Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 7. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме

7.1. Базис Жордана подпространства $\ker(A^n)$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

1. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим: $Q_k(A) = \ker(A^k)$, $R_k(A) = \mathrm{R}(A^k)$. Очевидно: $Q_k(A)$, $R_k(A)$ — подпространства пространства L, $\dim\Big(Q_k(A)\Big) + \dim\Big(R_k(A)\Big) = N$ **(это не значит, что** $Q_k(A) + R_k(A) = L$**)**.

2. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$, $Ax_1 = \theta$, $Ax_k = x_{k-1}$ при $k = \overline{2, r}$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — серия векторов оператора A.

3. Пусть: $k, r \in \mathbb{N}$, $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{N}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства $Q_k(A)$, $e_{i,1}, \ldots, e_{i,q_i}$ — серия векторов оператора A при $i = \overline{1, r}$. Будем говорить, что $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис Жордана подпространства $Q_k(A)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*.*

1. Справедливы утверждения: $A^k[Q_n] = Q_{n-k} \cap R_k$ *при:* $k, n \in \mathbb{Z}_+$*,* $k \leqslant n$*;* $A^k[Q_n] = \{\theta\}$ *при:* $k, n \in \mathbb{Z}_+$*,* $k \geqslant n$*;* $A^k[R_n] = R_{n+k}$ *при* $k, n \in \mathbb{Z}_+$*.*

2. Справедливы утверждения: $Q_k \subseteq Q_{k+1}$*,* $\dim(Q_k) \leqslant \dim(Q_{k+1})$*,* $R_{k+1} \subseteq R_k$*,* $\dim(R_{k+1}) \leqslant \dim(R_k)$ *при* $k \in \mathbb{Z}_+$*.*

3. Справедливо утверждение: $\dim(Q_n \cap R_k) = \dim(Q_{n+k}) - \dim(Q_k)$ *при* $k, n \in \mathbb{Z}_+$*.*

4. Можно указать такое число $h \in \mathbb{Z}_+$*, что:* $Q_k \subset Q_{k+1}$*,* $\dim(Q_k) < \dim(Q_{k+1})$*,* $R_{k+1} \subset R_k$*,* $\dim(R_{k+1}) < \dim(R_k)$ *при* $k = \overline{0, h-1}$*;* $Q_k = Q_{k+1}$*,* $\dim(Q_k) = \dim(Q_{k+1})$*,* $R_{k+1} = R_k$*,* $\dim(R_{k+1}) = \dim(R_k)$ *при:* $k \in \mathbb{Z}$*,* $k \geqslant h$ ***(число*** h ***называют высотой оператора*** A***)****.*

5. Справедливы утверждения: Q_h*,* R_h *— линейно независимые подпространства,* $L = Q_h + R_h$*.*

6. Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— серия векторов оператора* A*. Тогда:* $A^k x_n = x_{n-k}$ *при:* $n = \overline{1, r}$*,* $k = \overline{0, n-1}$*;* $x_k \in Q_k \cap R_{r-k}$ *при* $k = \overline{1, r}$*.*

7. Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $x \in Q_1 \cap R_{r-1}$*. Тогда можно указать такие векторы* $x_1, \ldots, x_r$*, что:* $x_1, \ldots, x_r$ *— серия векторов оператора* A*,* $x_1 = x$*.*

Доказательство.

1. Пусть: $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $k \leqslant n$.

Пусть $x \in A^k[Q_n]$. Тогда можно указать такой вектор u, что: $u \in L$, $u \in Q_n$, $x = A^k u$. Следовательно: $u \in L$, $A^n u = \theta$, $x = A^k u$. Тогда: $x \in L$, $A^{n-k} x = A^{n-k}(A^k u) = A^n u = \theta$. Следовательно, $x \in Q_{n-k}$. Так как: $u \in L$, $x = A^k u$, то $x \in R_k$. Тогда $x \in Q_{n-k} \cap R_k$.

