambda A) = \mathrm{D}(A)$ *при:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$.

Доказательство.

1. Очевидно, $\mathrm{lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{fun}(L_1, L_2)$.

2. Очевидно: $\Theta\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(\Theta) = L_1$. Так как $\mathrm{D}(\Theta) = L_1$, то $\mathrm{D}(\Theta)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x, y \in L_1$. Тогда: $\Theta(x + y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta x + \Theta y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda\theta_2 = \lambda\Theta(x)$. Итак, Θ — линейный оператор.

3. Пусть $A_1, A_2 \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Очевидно: $A_1 + A_2\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(A_1 + A_2) = \mathrm{D}(A_1) \cap \mathrm{D}(A_2)$. Так как $\mathrm{D}(A_1 + A_2) = \mathrm{D}(A_1) \cap \mathrm{D}(A_2)$, то $\mathrm{D}(A_1 + A_2)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x, y \in \mathrm{D}(A_1 + A_2)$. Тогда: $(A_1 + A_2)(x + y) = A_1(x + y) + A_2(x + y) = (A_1 x + A_1 y) + (A_2 x + A_2 y) = (A_1 x + A_2 x) + (A_1 y + A_2 y) = (A_1 + A_2)x + (A_1 + A_2)y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A_1 + A_2)$. Тогда: $(A_1 + A_2)(\lambda x) = A_1(\lambda x) + A_2(\lambda x) = \lambda A_1(x) + \lambda A_2(x) = \lambda(A_1 x + A_2 x) = \lambda(A_1 + A_2)(x)$. Итак, $A_1 + A_2$ — линейный оператор.

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Очевидно: $\lambda A\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(\lambda A) = \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(\lambda A) = \mathrm{D}(A)$, то $\mathrm{D}(\lambda A)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x, y \in \mathrm{D}(\lambda A)$. Тогда: $(\lambda A)(x + y) = \lambda A(x + y) = \lambda(Ax + Ay) = \lambda A(x) + \lambda A(y) = (\lambda A)x + (\lambda A)y$.

Пусть: $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(\lambda A)$. Тогда: $(\lambda A)(\alpha x) = \lambda A(\alpha x) = \lambda\Big(\alpha A(x)\Big) = \alpha\Big(\lambda A(x)\Big) = \alpha(\lambda A)(x)$. Итак, λA — линейный оператор.

□

Замечание (примеры). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, I — единичная функция на множестве L (здесь: $I(x) = x$ при $x \in L$). Покажем, что $I \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Очевидно, $I\colon L \implies L$. Так как $\mathrm{D}(I) = L$, то $\mathrm{D}(I)$ — подпространство пространства L.

Пусть $x, y \in L$. Тогда: $I(x + y) = x + y = Ix + Iy$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда: $I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x)$. Итак, I — линейный оператор.

2. Пусть: $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим: $\hat{A}(x) = Ax$ при $x \in \mathbb{K}^{N_1}$. Покажем, что $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{N_1}, \mathbb{K}^{N_2})$. Очевидно, $\hat{A}\colon \mathbb{K}^{N_1} \implies \mathbb{K}^{N_2}$. Так как $\mathrm{D}(\hat{A}) = \mathbb{K}^{N_1}$, то $\mathrm{D}(\hat{A})$ — подпространство пространства $\mathbb{K}^{N_1}$.

Пусть $x, y \in \mathbb{K}^{N_1}$. Тогда: $\hat{A}(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = \hat{A}x + \hat{A}y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^{N_1}$. Тогда: $\hat{A}(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda\hat{A}(x)$. Итак, $\hat{A}$ — линейный оператор. Оператор $\hat{A}$ называют оператором умножения на матрицу A.

3. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L. Обозначим: $U_e(\tilde{x}) = \tilde{x}^j e_j$ при $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$. Покажем, что $U_e \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, L)$. Очевидно, $U_e\colon \mathbb{K}^N \implies L$. Так как $\mathrm{D}(U_e) = \mathbb{K}^N$, то $\mathrm{D}(U_e)$ — подпространство пространства $\mathbb{K}^N$.

