Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 8. Линейные, билинейные и квадратичные формы

8.1. Линейные и полулинейные формы

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что A — линейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \Longrightarrow \mathbb{K}$, A — линейный оператор.

2. Будем говорить, что A — полулинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \Longrightarrow \mathbb{K}$, A — полулинейный оператор.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

1. Пусть A — линейная форма в пространстве L. Обозначим: $[A]_k(e) = A(e_k)$ при $k = \overline{1, N}$.

2. Пусть A — полулинейная форма в пространстве L. Обозначим: $[A]_k(e) = A(e_k)$ при $k = \overline{1, N}$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть: A — линейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$. Тогда: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^N$, $A(x) = \tilde{A}_k [x]^k(e)$ при $x \in L$.

2. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^N$, $A(x) = \tilde{A}_k [x]^k(e)$ при $x \in L$. Тогда: A — линейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$.

3. Пусть: A — полулинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$. Тогда: $A(x) = \tilde{A}_k \overline{[x]^k(e)}$ при $x \in L$.

4. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^N$, $A(x) = \tilde{A}_k \overline{[x]^k(e)}$ при $x \in L$. Тогда: A — полулинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = A\Big([x]^k(e) e_k\Big) = [x]^k(e) A(e_k) = \tilde{A}_k [x]^k(e).$$

2. Очевидно, A — линейная форма в пространстве L. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_k(e) = A(e_k) = \tilde{A}_i [e_k]^i(e) = \tilde{A}_i \delta_k^i = \tilde{A}_k.$$

3. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = A\Big([x]^k(e) e_k\Big) = \overline{[x]^k(e)} A(e_k) = \tilde{A}_k \overline{[x]^k(e)}.$$

4. Очевидно, A — полулинейная форма в пространстве L. Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_k(e) = A(e_k) = \tilde{A}_i \overline{[e_k]^i(e)} = \tilde{A}_i \overline{\delta_k^i} = \tilde{A}_i \delta_k^i = \tilde{A}_k.$$

□

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e*,* e' *— базисы пространства* L*.*

1. Пусть A *— линейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k'}(e') = [A]_k(e)\alpha_{k'}^k(e,e')$ *при* $k' = \overline{1,N}$*.*

2. Пусть A *— полулинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k'}(e') = [A]_k(e)\overline{\alpha_{k'}^k(e,e')}$ *при* $k' = \overline{1,N}$*.*

Доказательство.

1. Пусть $k' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_{k'}(e') = A(e'_{k'}) = A\Big(\alpha_{k'}^k(e,e')e_k\Big) = \alpha_{k'}^k(e,e')A(e_k) = [A]_k(e)\alpha_{k'}^k(e,e').$$

2. Пусть $k' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_{k'}(e') = A(e'_{k'}) = A\Big(\alpha_{k'}^k(e,e')e_k\Big) = \overline{\alpha_{k'}^k(e,e')}A(e_k) = [A]_k(e)\overline{\alpha_{k'}^k(e,e')}.$$

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Обозначим, $L^* = \mathrm{Lin}(L, \mathbb{K})$. Очевидно: L^* — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L^*) = N$. Тогда $L \approx L^*$. Пространство L^* называют сопряжённым пространством к пространству L.

2. Пусть e — базис пространства L. Пусть: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta_k^m$ при $k, m = \overline{1,N}$. Тогда: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $[\omega^m]_k(e) = \omega^m(e_k) = \delta_k^m$ при $k, m = \overline{1,N}$. Следовательно: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $[\omega^m](e) = \tilde{I}^m$ при $m = \overline{1,N}$.

Пусть: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $[\omega^m](e) = \tilde{I}^m$ при $m = \overline{1,N}$. Тогда: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $[\omega^m]_k(e) = \delta_k^m$ при $k, m = \overline{1,N}$. Следовательно: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = [\omega^m]_k(e) = \delta_k^m$ при $k, m = \overline{1,N}$.

Очевидно, существует единственный набор линейных форм $\omega^1, \ldots, \omega^N$, удовлетворяющий условиям: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta_k^m$ при $k, m = \overline{1,N}$.

3. Пусть e — базис пространства L. Пусть: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta_k^m$ при $k, m = \overline{1,N}$.