Пусть $x \in Q_{n-k} \cap R_k$. Тогда: $x \in Q_{n-k}$, $x \in R_k$. Следовательно: $x \in L$, $A^{n-k}x = \theta$; можно указать такой вектор u, что: $u \in L$, $x = A^k u$. Тогда: $u \in L$, $A^n u = A^{n-k}(A^k u) = A^{n-k}x = \theta$. Следовательно, $u \in Q_n$. Так как: $u \in L$, $u \in Q_n$, $x = A^k u$, то $x \in A^k[Q_n]$. Итак, $A^k[Q_n] = Q_{n-k} \cap R_k$.

Пусть: $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $k \geqslant n$. Очевидно, $\theta \in A^k[Q_n]$. Пусть $x \in A^k[Q_n]$. Тогда можно указать такой математический объект u, что: $u \in L$, $u \in Q_n$, $x = A^k u$. Следовательно: $u \in L$, $A^n u = \theta$, $x = A^k u$. Тогда: $x = A^k u = A^{k-n}(A^n u) = \theta$. Следовательно, $A^k[Q_n] = \{\theta\}$.

Пусть $k, n \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно: $A^k[R_n] = A^k\Big[A^n[L]\Big] = A^{n+k}[L] = R_{n+k}$.

2. Пусть: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$.

Пусть $x \in Q_k$. Тогда: $x \in L$, $A^k x = \theta$. Следовательно: $x \in L$, $A^{k+1}x = A(A^k x) = \theta$. Тогда $x \in Q_{k+1}$. Итак, $Q_k \subseteq Q_{k+1}$. Тогда $\dim(Q_k) \leqslant \dim(Q_{k+1})$.

Очевидно: $R_{k+1} = A^k[R_1] \subseteq A^k[L] = R_k$. Тогда $\dim(R_{k+1}) \leqslant \dim(R_k)$.

3. Пусть $k, n \in \mathbb{Z}_+$. Так как: $Q_{n+k} \subseteq L$, $Q_k \subseteq Q_{n+k}$, то:

$$\dim(Q_n \cap R_k) = \dim\Big(A^k[Q_{n+k}]\Big) = \dim\left(\mathrm{R}\left(A^k\Big|_{Q_{n+k}}\right)\right) =$$
$$\dim\left(\mathrm{D}\left(A^k\Big|_{Q_{n+k}}\right)\right) - \dim\left(\ker\left(A^k\Big|_{Q_{n+k}}\right)\right) = \dim(L \cap Q_{n+k}) - \dim(Q_k \cap Q_{n+k}) =$$
$$\dim(Q_{n+k}) - \dim(Q_k).$$

4. Обозначим, $\mu = \Big\{k\colon k \in \mathbb{Z}_+ \wedge \dim(R_{k+1}) = \dim(R_k)\Big\}$. Очевидно, $\mu \subseteq \mathbb{Z}_+$.

Предположим, что $\mu = \varnothing$. Тогда: $\dim(R_{k+1}) < \dim(R_k)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно: $\dim(R_{k+1}) \leqslant \dim(R_k) - 1$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда: $\dim(R_{k+n}) \leqslant \dim(R_k) - n$ при: $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно: $\dim(R_{N+1}) \leqslant \dim(R_0) - (N+1) = -1$ (что противоречит тому, что $\dim(R_{N+1}) \geqslant 0$). Итак, $\mu \neq \varnothing$. Обозначим, $h = \min(\mu)$. Тогда: $h \in \mathbb{Z}_+$; $\dim(R_{k+1}) < \dim(R_k)$ при $k = \overline{0, h-1}$; $\dim(R_{h+1}) = \dim(R_h)$.

Пусть $k = \overline{0, h-1}$. Тогда $\dim(R_{k+1}) < \dim(R_k)$. Следовательно, $R_{k+1} \subset R_k$. Так как: $\dim(R_{h+1}) = \dim(R_h)$, $\dim(R_h) \neq +\infty$, то $R_{h+1} = R_h$. Пусть: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h$. Тогда: $R_{k+1} = A^{k-h}[R_{h+1}] = A^{k-h}[R_h] = R_k$. Следовательно, $\dim(R_{k+1}) = \dim(R_k)$.