Пусть $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{K}^N$. Тогда: $U_e(\tilde{x} + \tilde{y}) = (\tilde{x} + \tilde{y})^j e_j = (\tilde{x}^j + \tilde{y}^j)e_j = (\tilde{x}^j e_j) + (\tilde{y}^j e_j) = U_e\tilde{x} + U_e\tilde{y}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$. Тогда: $U_e(\lambda\tilde{x}) = (\lambda\tilde{x})^j e_j = (\lambda\tilde{x}^j)e_j = \lambda(\tilde{x}^j e_j) = \lambda U_e(\tilde{x})$. Итак, U_e — линейный оператор.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1, L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$.

1. *$\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2$.*

2. *Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы.*

3. *Пусть $Q \subseteq L_1$. Тогда $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) \leqslant \operatorname{rank}(Q)$.*

4. *Пусть Q — подпространство пространства L_1. Тогда $A[Q]$ — подпространство пространства L_2.*

5. *Пусть: Q — подпространство пространства L_2. Тогда $A^{-1}\{Q\}$ — подпространство пространства L_1.*

6. *Пусть Q — подпространство пространства L_1. Тогда: $A|_Q \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A|_Q) = Q \cap \mathrm{D}(A)$, $\ker(A|_Q) = Q \cap \ker(A)$.*

Доказательство.

1. Так как $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, то $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$. Тогда: $A\theta_1 = A(0\theta_1) = 0A(\theta_1) = \theta_2$.

2. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы, то можно указать такие числа $C^1, \ldots, C^r \in \mathbb{K}$, что: $C^i x_i = \theta_1$, $\exists i = \overline{1,r}(C^i \neq 0)$. Тогда: $C^i A(x_i) = A(C^i x_i) = A\theta_1 = \theta_2$. Итак, $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы.

3. Обозначим: $r_1 = \operatorname{rank}(Q)$, $r_2 = \operatorname{rank}\big(A[Q]\big)$. Предположим, что $r_1 < r_2$. Тогда: $r_1 \in \mathbb{Z}_+$; $r_2 \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r_2 \geqslant r_1 + 1$. Так как r_2 — ранг множества $A[Q]$, то можно указать такие векторы $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$, что: $y_1, \ldots, y_{r_1+1} \in A[Q]$, $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно независимые векторы. Так как $y_1, \ldots, y_{r_1+1} \in A[Q]$, то можно указать такие векторы $x_1, \ldots, x_{r_1+1}$, что: $x_i \in Q$, $x_i \in \mathrm{D}(A)$, $y_i = Ax_i$ при $i = \overline{1, r_1+1}$. Так как r_1 — ранг множества Q, то $x_1, \ldots, x_{r_1+1}$ — линейно зависимые векторы. Тогда $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит выбору векторов $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$). Итак, $r_1 \geqslant r_2$.

4. Так как Q, $\mathrm{D}(A)$ — подпространства пространства L_1, то $Q \cap \mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1. Очевидно, $A[Q] \subseteq L_2$. Так как $\theta_1 \in Q \cap \mathrm{D}(A)$, то $A\theta_1 \in A[Q]$.

Пусть $y_1, y_2 \in A[Q]$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1, x_2 \in Q \cap \mathrm{D}(A)$, $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$. Следовательно: $y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2) \in A[Q]$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in A[Q]$. Тогда можно указать такой вектор x, что: $x \in Q \cap \mathrm{D}(A)$, $y = Ax$. Следовательно: $\lambda y = \lambda A(x) = A(\lambda x) \in A[Q]$. Итак, $A[Q]$ — подпространство пространства L_2.

5. Очевидно, $A^{-1}\{Q\} \subseteq L_1$. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2 \in Q$, то $\theta_1 \in A^{-1}\{Q\}$.

