Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 5. Матрица линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный (полулинейный) оператор, e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2. Обозначим: $[A]_i^j(f,e) = [Ae_i]^j(f)$ при: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Матрицу $[A](f,e)$ называют матрицей линейного (полулинейного) оператора A в базисах f, e.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A\colon L \implies L$, A — линейный (полулинейный) оператор, e — базис пространства L. Обозначим: $[A]_i^j(e) = [Ae_i]^j(e)$ при $i, j = \overline{1, N}$. Матрицу $[A](e)$ называют матрицей линейного (полулинейного) оператора A в базисе e.

Замечание (примеры). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть: L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2. **Покажем, что** $[\Theta](f,e) = \tilde{\Theta}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда: $[\Theta]_i^j(f,e) = [\Theta e_i]^j(f) = [\theta_2]^j(f) = 0$.
2. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e, f — базисы пространства L. **Покажем, что** $[I](f,e) = \alpha(f,e)$. Пусть $i, j = \overline{1, N}$. Тогда: $[I]_i^j(f,e) = [Ie_i]^j(f) = [e_i]^j(f) = \alpha_i^j(f,e)$.
3. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L. Тогда: $[I](e) = [I](e,e) = \alpha(e,e) = \tilde{I}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*.*

1. *Пусть:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $Q = [A](f,e)$*. Тогда:* $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*,* $Ax = Q_i^j [x]^i(e) f_j$ *при* $x \in L_1$*.*

2. *Пусть:* $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*,* $Ax = Q_i^j [x]^i(e) f_j$ *при* $x \in L_1$*. Тогда:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $Q = [A](f,e)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = A\Big([x]^i(e) e_i\Big) = [x]^i(e) A(e_i) = [x]^i(e)\Big(Q_i^j f_j\Big) = Q_i^j [x]^i(e) f_j.$$

2. Очевидно, $A\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x, y \in L_1$. Тогда:

$$A(x+y) = Q_i^j [x+y]^i(e) f_j = Q_i^j \Big([x]^i(e) + [y]^i(e) \Big) f_j = Q_i^j [x]^i(e) f_j + Q_i^j [y]^i(e) f_j = Ax + Ay.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$A(\lambda x) = Q_i^j [\lambda x]^i(e) f_j = Q_i^j \Big(\lambda [x]^i(e) \Big) f_j = \lambda \Big(Q_i^j [x]^i(e) f_j \Big) = \lambda A(x).$$

Итак, A — линейный оператор.

Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$Ae_i = Q_k^j [e_i]^k(e) f_j = Q_k^j \delta_i^k f_j = Q_i^j f_j.$$

Следовательно: $[A]_i^j(f, e) = Q_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$.

$\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*.*

1. *Пусть:* $A\colon L_1 \implies L_2$*,* A *— полулинейный оператор,* $Q = [A](f, e)$*. Тогда:* $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*,* $Ax = Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j$ *при* $x \in L_1$*.*

2. *Пусть:* $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*,* $Ax = Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j$ *при* $x \in L_1$*. Тогда:* $A\colon L_1 \implies L_2$*,* A *— полулинейный оператор,* $Q = [A](f, e)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = A\Big([x]^i(e) e_i \Big) = \overline{[x]^i(e)} A(e_i) = \overline{[x]^i(e)} \Big(Q_i^j f_j \Big) = Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j.$$

2. Очевидно, $A\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x, y \in L_1$. Тогда:

$$A(x+y) = Q_i^j \overline{[x+y]^i(e)} f_j = Q_i^j \Big(\overline{[x]^i(e)} + \overline{[y]^i(e)} \Big) f_j = Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j + Q_i^j \overline{[y]^i(e)} f_j = Ax + Ay.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$A(\lambda x) = Q_i^j \overline{[\lambda x]^i(e)} f_j = Q_i^j \Big(\overline{\lambda} \cdot \overline{[x]^i(e)} \Big) f_j = \overline{\lambda} \Big(Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j \Big) = \overline{\lambda} A(x).$$

Итак, A — полулинейный оператор.

Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$Ae_i = Q_k^j \overline{[e_i]^k(e)} f_j = Q_k^j \delta_i^k f_j = Q_i^j f_j.$$

Следовательно: $[A]_i^j(f, e) = Q_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$.

$\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2, $Q = [A](e, f)$.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = Q_i^j [x]^i(e) f_j = \Big(Q[x](e) \Big)^j f_j = U_f \Big(\hat{Q}(U_e^{-1} x) \Big) = (U_f \hat{Q} U_e^{-1}) x.$$

Итак, $A = U_f \hat{Q} U_e^{-1}$.

