Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 6. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

6.1. Инвариантные подпространства линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L, L)$. Будем говорить, что Q — инвариантное подпространство оператора A, если: Q — подпространство пространства L, $A[Q] \subseteq Q$.

Замечание. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L, L)$, $r \geqslant 2$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — инвариантные подпространства оператора A. **Покажем, что** $Q_1 + \cdots + Q_r$ — инвариантное подпространство оператора A. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L, то $Q_1 + \cdots + Q_r$ — подпространство пространства L. Пусть $x \in Q_1 + \cdots + Q_r$. Тогда можно указать такие векторы $x_1, \ldots, x_r$, что: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x = x_1 + \cdots + x_r$. Следовательно: $Ax = A(x_1 + \cdots + x_r) = Ax_1 + \cdots + Ax_r \in Q_1 + \cdots + Q_r$.

Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L, L)$, Q — инвариантное подпространство оператора A. **Очевидно:** $A|_Q \in \operatorname{lin}(Q, Q)$, $\mathrm{D}(A|_Q) = Q \cap \mathrm{D}(A)$.

Пусть $A, B \in \operatorname{Lin}(L, L)$. Обозначим, $[A, B] = AB - BA$. Оператор $[A, B]$ называют коммутатором операторов A и B. Очевидно, $[A, B] = \Theta \iff AB = BA$. Будем говорить, что операторы A и B коммутируют, если $AB = BA$. Пусть $AB = BA$. **Покажем, что** $\ker(B)$, $\mathrm{R}(B)$ — инвариантные подпространства оператора A. Очевидно, $\ker(B)$, $\mathrm{R}(B)$ — подпространства пространства L. Пусть $x \in \ker(B)$. Тогда: $x \in L$, $Bx = \theta$. Следовательно: $Ax \in L$, $B(Ax) = A(Bx) = \theta$. Тогда $Ax \in \ker(B)$. Пусть $x \in \mathrm{R}(B)$. Тогда можно указать такой вектор u, что: $u \in L$, $x = Bu$. Следовательно: $Ax = A(Bu) = B(Au) \in \mathrm{R}(B)$.

2. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$; $r = \overline{1, N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $Q = L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$.

Покажем, что множество Q является инвариантным подпространством оператора A тогда и только тогда, когда: $\tilde{A}^j_{i_k} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$.

Пусть: Q — инвариантное подпространство оператора A; $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Так как $e_{i_k} \in Q$, то $Ae_{i_k} \in Q$. Тогда: $\tilde{A}^j_{i_k} = [Ae_{i_k}]^j(e) = 0$.

Пусть: $\tilde{A}^j_{i_k} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Очевидно, Q — подпространство пространства L. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$Ax = \tilde{A}^j_n [x]^n(e) e_j = \sum_{k=1}^{r} \tilde{A}^j_{i_k} [x]^{i_k}(e) e_j = \sum_{k, m = \overline{1, r}} \tilde{A}^{i_m}_{i_k} [x]^{i_k}(e) e_{i_m} \in Q.$$

Пусть Q — инвариантное подпространство оператора A. **Покажем, что:** $[A|_Q]^m_k(e_{i_1},\ldots,e_{i_r}) = \tilde{A}^{i_m}_{i_k}$ при $k,m=\overline{1,r}$. Пусть $k=\overline{1,r}$. Так как: $\tilde{A}^j_{i_k}=0$ при: $j=\overline{1,N}$, $j\notin\{i_1,\ldots,i_r\}$, то:

$$A|_Q\, e_{i_k} = Ae_{i_k} = \tilde{A}^j_{i_k}e_j = \sum_{m=1}^{r}\tilde{A}^{i_m}_{i_k}e_{i_m}.$$

Тогда: $[A|_Q]^m_k(e_{i_1},\ldots,e_{i_r}) = \tilde{A}^{i_m}_{i_k}$ при $m=\overline{1,r}$.

6.2. Собственные подпространства линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A\in\operatorname{lin}(L,L)$.