Пусть $k = \overline{0, h-1}$. Тогда: $\dim(Q_k) = N - \dim(R_k) < N - \dim(R_{k+1}) = \dim(Q_{k+1})$. Следовательно, $Q_k \subset Q_{k+1}$. Пусть: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h$. Тогда: $\dim(Q_k) = N - \dim(R_k) = N - \dim(R_{k+1}) = \dim(Q_{k+1})$. Так как: $\dim(Q_k) = \dim(Q_{k+1})$, $\dim(Q_{k+1}) \neq +\infty$, то $Q_k = Q_{k+1}$.

5. Очевидно: $Q_h \cap R_h = A^h[Q_{2h}] = A^h[Q_h] = \{\theta\}$. Тогда Q_h, R_h — линейно независимые подпространства. Следовательно: $\dim(Q_h + R_h) = \dim(Q_h) + \dim(R_h) = N$. Так как $N \neq +\infty$, то $Q_h + R_h = L$.

6. Очевидно: $A^k x_n = x_{n-k}$ при: $n = \overline{1, r}$, $k = \overline{0, n-1}$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда: $x_k \in L$, $A^k x_k = A(A^{k-1}x_k) = Ax_1 = \theta$. Следовательно, $x_k \in Q_k$. Так как: $x_r \in L$, $x_k = A^{r-k}x_r$, то $x_k \in R_{r-k}$. Тогда $x_k \in Q_k \cap R_{r-k}$.

7. Так как $x \in Q_1 \cap R_{r-1}$, то: $x \in Q_1$, $x \in R_{r-1}$. Тогда: $x \in L$, $Ax = \theta$; можно указать такой вектор u, что: $u \in L$, $x = A^{r-1}u$. Обозначим: $x_k = A^{r-k}u$ при $k = \overline{1, r}$. Тогда: $x_1 \in L$, $x_1 = A^{r-1}u = x$. Следовательно: $Ax_1 = Ax = \theta$. Пусть $k = \overline{2, r}$. Тогда: $x_k \in L$, $Ax_k = A(A^{r-k}u) = A^{r-(k-1)}u = x_{k-1}$. Итак: $x_1, \ldots x_r$ — серия векторов оператора A, $x_1 = x$.

□

Теорема. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* h *— высота оператора* A*,* $r \in \mathbb{N}$*,* $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{N}$*,* $e_{i,1}, \ldots, e_{i,q_i}$ *— серия векторов оператора* A *при* $i = \overline{1, r}$*. Пусть:* $n = \overline{1, h}$*,* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}}$ *— базис подпространства* Q_n*.*

1. Справедливо утверждение: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,r}}$ *— базис подпространства* Q_k *при* $k = \overline{1,n}$.

2. Справедливы утверждения: $\max\limits_{i=\overline{1,r}} q_i = n$, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\, q_i \geqslant k}$ *— базис подпространства* $Q_1 \cap R_{k-1}$ *при* $k = \overline{1,n}$.

3. Справедливы утверждения: $r = \dim(Q_1)$, $\operatorname{num}\Big(\{i\colon i = \overline{1,r} \wedge q_i = k\}\Big) = 2\dim(Q_k) - \dim(Q_{k+1}) - \dim(Q_{k-1})$ *при* $k = \overline{1,n-1}$; $\operatorname{num}\Big(\{i\colon i = \overline{1,r} \wedge q_i = n\}\Big) = \dim(Q_n) - \dim(Q_{n-1})$.

Доказательство.

1. Пусть $k = \overline{1,n}$. Очевидно: $e_{i,j} \in Q_j \subseteq Q_k$ при: $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,\min\{q_i,k\}}$; $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — линейно независимые векторы.