2. Очевидно:

$$\mathrm{R}(A) = A[L_1] = (U_f\hat{Q}U_e^{-1})[L_1] = U_f\Big[\hat{Q}\Big[U_e^{-1}[L_1]\Big]\Big] = U_f\Big[\hat{Q}\Big[\mathbb{K}^{N_1}\Big]\Big] =$$
$$U_f\Big[\Big\{Q\tilde{x}\colon \tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_1}\Big\}\Big] = U_f\Big[\Big\{Q_i\tilde{x}^i\colon \tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_1}\Big\}\Big] =$$
$$U_f\Big[L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\Big] = L(U_fQ_1, \ldots, U_fQ_{N_1}).$$

Тогда:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\Big(\mathrm{R}(A)\Big) = \dim\Big(U_f\Big[L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\Big]\Big) =$$
$$\dim\Big(L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\Big) = \mathrm{rank}(Q).$$

3. Очевидно:

$$\ker(A) = A^{-1}\Big\{\{\theta_2\}\Big\} = (U_f\hat{Q}U_e^{-1})^{-1}\Big\{\{\theta_2\}\Big\} =$$
$$(U_e^{-1})^{-1}\bigg\{\hat{Q}^{-1}\Big\{U_f^{-1}\Big\{\{\theta_2\}\Big\}\Big\}\bigg\} = U_e\Big[\hat{Q}^{-1}\Big\{\{\tilde{\theta}_2\}\Big\}\Big] = U_e\Big[\ker(\hat{Q})\Big].$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{N_1}, \mathbb{K}^{N_2})$.

Обозначим: $e_1 = \{\delta_1^j\}^{j=\overline{1,N_1}}, \ldots, e_{N_1} = \{\delta_{N_1}^j\}^{j=\overline{1,N_1}}$. Тогда: e — базис пространства $\mathbb{K}^{N_1}$, $U_e = I_1$.

Обозначим: $f_1 = \{\delta_1^j\}^{j=\overline{1,N_2}}, \ldots, f_{N_2} = \{\delta_{N_2}^j\}^{j=\overline{1,N_2}}$. Тогда: f — базис пространства $\mathbb{K}^{N_2}$, $U_f = I_2$.

Обозначим, $Q = [A](f,e)$. Тогда: $A = U_f\hat{Q}U_e^{-1} = \hat{Q}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*.*

1. *Пусть:* $A, B \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $[A](f,e) = [B](f,e)$*. Тогда* $A = B$*.*
2. *Пусть* $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*. Тогда можно указать такой оператор* A*, что:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $[A](f,e) = Q$*.*
3. *Пусть* $A, B \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*. Тогда* $[A+B](f,e) = [A](f,e) + [B](f,e)$*.*
4. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*. Тогда* $[\lambda A](f,e) = \lambda[A](f,e)$*.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = [A]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j = [B]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j = Bx.$$

2. Обозначим: $Ax = Q_i^j[x]^i(e)f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](e,f) = Q$.
3. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$(A+B)e_i = Ae_i + Be_i = [A]_i^j(f,e)f_j + [B]_i^j(f,e)f_j =$$
$$\Big([A]_i^j(f,e) + [B]_i^j(f,e)\Big)f_j.$$

Следовательно: $[A+B]_i^j = [A]_i^j(f,e) + [B]_i^j(f,e)$ при $j = \overline{1, N_2}$.

4. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$(\lambda A)e_i = \lambda A(e_i) = \lambda\Big([A]_i^j(f,e)f_j\Big) = \Big(\lambda[A]_i^j(f,e)\Big)f_j.$$

Следовательно: $[\lambda A]_i^j = \lambda[A]_i^j(f,e)$ при $j = \overline{1, N_2}$.

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$. Так как $\mathrm{Lin}(L_1, L_2) \approx \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, то $\dim\Big(\mathrm{Lin}(L_1, L_2)\Big) = N_1 N_2$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; L_3 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_3 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_3) = N_3$; $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$, e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2, g — базис пространства L_3. Тогда $[BA](g,e) = [B](g,f)[A](f,e)$.*

Доказательство. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$(BA)e_i = B(Ae_i) = B\Big([A]_i^j(f,e)f_j\Big) = [A]_i^j(f,e)B(f_j) =$$
$$[A]_i^j(f,e)\Big([B]_j^k(g,f)g_k\Big) = \Big([B]_j^k(g,f)[A]_i^j(f,e)\Big)g_k.$$

Следовательно: $[BA]_i^k(g,e) = [B]_j^k(g,f)[A]_i^j(f,e)$ при $k = \overline{1, N_3}$. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, e, e' — базисы пространства L_1, f, f' — базисы пространства L_2. Тогда: $[A](f',e') = \alpha(f',f)[A](f,e)\alpha(e,e')$; $[A]_{i'}^{j'}(f',e') = \alpha_j^{j'}(f',f)[A]_i^j(f,e)\alpha_{i'}^i(e,e')$ при: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$.*

Доказательство. Пусть: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$[A]_{i'}^{j'}(f',e') = [Ae'_{i'}]^{j'}(f') = \Big[A\Big(\alpha_{i'}^i(e,e')e_i\Big)\Big]^{j'}(f') = \alpha_{i'}^i(e,e')[Ae_i]^{j'}(f') =$$
$$\alpha_{i'}^i(e,e')\Big(\alpha_j^{j'}(f',f)[Ae_i]^j(f)\Big) = \alpha_j^{j'}(f',f)[A]_i^j(f,e)\alpha_{i'}^i(e,e').$$