1. Будем говорить, что λ — регулярная точка оператора A, если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, $\mathrm{R}(A-\lambda I)=L$.

Очевидно, λ является регулярной точкой оператора A тогда и только тогда, когда: $\lambda\in\mathbb{K}$; уравнение: $x\in\mathrm{D}(A)$, $Ax-\lambda x=y$ имеет единственное решение для любого $y\in L$.

2. Будем говорить, что λ — точка спектра оператора A, если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}\vee\mathrm{R}(A-\lambda I)\neq L$.

3. Будем говорить, что λ — точка непрерывного спектра оператора A, если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, $\mathrm{R}(A-\lambda I)\neq L$.

4. Будем говорить, что λ — собственное значение оператора A (λ — точка дискретного спектра оператора A), если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}$. **Очевидно, λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда: $\lambda\in\mathbb{K}$; можно указать такой вектор x, что: $x\in\mathrm{D}(A)$, $Ax=\lambda x$, $x\neq\theta$.**

5. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что x — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ, если: $x\in\ker(A-\lambda I)$, $x\neq\theta$. **Очевидно, x является собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ тогда и только тогда, когда: $x\in\mathrm{D}(A)$, $Ax=\lambda x$, $x\neq\theta$.**

6. Будем говорить, что x — собственный вектор оператора A, если можно указать такое число λ, что: λ — собственное значение оператора A, x — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ.

7. Пусть λ — собственное значение оператора A. Обозначим, $H_A(\lambda)=\ker(A-\lambda I)$. Очевидно: $H_A(\lambda)$ — подпространство пространства L, $H_A(\lambda)=\Big\{x\colon x\in\mathrm{D}(A)\wedge Ax=\lambda x\Big\}$. Подпространство $H_A(\lambda)$ называют собственным подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ.

8. Будем говорить, что H — собственное подпространство оператора A, если можно указать такое число λ, что: λ — собственное значение оператора A, H — собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному значению λ.

9. Пусть λ — собственное значение оператора A. Обозначим, $g_A(\lambda)=\dim\Big(H_A(\lambda)\Big)$. Очевидно, $g_A(\lambda)\in\overline{\mathbb{N}}$. Число $g_A(\lambda)$ называют геометрической кратностью собственного значения λ.

Замечание. Пусть $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$.

1. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L)\neq+\infty$; $A\in\operatorname{Lin}(L,L)$, $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$. **Покажем, что** $\mathrm{R}(A-\lambda I)=L$. Очевидно, $A-\lambda I\in\operatorname{Lin}(L,L)$. Так как: $\dim(L)\neq+\infty$, $A-\lambda I\in\operatorname{Lin}(L,L)$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, то $\mathrm{R}(A-\lambda I)=L$.

2. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A\in\operatorname{lin}(L,L)$, λ — собственное значение оператора A. **Покажем, что** $H_A(\lambda)$ — инвариантное подпространство оператора A. Очевидно, $H_A(\lambda)$ — подпространство пространства L. Пусть $x\in H_A(\lambda)$. Тогда: $Ax=\lambda x\in H_A(\lambda)$.

3. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N\in\mathbb{N}$, $\dim(L)=N$; $A\in\operatorname{Lin}(L,L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A}=[A](e)$; $i=\overline{1,N}$.

Пусть: λ — собственное значение оператора A, e_i — соответствующий собственный вектор. **Покажем, что:** $\tilde{A}_i^j = \lambda\delta_i^j$ при $j = \overline{1, N}$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда: $\tilde{A}_i^j = [Ae_i]^j(e) = [\lambda e_i]^j(e) = \lambda[e_i]^j(e) = \lambda\delta_i^j$.

Пусть: $\tilde{A}_i^j = 0$ при: $j = \overline{1, N}$, $j \neq i$. **Покажем, что:** $\tilde{A}_i^i$ — собственное значение оператора A (**здесь нет суммы по индексу** i), e_i — соответствующий собственный вектор. Очевидно: $e_i \in L$, $e_i \neq \theta$, $Ae_i = \tilde{A}_i^j e_j = \tilde{A}_i^i e_i$ (**здесь нет суммы по индексу** i).