Пусть: $x \in L$, $m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\omega^m(x) = [\omega^m]_k(e)[x]^k(e) = \delta_k^m[x]^k(e) = [x]^m(e).$$

Пусть: $A \in L^*$, $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = [A]_k(e)[x]^k(e) = [A]_k(e)\omega^k(x).$$

Так как: $[\omega^m](e) = \tilde{I}^m$ при $m = \overline{1,N}$, то строки $[\omega^1](e), \ldots, [\omega^N](e)$ линейно независимы. Тогда линейные формы $\omega^1, \ldots, \omega^N$ линейно независимы. Так как: $A = [A]_k(e)\omega^k$ при $A \in L^*$, то $\omega^1, \ldots, \omega^N$ — базис пространства L^*. Базис $\omega^1, \ldots, \omega^N$ называют сопряжённым базисом к базису e.

8.2. Билинейные, полуторалинейные, квадратичные, эрмитовы квадратичные формы

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что A — билинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \times L \implies \mathbb{K}$; $A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$ при $x_1, x_2, y \in L$; $A(\lambda x, y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in L$; $A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2)$ при $x, y_1, y_2 \in L$; $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in L$.

2. Будем говорить, что A — полуторалинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \times L \implies \mathbb{K}$; $A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$ при $x_1, x_2, y \in L$; $A(\lambda x, y) = \overline{\lambda} A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in L$; $A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2)$ при $x, y_1, y_2 \in L$; $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in L$.

3. Пусть A — билинейная форма в пространстве L. Будем говорить, что A — симметричная билинейная форма, если: $A(x, y) = A(y, x)$ при $x, y \in L$.

4. Пусть A — полуторалинейная форма в пространстве L. Будем говорить, что A — эрмитова полуторалинейная форма, если: $A(x, y) = \overline{A(y, x)}$ при $x, y \in L$. Пусть A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Тогда: $A(x, x) = \overline{A(x, x)}$ при $x \in L$.

5. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; A — симметричная билинейная форма в пространстве L. Будем писать, что $A > 0$ ($A \geqslant 0$, $A < 0$, $A \leqslant 0$, $A = 0$), если: $A(x, x) > 0$ ($A(x, x) \geqslant 0$, $A(x, x) < 0$, $A(x, x) \leqslant 0$, $A(x, x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что A — знакопеременная форма, если: $\exists x \in L\Big(A(x, x) > 0\Big)$, $\exists x \in L\Big(A(x, x) < 0\Big)$.

6. Пусть A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Будем писать, что $A > 0$ ($A \geqslant 0$, $A < 0$, $A \leqslant 0$, $A = 0$), если: $A(x, x) > 0$ ($A(x, x) \geqslant 0$, $A(x, x) < 0$, $A(x, x) \leqslant 0$, $A(x, x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что A — знакопеременная форма, если: $\exists x \in L\Big(A(x, x) > 0\Big)$, $\exists x \in L\Big(A(x, x) < 0\Big)$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что Q — квадратичная форма в пространстве L, если: $Q\colon L \implies \mathbb{K}$; можно указать такую билинейную форму A в пространстве L, что: $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$.

2. Будем говорить, что Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L, если: $Q\colon L \implies \mathbb{K}$; можно указать такую эрмитову полуторалинейную форму A в пространстве L, что: $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Пусть: Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Тогда: $Q(x) = A(x, x) = \overline{A(x, x)} = \overline{Q(x)}$ при $x \in L$.

3. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — квадратичная форма в пространстве L. Будем писать, что $Q > 0$ ($Q \geqslant 0$, $Q < 0$, $Q \leqslant 0$, $Q = 0$), если: $Q(x) > 0$ ($Q(x) \geqslant 0$, $Q(x) < 0$, $Q(x) \leqslant 0$, $Q(x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что Q — знакопеременная форма, если: $\exists x \in L\Big(Q(x) < 0\Big)$, $\exists x \in L\Big(Q(x) > 0\Big)$.

4. Пусть Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L. Будем писать, что $Q > 0$ ($Q \geqslant 0$, $Q < 0$, $Q \leqslant 0$, $Q = 0$), если: $Q(x) > 0$ ($Q(x) \geqslant 0$, $Q(x) < 0$, $Q(x) \leqslant 0$, $Q(x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что Q — знакопеременная форма, если: $\exists x \in L\Big(Q(x) < 0\Big)$, $\exists x \in L\Big(Q(x) > 0\Big)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. Пусть Q *— квадратичная форма в пространстве* L*. Существует единственная симметричная билинейная форма* A *в пространстве* L*, удовлетворяющая условию:* $Q(x) = A(x, x)$ *при* $x \in L$*.*

2. Пусть Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L. Существует единственная эрмитова полуторалинейная форма A в пространстве L, удовлетворяющая условию: $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$.