□

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A\colon L_1 \implies L_2$, A — полулинейный оператор, e, e' — базисы пространства L_1, f, f' — базисы пространства L_2. Тогда: $[A](f',e') = \alpha(f',f)[A](f,e)\overline{\alpha(e,e')}$; $[A]_{i'}^{j'}(f',e') = \alpha_j^{j'}(f',f)[A]_i^j(f,e)\overline{\alpha_{i'}^i(e,e')}$ при: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$.*

Доказательство. Пусть: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$[A]_{i'}^{j'}(f',e') = [Ae'_{i'}]^{j'}(f') = \Big[A\Big(\alpha_{i'}^i(e,e')e_i\Big)\Big]^{j'}(f') = \overline{\alpha_{i'}^i(e,e')}[Ae_i]^{j'}(f') =$$
$$\overline{\alpha_{i'}^i(e,e')}\Big(\alpha_j^{j'}(f',f)[Ae_i]^j(f)\Big) = \alpha_j^{j'}(f',f)[A]_i^j(f,e)\overline{\alpha_{i'}^i(e,e')}.$$

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$.

Пусть $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\Big\{[A](f,e)\Big\}_{f,e}$ — тензор порядка $\binom{1}{0}$ в пространстве L_2 и тензор порядка $\binom{0}{1}$ в пространстве L_1.

Пусть: $A, B \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $\Big\{[A](f,e)\Big\}_{f,e} = \Big\{[B](f,e)\Big\}_{f,e}$. **Покажем, что** $A = B$. Выберем базис e_0 пространства L_1 и базис f_0 пространства L_2. Так как $\Big\{[A](f,e)\Big\}_{f,e} = \Big\{[B](f,e)\Big\}_{f,e}$, то $[A](f_0, e_0) = [B](f_0, e_0)$. Тогда $A = B$.

Пусть Q — тензор порядка $\binom{1}{0}$ в пространстве L_2 и тензор порядка $\binom{0}{1}$ в пространстве L_1. **Покажем, что** можно указать такой оператор A, что: $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $\Big\{[A](f,e)\Big\}_{f,e} = Q$. Выберем базис e_0 пространства L_1 и базис f_0 пространства L_2. Тогда можно указать такой оператор A, что: $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](f_0, e_0) = Q(f_0, e_0)$. Так как $\Big\{[A](f,e)\Big\}_{f,e}$, Q — тензоры порядка $\binom{1}{0}$ в пространстве L_2 и тензоры порядка $\binom{0}{1}$ в пространстве L_1, то $\Big\{[A](f,e)\Big\}_{f,e} = Q$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

Пусть $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$. Очевидно, $\Big\{[A](e)\Big\}_e \in (TL)^1_1$.

Пусть: $A, B \in \operatorname{Lin}(L, L)$, $\Big\{[A](e)\Big\}_e = \Big\{[B](e)\Big\}_e$. **Покажем, что** $A = B$. Выберем базис e_0 пространства L. Так как $\Big\{[A](e)\Big\}_e = \Big\{[B](e)\Big\}_e$, то $[A](e_0) = [B](e_0)$. Тогда $A = B$.

Пусть $Q \in (TL)^1_1$. **Покажем, что** можно указать такой оператор A, что: $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, $\Big\{[A](e)\Big\}_e = Q$. Выберем базис e_0 пространства L. Тогда можно указать такой оператор A, что: $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, $[A](e_0) = Q(e_0)$. Так как $\Big\{[A](e)\Big\}_e, Q \in (TL)^1_1$, то $\Big\{[A](e)\Big\}_e = Q$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1), \dim(L_2) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2, $Q = [A](f, e)$. **Покажем, что:** $\ker(A) = \{\theta_1\} \iff \det(Q) \neq 0$.

Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Тогда: $\ker(\hat{Q}) = U_e^{-1}\Big[\ker(A)\Big] = \{\tilde{\theta}\}$. Следовательно, $\det(Q) \neq 0$.

Пусть $\det(Q) \neq 0$. Тогда $\ker(\hat{Q}) = \{\tilde{\theta}\}$. Следовательно: $\ker(A) = U_e\Big[\ker(\hat{Q})\Big] = \{\theta\}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$.

Так как $\Big\{[A](e)\Big\}_e \in (TL)^1_1$, то: $\operatorname{tr}\Big([A](e')\Big) = \operatorname{tr}\Big([A](e)\Big)$, $\det\Big([A](e')\Big) = \det\Big([A](e)\Big)$ при: e, e' — базисы пространства L. Выберем базис e_0 пространства L. Обозначим: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\Big([A](e_0)\Big)$, $\det(A) = \det\Big([A](e_0)\Big)$.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.