Пусть $x_1, x_2 \in A^{-1}\{Q\}$. Тогда: $x_1, x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1, Ax_2 \in Q$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \in Q$. Тогда $x_1 + x_2 \in A^{-1}\{Q\}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in A^{-1}\{Q\}$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax \in Q$. Следовательно: $\lambda x \in \mathrm{D}(A)$, $A(\lambda x) = \lambda A(x) \in Q$. Тогда $\lambda x \in A^{-1}\{Q\}$. Итак, $A^{-1}\{Q\}$ — подпространство пространства L_1.

6. Так как Q, $\mathrm{D}(A)$ — подпространства пространства L_1, то $Q \cap \mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1. Очевидно: $A|_Q : L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(A|_Q) = Q \cap \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A|_Q) = Q \cap \mathrm{D}(A)$, то $\mathrm{D}(A|_Q)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x, y \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Тогда: $A|_Q (x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = A|_Q x + A|_Q y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Тогда: $A|_Q (\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda\, A|_Q (x)$. Итак, $A|_Q$ — линейный оператор.

Очевидно:

$$\ker(A|_Q) = \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A|_Q) \wedge A|_Q\, x = \theta_2\Big\} = \Big\{x\colon x \in Q \wedge x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax = \theta_2\Big\} = \Big\{x\colon x \in Q \wedge x \in \ker(A)\Big\} = Q \cap \ker(A.)$$

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_1)$.

1. Так как: $\mathrm{R}(A) = A\Big[\mathrm{D}(A)\Big]$, $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, то $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2. Обозначим, $\mathrm{rank}(A) = \dim\Big(\mathrm{R}(A)\Big)$. Число $\mathrm{rank}(A)$ называют рангом оператора A. Очевидно:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\Big(\mathrm{R}(A)\Big) \leqslant \dim(L_2),$$
$$\mathrm{rank}(A) = \dim\Big(\mathrm{R}(A)\Big) = \dim\bigg(A\Big[\mathrm{D}(A)\Big]\bigg) \leqslant \dim\Big(\mathrm{D}(A)\Big) \leqslant \dim(L_1).$$

2. Так как: $\ker(A) = A^{-1}\Big\{\{\theta_2\}\Big\}$, $\{\theta_2\}$ — подпространство пространства L_2, то $\ker(A)$ — подпространство пространства L_1. Так как $\ker(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, то: $\dim\Big(\ker(A)\Big) \leqslant \dim\Big(\mathrm{D}(A)\Big) \leqslant \dim(L_1)$.

3. Рассмотрим уравнение:

$$Ax = \theta_2, \quad x \in \mathrm{D}(A). \tag{1}$$

Очевидно, $\ker(A)$ — множество всех решений уравнения (1).

Пусть $\dim\Big(\ker(A)\Big) = 0$. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

Пусть: $m \in \mathbb{N}$, $\dim\Big(\ker(A)\Big) = m$. Тогда можно указать такие векторы $e_1, \ldots, e_m$, что: $e_1, \ldots, e_m \in \ker(A)$, $e_1, \ldots, e_m$ — линейно независимые векторы. Так как $\dim\Big(\ker(A)\Big) = m$, то $e_1, \ldots, e_m$ — базис подпространства $\ker(A)$. Тогда $\ker(A) = L(e_1, \ldots, e_m)$. Упорядоченный набор $(e_1, \ldots, e_m)$ называют фундаментальной совокупностью решений (ФСР) уравнения (1).

4. Пусть $y \in L_2$. Рассмотрим уравнение:

$$Ax = y, \quad x \in \mathrm{D}(A). \tag{2}$$

Обозначим через Q множество всех решений уравнения (2). Очевидно, $Q = A^{-1}\Big\{\{y\}\Big\}$.

Пусть $x_1, x_2 \in Q$. **Покажем, что** $x_1 - x_2 \in \ker(A)$. Так как $x_1, x_2 \in Q$, то: $x_1, x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$. Тогда: $x_1 - x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = y - y = \theta_2$. Следовательно, $x_1 - x_2 \in \ker(A)$.