Пусть $x \in Q_k$. Тогда $x \in Q_n$. Следовательно, можно указать такие числа $\{C^{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}}$, что: $C^{i,j} \in \mathbb{K}$ при: $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,q_i}$; $x = \sum\limits_{i=\overline{1,r}} \sum\limits_{j=\overline{1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j}$.

Пусть $\forall i = \overline{1,r}(q_i \leqslant k)$. Тогда $x = \sum\limits_{i=\overline{1,r}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}} C^{i,j} e_{i,j}$.

Пусть $\exists i = \overline{1,r}(q_i \geqslant k+1)$. Тогда:

$$A^k x = A^k \sum_{i=\overline{1,r}} \sum_{j=\overline{1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j},$$
$$\theta = \sum_{i=\overline{1,r},\, q_i \geqslant k+1} \sum_{j=\overline{k+1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j-k}.$$

Так как $\{e_{i,j-k}\}_{j=\overline{k+1,q_i}}^{i=\overline{1,r},\, q_i \geqslant k+1}$ — линейно независимые векторы, то: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,r}$, $q_i \geqslant k+1$, $j = \overline{k+1,q_i}$. Следовательно, $x = \sum\limits_{i=\overline{1,r}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}} C^{i,j} e_{i,j}$. Итак, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_k.

2. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,r}} q_i$. Тогда: $\exists i = \overline{1,r}(q_i = \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\forall i = \overline{1,r}(q_i \leqslant \alpha)$. Предположим, что $\alpha < n$. Так как: $1 \leqslant \alpha < n \leqslant h$, то $Q_\alpha \neq Q_n$. Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,\alpha\}}}^{i=\overline{1,r}}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,\alpha\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_α, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_α. Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_α, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_n, то: $Q_\alpha = L\Big(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}}\Big) = Q_n$ (что противоречит утверждению $Q_\alpha \neq Q_n$). Итак, $\alpha \geqslant n$.

Очевидно, можно указать такой номер $i = \overline{1,r}$, что $q_i = \alpha$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_n, то $e_{i,q_i} \in Q_n$. Предположим, что $\alpha > n$. Тогда: $q_i = \alpha > n$. Следовательно: $A^n e_{i,q_i} = e_{i,q_i-n} \neq \theta$. Тогда $e_{i,q_i} \notin Q_n$ (что противоречит утверждению $e_{i,q_i} \in Q_n$). Итак, $\alpha = n$.

Пусть $k = \overline{1,n}$. Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_k, $\exists i = \overline{1,r}(q_i \geqslant k)$, то:

$$Q_1 \cap R_{k-1} = A^{k-1}[Q_k] = A^{k-1}\left[L\Big(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,r}}\Big)\right] = L\Big(\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\, q_i \geqslant k}\Big).$$

Так как $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\, q_i \geqslant k}$ — линейно независимые векторы, то: $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\, q_i \geqslant k}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_{k-1}$.

3. Так как: $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,r}}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_1, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_1. Тогда $r = \dim(Q_1)$.

Пусть $k = \overline{1, n-1}$. Так как: $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\, q_i \geqslant k}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_{k-1}$, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\, q_i \geqslant k+1}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_k$, то:

$$\begin{gathered}
\operatorname{num}\Big(\{i\colon i = \overline{1,r} \wedge q_i = k\}\Big) = \\
\operatorname{num}\Big(\{i\colon i = \overline{1,r} \wedge q_i \geqslant k\}\Big) - \operatorname{num}\Big(\{i\colon i = \overline{1,r} \wedge q_i \geqslant k+1\}\Big) = \\
\dim(Q_1 \cap R_{k-1}) - \dim(Q_1 \cap R_k) = \\
\Big(\dim(Q_k) - \dim(Q_{k-1})\Big) - \Big(\dim(Q_{k+1}) - \dim(Q_k)\Big) = \\
2\dim(Q_k) - \dim(Q_{k+1}) - \dim(Q_{k-1}).
\end{gathered}$$