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \mathrm{lin}(L, L)$*,* $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 2$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *— различные собственные значения оператора* A*,* $H_1, \ldots, H_r$ *— соответствующие собственные подпространства. Тогда* $H_1, \ldots, H_r$ *— линейно независимые подпрострасва.*

Доказательство. Пусть: $x_1 \in H_1, \ldots, x_r \in H_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Тогда:

$$(A - \lambda_r I)\sum_{k=1}^{r} x_k = (A - \lambda_r I)\theta,$$

$$\sum_{k=1}^{r-1}(\lambda_k - \lambda_r)x_k = \theta;$$

$$(A - \lambda_{r-1} I)\sum_{k=1}^{r-1}(\lambda_k - \lambda_r)x_k = (A - \lambda_{r-1} I)\theta,$$

$$\sum_{k=1}^{r-2}(\lambda_k - \lambda_r)(\lambda_k - \lambda_{r-1})x_k = \theta;$$

$$\ldots$$

$$(\lambda_1 - \lambda_r)\cdots(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 = \theta.$$

Так как $\lambda_1 \notin \{\lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$, то $x_1 = \theta$. Аналогично: $x_2, \ldots, x_r = \theta$. □

6.3. Характеристический полином линейного оператора

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F — полином на $\mathbb{K}$. Обозначим, $N = \deg(F)$. Тогда $N \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $a_0, \ldots, a_N$ коэффициенты полинома F. Тогда: $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $F(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k\lambda^k$ при $\lambda \in \mathbb{K}$.

Обозначим: $\tilde{F}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k\lambda^k$ при $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда: $\tilde{F}$ — полином на $\mathbb{C}$, $\deg(\tilde{F}) = N$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\tilde{F}$, $\tilde{F}(\lambda) = F(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{K}$.

Обозначим: $\hat{F}(B) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k B^k$ при $B \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда: $\hat{F}$ — полином на $\mathrm{Lin}(L, L)$, $\deg(\hat{F}) = N$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\hat{F}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Обозначим: $F_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\Big([A - \lambda I](e)\Big) = \det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = \det(\tilde{A}_1 - \lambda\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{A}_N - \lambda\tilde{I}_N).$$

Очевидно: F_A — полином на $\mathbb{K}$, $\deg(F_A) \leqslant N$. Полином F_A называют характеристическим полиномом оператора F_A. Обозначим через $a_0(A), \ldots, a_N(A)$ коэффициенты полинома F_A.

Тогда: $a_0(A),\ldots,a_N(A)\in\mathbb{K}$, $F_A(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{N}a_k(A)\lambda^k$ при $\lambda\in\mathbb{K}$. Нетрудно показать, что: $a_0(A)=\det(\tilde{A})$, $a_{N-1}(A)=(-1)^{N-1}\operatorname{tr}(\tilde{A})$, $a_N(A)=(-1)^N$. Так как: $a_N(A)=(-1)^N\neq 0$, то $\deg(F_A)=N$.

Пусть $\lambda\in\mathbb{C}$. Очевидно:

$$\tilde{F}_A(\lambda)=\sum_{k=0}^{N}a_k(A)\lambda^k=\det(\tilde{A}_1-\lambda\tilde{I}_1,\ldots,\tilde{A}_N-\lambda\tilde{I}_N)=\det(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}).$$

Пусть $\lambda\in\mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda)=\det(\tilde{A}-\lambda\tilde{I})=\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\Big(\tilde{A}_1^{\sigma(1)}-\lambda\delta_1^{\sigma(1)}\Big)\cdots\Big(\tilde{A}_N^{\sigma(N)}-\lambda\delta_N^{\sigma(N)}\Big)=$$
$$\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\Big(\tilde{A}_1^{\sigma(1)}1-\delta_1^{\sigma(1)}\lambda\Big)\cdots\Big(\tilde{A}_N^{\sigma(N)}1-\delta_N^{\sigma(N)}\lambda\Big).$$