Пусть: $x_0 \in Q$, $\tilde{x} \in \ker(A)$. **Покажем, что** $x_0 + \tilde{x} \in Q$. Так как: $x_0 \in Q$, $\tilde{x} \in \ker(A)$, то: $x_0, \tilde{x} \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_0 = y$, $A\tilde{x} = \theta_2$. Тогда: $x_0 + \tilde{x} \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_0 + \tilde{x}) = Ax_0 + A\tilde{x} = y + \theta_2 = y$. Следовательно, $x_0 + \tilde{x} \in Q$.

Пусть $x_0 \in Q$. **Покажем, что** $Q = \{x_0\} + \ker(A)$.

Пусть $x \in Q$. Так как $x_0, x \in Q$, то: $x = x_0 + (x - x_0) \in \{x_0\} + \ker(A)$.

Пусть $x \in \{x_0\} + \ker(A)$. Тогда можно указать такой вектор $\tilde{x}$, что: $\tilde{x} \in \ker(A)$, $x = x_0 + \tilde{x}$. Так как: $x_0 \in Q$, $\tilde{x} \in \ker(A)$, $x = x_0 + \tilde{x}$, то $x \in Q$. Итак, $Q = \{x_0\} + \ker(A)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*. Оператор* A *обратим тогда и только тогда, когда* $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

Доказательство.

1. Пусть A — обратимый оператор. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2$, то $\theta_1 \in \ker(A)$. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = \theta_2$. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2$, A — обратимый оператор, то $x = \theta_1$. Итак, $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

2. Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Пусть: $x_1, x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = Ax_2$. Тогда: $x_1 - x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = \theta_2$. Следовательно, $x_1 - x_2 \in \ker(A)$. Так как $\ker(A) = \{\theta_1\}$, то $x_1 - x_2 = \theta_1$. Тогда $x_1 = x_2$. Итак, A — обратимый оператор.

□

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* A *— обратимый оператор.*

1. $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$*,* $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A)$.
2. *Пусть:* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы. Тогда* $Ax_1, \ldots, Ax_r$ *— линейно независимые векторы.*
3. *Пусть* $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$*. Тогда* $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) = \operatorname{rank}(Q)$.

Доказательство.

1. Очевидно: $A^{-1}\colon L_2 \to L_1$, $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A)$, то $\mathrm{D}(A^{-1})$ — подпространство пространства L_2.

Пусть $y_1, y_2 \in \mathrm{D}(A^{-1})$. Тогда:

$$A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}\Big(A\big(A^{-1}y_1\big) + A\big(A^{-1}y_2\big)\Big) =$$
$$A^{-1}\Big(A\big(A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2\big)\Big) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in \mathrm{D}(A^{-1})$. Тогда:

$$A^{-1}(\lambda y) = A^{-1}\Big(\lambda A\big(A^{-1}y\big)\Big) = A^{-1}\Big(A\big(\lambda A^{-1}(y)\big)\Big) = \lambda A^{-1}(y).$$

Итак, A^{-1} — линейный оператор.

2. Так как: $x_i \in \mathrm{D}(A)$ при $i = \overline{1, r}$, то: $Ax_i \in \mathrm{D}(A^{-1})$, $x_i = A^{-1}(Ax_i)$ при $i = \overline{1, r}$. Предположим, что $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы (что противоречит условию). Итак, $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно независимые векторы.

3. Так как: $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\mathrm{D}(A^{-1}A) = \mathrm{D}(A)$, $(A^{-1}A)(x) = x$ при $x \in \mathrm{D}(A)$, то $Q = (A^{-1}A)[Q]$. Тогда: $A[Q] \subseteq \mathrm{D}(A^{-1})$, $Q = (A^{-1}A)[Q] = A^{-1}\big[A[Q]\big]$. Следовательно, $\operatorname{rank}(Q) \leqslant \operatorname{rank}\big(A[Q]\big)$. Так как: $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) \leqslant \operatorname{rank}(Q)$, $\operatorname{rank}(Q) \leqslant \operatorname{rank}\big(A[Q]\big)$, то $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) = \operatorname{rank}(Q)$.