Так как $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\, q_i \geqslant n}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_{n-1}$, то:

$$\begin{gathered}
\operatorname{num}\Big(\{i\colon i = \overline{1,r} \wedge q_i = n\}\Big) = \operatorname{num}\Big(\{i\colon i = \overline{1,r} \wedge q_i \geqslant n\}\Big) = \dim(Q_1 \cap R_{n-1}) = \\
\dim(Q_n) - \dim(Q_{n-1}).
\end{gathered}$$

□

Теорема. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*,* h *— высота оператора* A*,* $r \in \mathbb{N}$*,* $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{N}$*,* $e_{i,1}, \ldots, e_{i,q_i}$ *— серия векторов оператора* A *при* $i = \overline{1,r}$*. Пусть:* $n = \max\limits_{i=\overline{1,r}} q_i$*,* $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\ q_i \geqslant k}$ *— базис подпространства* $Q_1 \cap R_{k-1}$ *при* $k = \overline{1,n}$*. Тогда:* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}}$ *— базис подпространства* Q_n*,* $n = \overline{1,h}$*.*

Доказательство. Так как $n = \max\limits_{i=\overline{1,r}} q_i$, то: $\exists i = \overline{1,r}(q_i = n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\forall i = \overline{1,r}(q_i \leqslant n)$. Рассуждая по индукции, покажем, что: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_k при $k = \overline{1,n}$.

Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,r}} = \{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r}} = \{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\ q_i \geqslant 1}$, $Q_1 = Q_1 \cap L = Q_1 \cap R_0$, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\ q_i \geqslant 1}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_0$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_1.

Пусть: $k = \overline{1, n-1}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_k. Очевидно: $e_{i,j} \in Q_j \subseteq Q_{k+1}$ при: $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1, \min\{q_i, k+1\}}$.

Пусть: $C^{i,j} \in \mathbb{K}$ при: $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1, \min\{q_i, k+1\}}$; $\sum\limits_{i=\overline{1,r}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k+1\}}} C^{i,j} e_{i,j} = \theta$. Так как $\exists i = \overline{1,r}(q_i \geqslant k+1)$, то:

$$\begin{gathered}
A^k \sum_{i=\overline{1,r}} \sum_{j=\overline{1,\min\{q_i,k+1\}}} C^{i,j} e_{i,j} = A^k \theta, \\
\sum_{i=\overline{1,r},\ q_i \geqslant k+1} C^{i,k+1} e_{i,1} = \theta.
\end{gathered}$$

Так как $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\ q_i \geqslant k+1}$ — линейно независимые векторы, то: $C^{i,k+1} = 0$ при $i = \overline{1,r}$, $q_i \geqslant k+1$. Тогда $\sum\limits_{i=\overline{1,r}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}} C^{i,j} e_{i,j} = \theta$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — линейно независимые векторы, то: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1, \min\{q_i, k\}}$. Итак: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1, \min\{q_i, k+1\}}$. Тогда $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k+1\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — линейно независимые векторы.

Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_k, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,r},\ q_i \geqslant k+1}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_k$, то:

$$\operatorname{num}\Big(\Big\{(i,j)\colon i = \overline{1,r} \wedge j = \overline{1,\min\{q_i,k+1\}}\Big\}\Big) =$$
$$\operatorname{num}\Big(\Big\{(i,j)\colon i = \overline{1,r} \wedge j = \overline{1,\min\{q_i,k\}}\Big\}\Big) + \operatorname{num}\Big(\{i\colon i = \overline{1,r} \wedge q_i \geqslant k+1\}\Big) =$$
$$\dim(Q_k) + \Big(\dim(Q_{k+1}) - \dim(Q_k)\Big) = \dim(Q_{k+1}).$$

Итак, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k+1\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_{k+1}.

Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,n\}}}^{i=\overline{1,r}}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,n\}}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_n, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,r}}$ — базис подпространства Q_n.