Пусть $B\in\operatorname{Lin}(L,L)$. Очевидно:

$$\hat{F}_A(B)=\sum_{k=0}^{N}a_k(A)B^k=\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\Big(\tilde{A}_1^{\sigma(1)}I-\delta_1^{\sigma(1)}B\Big)\cdots\Big(\tilde{A}_N^{\sigma(N)}I-\delta_N^{\sigma(N)}B\Big).$$

Обозначим через S_A множество всех собственных значений оператора A. **Покажем, что** $S_A=\Big\{\lambda\colon \lambda\in\mathbb{K}\wedge F_A(\lambda)=0\Big\}$.

Пусть $\lambda\in S_A$. Тогда: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}$. Следовательно: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\det\Big([A-\lambda I](e)\Big)=0$. Тогда: $\lambda\in\mathbb{K}$, $F_A(\lambda)=0$.

Пусть: $\lambda\in\mathbb{K}$, $F_A(\lambda)=0$. Тогда: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\det\Big([A-\lambda I](e)\Big)=0$. Следовательно: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}$. Тогда $\lambda\in S_A$.

Обозначим, $\tilde{S}_A=\Big\{\lambda\colon \lambda\in\mathbb{C}\wedge\tilde{F}_A(\lambda)=0\Big\}$. Так как $\deg(\tilde{F}_A)=N$, то $\operatorname{num}(\tilde{S}_A)\leqslant N$. **Согласно основной теореме алгебры,** $\tilde{S}_A\neq\varnothing$. Очевидно:

$$S_A=\Big\{\lambda\colon \lambda\in\mathbb{K}\wedge F_A(\lambda)=0\Big\}=\Big\{\lambda\colon \lambda\in\mathbb{K}\wedge\lambda\in\mathbb{C}\wedge\tilde{F}_A(\lambda)=0\Big\}=\tilde{S}_A\cap\mathbb{K}.$$

Тогда: $\operatorname{num}(S_A)=\operatorname{num}(\tilde{S}_A\cap\mathbb{K})\leqslant\operatorname{num}(\tilde{S}_A)\leqslant N$. Пусть $\tilde{S}_A\subseteq\mathbb{K}$. Тогда: $S_A=\tilde{S}_A\cap\mathbb{K}=\tilde{S}_A\neq\varnothing$.

Пусть λ — собственное значение оператора A. Тогда: $\lambda\in\mathbb{K}$, $F_A(\lambda)=0$. Обозначим через $m_A(\lambda)$ кратность числа λ как корня полинома F_A. Число $m_A(\lambda)$ называют алгебраической кратностью собственного значения λ.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N\in\mathbb{N}$*,* $\dim(L)=N$*;* $A\in\operatorname{Lin}(L,L)$*,* λ *— собственное значение оператора* A*. Тогда* $g_A(\lambda)\leqslant m_A(\lambda)$*.*

Доказательство. Обозначим: $H=H_A(\lambda)$, $g=g_A(\lambda)$, $m=m_A(\lambda)$. Очевидно, $g=\overline{1,N}$. Так как $g\in\mathbb{N}$, то можно указать такие векторы $e_1,\ldots,e_g$, что $e_1,\ldots,e_g$ — базис подпространства H.

Пусть $g=N$. Тогда $e_1,\ldots,e_g$ — базис пространства L. Обозначим, $\tilde{A}=[A](e)$. Тогда: $\tilde{A}_i^j=\lambda\delta_i^j$ при $i,j=\overline{1,g}$. Следовательно: $F_A\Big(\tilde{\lambda}\Big)=\Big(\lambda-\tilde{\lambda}\Big)^g$ при $\tilde{\lambda}\in\mathbb{K}$. Тогда $g=m$.