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор. Тогда:

$$\operatorname{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\Big(A\big[\mathrm{D}(A)\big]\Big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big).$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \neq +\infty$*. Тогда:* $\operatorname{rank}(A) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$.

Доказательство. Так как: $\ker(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \neq +\infty$, то можно указать линейное дополнение Q подпространства $\ker(A)$ до подпространства $\mathrm{D}(A)$.

Рассмотрим оператор $A|_Q$. Так как $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, то: $A|_Q \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A|_Q) = Q \cap \mathrm{D}(A) = Q$.

Так как $\ker(A)$, Q — линейно независимые подпространства, то: $\ker(A|_Q) = Q \cap \ker(A) = \{\theta_1\}$. Тогда $A|_Q$ — обратимый оператор.

Покажем, что $\mathrm{R}(A|_Q) = \mathrm{R}(A)$. Пусть $y \in \mathrm{R}(A|_Q)$. Тогда: $y \in \mathrm{R}(A|_Q) = A[Q] \subseteq \mathrm{R}(A)$. Пусть $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда можно указать такой вектор x, что: $x \in \mathrm{D}(A)$, $y = Ax$. Так как $\mathrm{D}(A) = \ker(A) + Q$, то можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1 \in \ker(A)$, $x_2 \in Q$, $x = x_1 + x_2$. Тогда: $y = Ax = A(x_1 + x_2) = Ax_2 = A|_Q\, x_2 \in \mathrm{R}(A|_Q)$.

Так как $A|_Q$ — обратимый оператор, то: $\operatorname{rank}(A) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A|_Q)\bigr) = \dim(Q) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$. □

Теорема (1-я теорема Фредгольма). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(L_1) = \dim(L_2)$*,* $\dim(L_2) \neq +\infty$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*. Тогда:* $\mathrm{R}(A) = L_2 \iff \ker(A) = \{\theta_1\}$.

Доказательство.

1. Пусть $\mathrm{R}(A) = L_2$. Так как $\dim(L_1) \neq +\infty$, то: $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim(L_1) - \dim(L_2) = 0$. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$.
2. Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Тогда A — обратимый оператор. Следовательно: $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) = \dim(L_1) = \dim(L_2)$. Так как $\dim(L_2) \neq +\infty$, то $\mathrm{R}(A) = L_2$.

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Покажем, что $\ker(U_e) = \{\tilde{\theta}\}$. Так как: $\tilde{\theta} \in \mathbb{K}^N$, $U_e\tilde{\theta} = \theta$, то $\tilde{\theta} \in \ker(U_e)$. Пусть $\tilde{x} \in \ker(U_e)$. Тогда: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $\tilde{x}^i e_i = U_e\tilde{x} = \theta$. Так как $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы, то $\tilde{x} = \tilde{\theta}$. Так как $\ker(U_e) = \{\tilde{\theta}\}$, то U_e — обратимый оператор.

Так как: $\dim(\mathbb{K}^N) = N = \dim(L)$, $\dim(L) = N \neq +\infty$, $U_e \in \operatorname{Lin}(\mathbb{K}^N, L)$, $\ker(U_e) = \{\tilde{\theta}\}$, то $\mathrm{R}(U_e) = L$.

Так как: $U_e \in \operatorname{lin}(\mathbb{K}^N, L)$, $\mathrm{D}(U_e) = \mathbb{K}^N$, $\mathrm{R}(U_e) = L$, U_e — обратимый оператор, то U_e — изоморфизм $\mathbb{K}^N$ на L.