Очевидно, можно указать такой номер $i = \overline{1,r}$, что $q_i = n$. Предположим, что $n > h$. Тогда: $q_i = n > h$. Следовательно: $e_{i,q_i} \in Q_{q_i} = Q_h$. Так как $q_i > h$, то: $A^h e_{i,q_i} = e_{i,q_i-h} \neq \theta$. Тогда $e_{i,q_i} \neq Q_h$ (что противоречит утверждению $e_{i,q_i} \in Q_h$). Итак, $n = \overline{1,h}$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L,L)$*,* $Q_1(A) \neq \{\theta\}$.

Пусть: $g = \dim\Big(Q_1(A)\Big)$*,* h *— высота оператора* A *(так как* $Q_1(A) \neq \{\theta\}$*, то* $g, h \in \mathbb{N}$*). Тогда можно указать такие числа* $q_1, \ldots, q_g \in \mathbb{N}$ *и такие векторы* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,g}}$*, что* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,g}}$ *— базис Жордана подпространства* $Q_h(A)$.

7.2. Базис Жордана корневого подпространства оператора A

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L,L)$, λ — собственное значение оператора A, h — высота оператора $A - \lambda I$ (так как $Q_1(A-\lambda I) \neq \{\theta\}$, то $h \in \mathbb{N}$). Обозначим, $\tilde{H}_A(\lambda) = Q_h(A - \lambda I)$. Очевидно, $\tilde{H}_A(\lambda)$ — подпространство пространства L. Подпространство $\tilde{H}_A(\lambda)$ называют корневым подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L,L)$*,* λ *— собственное значение оператора* A*,* m *— соответствующая алгебраическая кратность,* $\tilde{H}$ *— соответствующее корневое подпространство. Тогда* $\dim(\tilde{H}) = m$.

Доказательство. Пусть: $g = \dim\Big(Q_1(A - \lambda I)\Big)$, h — высота оператора $A - \lambda I$. Так как $Q_1(A - \lambda I) \neq \{\theta\}$, то $g, h \in \mathbb{N}$. Пусть $\tilde{g} = \dim(\tilde{H})$. Так как: $Q_1(A - \lambda I) \subseteq \tilde{H} \subseteq L$, то: $g \leqslant \tilde{g} \leqslant N$. Так как $Q_1(A - \lambda I) \neq \{\theta\}$, то можно указать такие числа $q_1, \ldots, q_g \in \mathbb{N}$ и такие векторы $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,g}}$, что $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,g}}$ — базис Жордана корневого подпространства $\tilde{H}$.

Пусть $\tilde{g} = N$. Тогда $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,g}}$ — базис пространства L. Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу оператора A в базисе $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,g}}$. Пусть $\tilde{\lambda} \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A\Big(\tilde{\lambda}\Big) = \det\Big(\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{I}\Big) = \Big(\lambda - \tilde{\lambda}\Big)^{\tilde{g}}.$$

Следовательно, $\tilde{g} = m$.

Пусть $\tilde{g} < N$. Тогда: $\dim\Bigl(R_h(A-\lambda I)\Bigr) = N - \tilde{g} > 0$. Следовательно, можно указать такие векторы $f_1, \ldots, f_{N-\tilde{g}}$, что $f_1, \ldots, f_{N-\tilde{g}}$ — базис подпространства $R_h(A-\lambda I)$. Так как: $L = \tilde{H} + R_h(A-\lambda I)$, $\tilde{H}$, $R_h(A-\lambda I)$ — линейно независимые подпространства, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,g}}$ — базис подпространства $\tilde{H}$, $f_1, \ldots, f_{N-\tilde{g}}$ — базис подпространства $R_h(A-\lambda I)$, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,q_1}, \ldots, e_{g,1}, \ldots, e_{g,q_g}, f_1, \ldots, f_{N-\tilde{g}}$ — базис пространства L. Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу оператора A в базисе $e_{1,1}, \ldots, e_{1,q_1}, \ldots, e_{g,1}, \ldots, e_{g,q_g}, f_1, \ldots, f_{N-\tilde{g}}$. Пусть $\tilde{\lambda} \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A\Bigl(\tilde{\lambda}\Bigr) = \det\Bigl(\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{I}\Bigr) = \Bigl(\lambda - \tilde{\lambda}\Bigr)^{\tilde{g}} \det\biggl(\Bigl\{\tilde{A}_{\tilde{g}+i}^{\tilde{g}+j} - \tilde{\lambda}\delta_{\tilde{g}+i}^{\tilde{g}+j}\Bigr\}_{i=\overline{1,N-\tilde{g}}}^{j=\overline{1,N-\tilde{g}}}\biggr).$$