Пусть $g<N$. Так как: $g,N\in\mathbb{N}$, $g<N$, то можно указать такие векторы $e_{g+1},\ldots,e_N$, что $e_1,\ldots,e_N$ — базис пространства L. Обозначим, $\tilde{A}=[A](e)$. Тогда: $\tilde{A}_i^j=\lambda\delta_i^j$ при: $i=\overline{1,g}$, $j=\overline{1,N}$. Следовательно: $F_A\Big(\tilde{\lambda}\Big)=\Big(\lambda-\tilde{\lambda}\Big)^g\det\left(\Big\{\tilde{A}_{g+i}^{g+j}-\tilde{\lambda}\delta_{g+i}^{g+j}\Big\}_{i=\overline{1,N-g}}^{j=\overline{1,N-g}}\right)$ при $\tilde{\lambda}\in\mathbb{K}$. Тогда $m\geqslant g$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{Z}_+$*,* $\dim(L) = N$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L*. Тогда:* $Q_1 + \cdots + Q_r = L \iff \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r) = N$*.*

Доказательство. Пусть $Q_1 + \cdots + Q_r = L$. Тогда $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = N$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $\dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r) = \dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = N$.

Пусть $\dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r) = N$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r) = N$. Так как $N \neq +\infty$, то $Q_1 + \cdots + Q_r = L$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* $r \in \mathbb{N}$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *— все различные собственные значения оператора* A*,* $H_1, \ldots, H_r$ *— соответствующие собственные подпространства,* $g_1, \ldots, g_r$ *— соответствующие геометрические кратности,* $m_1, \ldots, m_r$ *— соответствующие алгебраические кратности.*

1. *Утверждение* $H_1 + \cdots + H_r = L$ *справедливо тогда и только тогда, когда можно указать такие векторы* $e_1, \ldots, e_N$*, что:* $e_1, \ldots, e_N$ *— базис пространства* L*,* $e_1, \ldots, e_N$ *— собственные векторы оператора* A*.*

2. *Утверждение* $H_1 + \cdots + H_r = L$ *справедливо тогда и только тогда, когда:* $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$*,* $\forall k = \overline{1, r}(g_k = m_k)$*.*

Доказательство.

1. Пусть $H_1 + \cdots + H_r = L$. Фиксируем номер $k = \overline{1, r}$. Очевидно, $g_k = \overline{1, N}$. Так как $g_k \in \mathbb{N}$, то можно указать такие векторы $e_{k,1}, \ldots, e_{k,g_k}$, что $e_{k,1}, \ldots, e_{k,g_k}$ — базис подпространства H_k. Так как: $e_{k,1}, \ldots, e_{k,g_k} \in H_k$, $e_{k,1}, \ldots, e_{k,g_k} \neq \theta$, то $e_{k,1}, \ldots, e_{k,g_k}$ — собственные векторы оператора A, соответствующие собственному значению λ_k. Так как $H_1, \ldots, H_r$ — линейно независимые подпространства, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,g_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,g_r}$ — базис подпространства $H_1 + \cdots + H_r$. Так как $H_1 + \cdots + H_r = L$, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,g_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,g_r}$ — базис пространства L.

Пусть: $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства L, $e_1, \ldots, e_N$ — собственные векторы оператора A. Фиксируем номер $k = \overline{1, r}$. Так как e_k — собственный вектор оператора A, то можно указать такой номер $m = \overline{1, r}$, что $e_k \in H_m$. Тогда: $e_k \in H_m \subseteq H_1 + \cdots + H_r$. Так как $H_1 + \cdots + H_r$ — подпространство пространства L, то $L(e_1, \ldots, e_N) \subseteq H_1 + \cdots + H_r$. Так как $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства L, то: $L = L(e_1, \ldots, e_N) \subseteq H_1 + \cdots + H_r$. Так как: $L \subseteq H_1 + \cdots + H_r$, $H_1 + \cdots + H_r \subseteq L$, то $L = H_1 + \cdots + H_r$.

2. Пусть $H_1 + \cdots + H_r = L$. Тогда $g_1 + \cdots + g_r = N$.