Так как: $U_e \in \operatorname{lin}(\mathbb{K}^N, L)$, $\mathrm{D}(U_e) = \mathbb{K}^N$, $\mathrm{R}(U_e) = L$, U_e — обратимый оператор, то: $U_e^{-1} \in \operatorname{lin}(L, \mathbb{K}^N)$, $\mathrm{D}(U_e^{-1}) = L$, $\mathrm{R}(U_e^{-1}) = \mathbb{K}^N$, U_e^{-1} — обратимый оператор. Тогда U_e^{-1} — изоморфизм L на $\mathbb{K}^N$. Очевидно: $U_e^{-1}x = [x](e)$ при $x \in L$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2*,* L_3 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$.

1. *Пусть:* $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \operatorname{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $BA \in \operatorname{Lin}(L_1, L_3)$.
2. *Пусть:* $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B_1, B_2 \in \operatorname{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$.

3. *Пусть:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $(\lambda B)A = \lambda(BA)$.

4. *Пусть:* $A_1, A_2 \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$.

5. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $B(\lambda A) = \lambda(BA)$.

Доказательство.
1. Очевидно, $BA\colon L_1 \implies L_3$. Так как: $\mathrm{D}(BA) = L_1$, то $\mathrm{D}(BA)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x, y \in L_1$. Тогда: $(BA)(x+y) = B\Big(A(x+y)\Big) = B\Big(Ax+Ay\Big) = B(Ax)+B(Ay) = (BA)x + (BA)y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $(BA)(\lambda x) = B\Big(A(\lambda x)\Big) = B\Big(\lambda A(x)\Big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x)$. Итак, BA — линейный оператор.

2. Пусть $x \in L_1$. Тогда: $\Big((B_1+B_2)A\Big)x = (B_1+B_2)(Ax) = B_1(Ax) + B_2(Ax) = (B_1A)x + (B_2A)x = (B_1A + B_2A)x$.

3. Пусть $x \in L_1$. Тогда: $\Big((\lambda B)A\Big)x = (\lambda B)(Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \Big(\lambda(BA)\Big)x$.

4. Пусть $x \in L_1$. Тогда: $\Big(B(A_1+A_2)\Big)x = B\Big((A_1+A_2)x\Big) = B\Big(A_1x + A_2x\Big) = B(A_1x) + B(A_2x) = (BA_1)x + (BA_2)x = (BA_1 + BA_2)x$.

5. Пусть $x \in L_1$. Тогда: $\Big(B(\lambda A)\Big)x = B\Big((\lambda A)x\Big) = B\Big(\lambda A(x)\Big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \Big(\lambda(BA)\Big)x$.

$\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2, L_3 — *линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$.

1. *Пусть:* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда:* $BA \in \mathrm{lin}(L_1, L_3)$, $\mathrm{D}(BA) = \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\Big\}$.

2. *Пусть:* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B_1, B_2 \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда:* $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$.

3. *Пусть:* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $(\lambda B)A = \lambda(BA)$.

4. *Пусть:* $A_1, A_2 \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда:* $\mathrm{D}(BA_1 + BA_2) \subseteq \mathrm{D}\Big(B(A_1 + A_2)\Big)$, $BA_1 + BA_2 = B(A_1 + A_2)|_{\mathrm{D}(BA_1 + BA_2)}$.

5. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда:* $\mathrm{D}\Big(\lambda(BA)\Big) \subseteq \mathrm{D}\Big(B(\lambda A)\Big)$, $\lambda(BA) = B(\lambda A)|_{\mathrm{D}(\lambda(BA))}$.

6. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $B(\lambda A) = \lambda(BA)$.

Доказательство.
1. Очевидно: $BA\colon L_1 \to L_3$, $\mathrm{D}(BA) = \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\Big\} = A^{-1}\Big\{\mathrm{D}(B)\Big\}$. Так как: $\mathrm{D}(BA) = A^{-1}\Big\{\mathrm{D}(B)\Big\}$, $\mathrm{D}(B)$ — подпространство пространства L_2, то $\mathrm{D}(BA)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x, y \in \mathrm{D}(BA)$. Тогда: $(BA)(x+y) = B\Big(A(x+y)\Big) = B\Big(Ax+Ay\Big) = B(Ax) + B(Ay) = (BA)x + (BA)y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(BA)$. Тогда: $(BA)(\lambda x) = B\Big(A(\lambda x)\Big) = B\Big(\lambda A(x)\Big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x)$. Итак, BA — линейный оператор.