Так как $\Bigl[A, (A-\lambda I)^h\Bigr] = \Theta$, то $R_h(A-\lambda I)$ — инвариантное подпространство оператора A. Тогда: $A|_{R_h(A-\lambda I)} \in \mathrm{Lin}\Bigl(R_h(A-\lambda I), R_h(A-\lambda I)\Bigr)$, $\Bigl[A|_{R_h(A-\lambda I)}\Bigr]_i^j(f) = \tilde{A}_{\tilde{g}+i}^{\tilde{g}+j}$ при: $i, j = \overline{1, N-\tilde{g}}$. Пусть $\tilde{\lambda} \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A\Bigl(\tilde{\lambda}\Bigr) = \Bigl(\lambda - \tilde{\lambda}\Bigr)^{\tilde{g}} F_{A|_{R_h(A-\lambda I)}}\Bigl(\tilde{\lambda}\Bigr).$$

Предположим, что $F_{A|_{R_h(A-\lambda I)}}(\lambda) = 0$. Так как $\lambda \in \mathbb{K}$, то можно указать такой вектор x, что: $x \in R_h(A-\lambda I)$, $\Bigl(A|_{R_h(A-\lambda I)} - \lambda\, I|_{R_h(A-\lambda I)}\Bigr)x = \theta$, $x \neq \theta$. Тогда: $x \in R_h(A-\lambda I)$, $(A-\lambda I)x = \theta$, $x \neq \theta$. Следовательно: $x \in Q_1(A-\lambda I)$, $x \in R_h(A-\lambda I)$, $x \neq \theta$. Так как $Q_1(A-\lambda I) \subseteq \tilde{H}$, то: $x \in \tilde{H}$, $x \in R_h(A-\lambda I)$, $x \neq \theta$. Так как: $x \in \tilde{H} \cap R_h(A-\lambda I)$, $\tilde{H} \cap R_h(A-\lambda I) = \{\theta\}$, то $x = \theta$ (что противоречит утверждению $x \neq \theta$). Итак, $F_{A|_{R_h(A-\lambda I)}}(\lambda) \neq 0$. Тогда $\tilde{g} = m$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 2$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *— различные собственные значения оператора* A*,* $\tilde{H}_1, \ldots, \tilde{H}_r$ *— соответствующие корневые подпространства. Тогда* $\tilde{H}_1, \ldots, \tilde{H}_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство. Пусть $k = \overline{1,r}$. Обозначим через h_k высоту оператора $A - \lambda_k I$. Так как $Q_1(A-\lambda_k I) \neq \{\theta\}$, то $h_k \in \mathbb{N}$. Пусть: $x_k \in \tilde{H}_k$ при $k = \overline{1,r}$; $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} x_k = \theta$. Предположим, что $x_1 \neq \theta$. Так как: $x_1 \neq \theta$, $(A-\lambda_1 I)^{h_1} x_1 = \theta$, то можно указать такое число $n_1 = \overline{0, h_1 - 1}$, что: $(A-\lambda_1 I)^{n_1} x_1 \neq \theta$, $(A-\lambda_1 I)\Bigl((A-\lambda_1 I)^{n_1} x_1\Bigr) = \theta$. Тогда:

$$(A-\lambda_1 I)^{n_1} x_1 + \sum_{k=\overline{2,r}} (A-\lambda_1 I)^{n_1} x_k = \theta;$$