Предположим, что существует такое число λ, что: $\lambda \in \tilde{S}_A$, $\lambda \notin \mathbb{K}$. Тогда: $\lambda \in \tilde{S}_A$, $\lambda \notin S_A$. Так как: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in S_A \subseteq \tilde{S}_A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные числа, то: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda \in \tilde{S}_A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda$ — различные числа. Обозначим через m кратность числа λ как корня полинома $\tilde{F}_A$. Так как $m > 0$, то: $g_1 + \cdots + g_r \leqslant m_1 + \cdots + m_r < m_1 + \cdots + m_r + m$. Так как $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda \in \tilde{S}_A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda$ — различные числа, то: $g_1 + \cdots + g_r < m_1 + \cdots + m_r + m \leqslant N$ (что противоречит утверждению $g_1 + \cdots + g_r = N$). Итак, $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$.

Предположим, что $\exists k = \overline{1, r}(g_k < m_k)$. Тогда: $g_1 + \cdots + g_r < m_1 + \cdots + m_r$. Так как: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in S_A \subseteq \tilde{S}_A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные числа, то: $g_1 + \cdots + g_r < m_1 + \cdots + m_r \leqslant N$ (что противоречит утверждению $g_1 + \cdots + g_r = N$). Итак, $\forall k = \overline{1, r}(g_k = m_k)$.

Пусть: $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$, $\forall k = \overline{1, r}(g_k = m_k)$. Так как $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$, то: $\tilde{S}_A = S_A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Так как $\forall k = \overline{1, r}(g_k = m_k)$, то $g_1 + \cdots + g_r = m_1 + \cdots + m_r$. Так как: $\tilde{S}_A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$,

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — различные числа, то (**согласно основной теореме алгебры**): $g_1 + \dots + g_r = m_1 + \dots + m_r = N$. Тогда $H_1 + \dots + H_r = L$.

$\square$

Теорема (Гамильтона–Кэли). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*. Тогда* $\hat{F}_A(A) = \Theta$.

Доказательство. Пусть: e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Пусть $k, i = \overline{1, N}$. Обозначим: $M_i^k(\lambda) = (-1)^{k+i}\overline{\Delta}_i^k(\tilde{A} - \lambda\tilde{I})$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Очевидно, M_i^k — полином на $\mathbb{K}$.

Пусть: $k, j = \overline{1, N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{N} M_i^k(\lambda)\Big(\tilde{A}_i^j 1 - \delta_i^j\lambda\Big) = \sum_{i=1}^{N} M_i^k(\lambda)\Big(\tilde{A}_i^j - \lambda\delta_i^j\Big) = \delta_k^j \det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = \delta_k^j F_A(\lambda).$$

Пусть: $k, j = \overline{1, N}$, $B \in \operatorname{Lin}(L, L)$. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{M}_i^k(B)\Big(\tilde{A}_i^j I - \delta_i^j B\Big) = \delta_k^j \hat{F}_A(B).$$

Пусть $i = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\Big(\tilde{A}_i^j I - \delta_i^j A\Big)e_j = \tilde{A}_i^j I(e_j) - \delta_i^j A(e_j) = \tilde{A}_i^j e_j - Ae_i = \theta.$$

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\hat{F}_A(A)e_k = \Big(\delta_k^j \hat{F}_A(A)\Big)e_j = \left(\sum_{i=1}^{N} \hat{M}_i^k(A)\Big(\tilde{A}_i^j I - \delta_i^j A\Big)\right) e_j = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}_i^k(A)\Big(\Big(\tilde{A}_i^j I - \delta_i^j A\Big)e_j\Big) = \theta.$$

Пусть $x \in L$. Тогда:

$$\hat{F}_A(A)x = \hat{F}_A(A)\Big([x]^k(e)e_k\Big) = [x]^k(e)\hat{F}_A(A)(e_k) = \theta.$$

Итак, $\hat{F}_A(A) = \Theta$. $\square$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.