2. Очевидно:

$$\mathrm{D}\Big((B_1+B_2)A\Big) = \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_1+B_2)\Big\} =$$
$$\Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_1) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_2)\Big\} =$$
$$\Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(B_1A) \wedge x \in \mathrm{D}(B_2A)\Big\} = \mathrm{D}(B_1A + B_2A).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\Big((B_1+B_2)A\Big)$. Тогда: $\Big((B_1+B_2)A\Big)x = (B_1+B_2)(Ax) = B_1(Ax)+B_2(Ax) = (B_1A)x+(B_2A)x = (B_1A+B_2A)x$.

3. Очевидно:

$$\mathrm{D}\Big((\lambda B)A\Big) = \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(\lambda B)\Big\} =$$
$$\Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\Big\} = \mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\Big(\lambda(BA)\Big).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\Big((\lambda B)A\Big)$. Тогда: $\Big((\lambda B)A\Big)x = (\lambda B)(Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \Big(\lambda(BA)\Big)x$.

4. Пусть $x \in \mathrm{D}(BA_1 + BA_2)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(BA_1)$, $x \in \mathrm{D}(BA_2)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A_1)$, $A_1x \in \mathrm{D}(B)$, $x \in \mathrm{D}(A_2)$, $A_2x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A_1)$, $x \in \mathrm{D}(A_2)$, $A_1x + A_2x \in \mathrm{D}(B)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A_1 + A_2)$, $(A_1 + A_2)x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда $x \in \mathrm{D}\Big(B(A_1 + A_2)\Big)$. Итак, $\mathrm{D}(BA_1 + BA_2) \subseteq \mathrm{D}\Big(B(A_1 + A_2)\Big)$.

Пусть $x \in \mathrm{D}(BA_1 + BA_2)$. Тогда: $(BA_1 + BA_2)x = (BA_1)x + (BA_2)x = B(A_1x) + B(A_2x) = B\Big(A_1x + A_2x\Big) = B\Big((A_1 + A_2)x\Big) = \Big(B(A_1 + A_2)\Big)x$.

5. Пусть $x \in \mathrm{D}\Big(\lambda(BA)\Big)$. Тогда $x \in \mathrm{D}(BA)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax \in \mathrm{D}(B)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $\lambda A(x) \in \mathrm{D}(B)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(\lambda A)$, $(\lambda A)x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда $x \in \mathrm{D}\Big(B(\lambda A)\Big)$. Итак, $\mathrm{D}\Big(\lambda(BA)\Big) \subseteq \mathrm{D}\Big(B(\lambda A)\Big)$.

Пусть $x \in \mathrm{D}\Big(\lambda(BA)\Big)$. Тогда: $\Big(\lambda(BA)\Big)x = \lambda(BA)(x) = \lambda B(Ax) = B\Big(\lambda A(x)\Big) = B\Big((\lambda A)x\Big) = \Big(B(\lambda A)\Big)x$.

6. Очевидно:

$$\mathrm{D}\Big(B(\lambda A)\Big) = \Big\{x \colon x \in \mathrm{D}(\lambda A) \wedge (\lambda A)x \in \mathrm{D}(B)\Big\} =$$
$$\Big\{x \colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge \lambda A(x) \in \mathrm{D}(B)\Big\} = \Big\{x \colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\Big\} =$$
$$\mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\Big(\lambda(BA)\Big).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\Big(B(\lambda A)\Big)$. Тогда: $\Big(B(\lambda A)\Big)x = B\Big((\lambda A)x\Big) = B\Big(\lambda A(x)\Big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \Big(\lambda(BA)\Big)x$.

□

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.