$$(A-\lambda_2 I)^{h_2}\Bigl((A-\lambda_1 I)^{n_1} x_1\Bigr) + (A-\lambda_2 I)^{h_2}\Bigl((A-\lambda_1 I)^{n_1} x_2\Bigr) +$$
$$\sum_{k=\overline{3,r}} (A-\lambda_2 I)^{h_2}\Bigl((A-\lambda_1 I)^{n_1} x_k\Bigr) = \theta,$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^{h_2}(A-\lambda_1 I)^{n_1}(x_1) + (A-\lambda_1 I)^{n_1}\Bigl((A-\lambda_2 I)^{h_2} x_2\Bigr) +$$
$$\sum_{k=\overline{3,r}} \Bigl((A-\lambda_2 I)^{h_2}(A-\lambda_1 I)^{n_1}\Bigr) x_k = \theta,$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^{h_2}(A-\lambda_1 I)^{n_1}(x_1) + \sum_{k=\overline{3,r}} \Bigl((A-\lambda_2 I)^{h_2}(A-\lambda_1 I)^{n_1}\Bigr) x_k = \theta;$$

$$\dots$$
$$(\lambda_1-\lambda_2)^{h_2}\dots(\lambda_1-\lambda_r)^{h_r}(A-\lambda_1 I)^{n_1}(x_1)=\theta.$$

Так как $\lambda_1 \notin \{\lambda_2,\dots,\lambda_r\}$, то $(A-\lambda_1 I)^{n_1}x_1=\theta$ (что противоречит утверждению $(A-\lambda_1 I)^{n_1}x_1\neq\theta$). Итак, $x_1=\theta$. Аналогично, $x_2,\dots,x_r=\theta$. Тогда $\tilde{H}_1,\dots,\tilde{H}_r$ — линейно независимые подпространства. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N\in\mathbb{N}$, $\dim(L)=N$; $A\in\mathrm{Lin}(L,L)$, $\tilde{S}_A\subseteq\mathbb{K}$.

Так как: $\tilde{S}_A$ — конечное множество, $\tilde{S}_A\neq\varnothing$, то можно указать такое число $r\in\mathbb{N}$ и такие числа $\lambda_1,\dots,\lambda_r$, что: $\tilde{S}_A=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ — различные числа. Так как $\tilde{S}_A\subseteq\mathbb{K}$, то: $S_A=\tilde{S}_A=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ — различные числа. Пусть: $g_1,\dots,g_r$ — соответствующие геометрические кратности, $m_1,\dots,m_r$ — соответствующие алгебраические кратности, $\tilde{H}_1,\dots,\tilde{H}_r$ — соответствующие корневые подпространства.

Так как $\forall k=\overline{1,r}\Big(\dim(\tilde{H}_k)=m_k\Big)$, то $\dim(\tilde{H}_1)+\dots+\dim(\tilde{H}_r)=m_1+\dots+m_r$. Так как: $\tilde{S}_A=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ — различные числа, то (**согласно основной теореме алгебры**): $\dim(\tilde{H}_1)+\dots+\dim(\tilde{H}_r)=m_1+\dots+m_r=N$. Тогда $H_1+\dots+H_r=L$.

Фиксируем номер $k=\overline{1,r}$. Так как $Q_1(A-\lambda_k I)\neq\{\theta\}$, то можно указать такие числа $q_{k,1},\dots,q_{k,g_k}\in\mathbb{N}$ и такие векторы $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{i=\overline{1,g_k}}$, что $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{i=\overline{1,g_k}}$ — базис Жордана подпространства $\tilde{H}_k$. Так как $\tilde{H}_1,\dots,\tilde{H}_r$ — линейно независимые подпространства, то $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{k=\overline{1,r},\ i=\overline{1,g_k}}$ — базис подпространства $\tilde{H}_1+\dots+\tilde{H}_r$. Так как $H_1+\dots+H_r=L$, то $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{k=\overline{1,r},\ i=\overline{1,g_k}}$ — базис пространства L.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.