Доказательство.

1. По определению квадратичной формы, можно указать такую билинейную форму A_0 в пространстве L, что: $Q(x) = A_0(x, x)$ при $x \in L$. Обозначим: $A(x, y) = \frac{1}{2}\Big(A_0(x, y)+A_0(y, x)\Big)$ при $x, y \in L$. Очевидно, A — билинейная форма в пространстве L. Пусть $x, y \in L$. Тогда:

$$A(x, y) = \frac{1}{2}\Big(A_0(x, y) + A_0(y, x)\Big) = \frac{1}{2}\Big(A_0(y, x) + A_0(x, y)\Big) = A(y, x).$$

Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x, x) = \frac{1}{2}\Big(A_0(x, x) + A_0(x, x)\Big) = A_0(x, x) = Q(x).$$

Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$; $x, y \in L$. Тогда:

$$Q(x + y) = A(x + y, x + y) = A(x, x) + A(x, y) + A(y, x) + A(y, y) = Q(x) + 2A(x, y) + Q(y);$$
$$A(x, y) = \frac{1}{2}\Big(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\Big).$$

Очевидно, форма A определяется однозначно.

2. По определению эрмитовой квадратичной формы, можно указать такую эрмитову полуторалинейную форму A, что: $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$.

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Тогда: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Следовательно, Q — квадратичная форма в пространстве L. Как показано выше, форма A определяется однозначно.

Пусть: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$; $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in L$. Тогда:

$$Q(x + \lambda y) = A(x + \lambda y, x + \lambda y) =$$
$$A(x, x) + A(x, \lambda y) + A(\lambda y, x) + A(\lambda y, \lambda y) =$$
$$A(x, x) + \lambda A(x, y) + \overline{\lambda} A(y, x) + \overline{\lambda}\lambda A(y, y) =$$
$$Q(x) + \lambda A(x, y) + \overline{\lambda} \cdot \overline{A(x, y)} + |\lambda|^2 Q(y) =$$
$$Q(x) + 2\operatorname{Re}\Big(\lambda A(x, y)\Big) + |\lambda|^2 Q(y);$$
$$\operatorname{Re}\Big(\lambda A(x, y)\Big) = \frac{1}{2}\Big(Q(x + \lambda y) - Q(x) - |\lambda|^2 Q(y)\Big);$$
$$\operatorname{Re}\Big(A(x, y)\Big) = \frac{1}{2}\Big(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\Big);$$
$$\operatorname{Im}\Big(A(x, y)\Big) = \operatorname{Re}\Big(-iA(x, y)\Big) = \frac{1}{2}\Big(Q(x - iy) - Q(x) - Q(y)\Big);$$
$$A(x, y) = \operatorname{Re}\Big(A(x, y)\Big) + i\operatorname{Im}\Big(A(x, y)\Big) =$$
$$\frac{1}{2}\Big(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\Big) + \frac{i}{2}\Big(Q(x - iy) - Q(x) - Q(y)\Big).$$

Очевидно, форма A определяется однозначно.

□

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

1. Пусть A — билинейная форма в пространстве L. Обозначим: $[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m)$ при $k, m = \overline{1, N}$.

2. Пусть A — полуторалинейная форма в пространстве L. Обозначим: $[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m)$ при $k, m = \overline{1, N}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e *— базис пространства* L*.*

1. Пусть: A *— билинейная форма в пространстве* L*,* $\tilde{A} = [A](e)$*. Тогда:* $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$*,* $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e)$ *при* $x, y \in L$*.*

2. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$*,* $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ *при* $x, y \in L$*. Тогда:* A *— билинейная форма в пространстве* L*,* $\tilde{A} = [A](e)$*.*

3. Пусть: A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*,* $\tilde{A} = [A](e)$*. Тогда:* $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$*,* $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ *при* $x, y \in L$*.*

4. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$*,* $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ *при* $x, y \in L$*. Тогда:* A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*,* $\tilde{A} = [A](e)$*.*

Доказательство.

1. Пусть $x, y \in L$. Тогда:

$$A(x, y) = A\Big([x]^k(e)e_k, [y]^m(e)e_m\Big) = [x]^k(e)[y]^m(e)A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e).$$

2. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть $k, m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{i,j}[e_k]^i(e)[e_m]^j(e) = \tilde{A}_{i,j}\delta^i_k\delta^j_m = \tilde{A}_{k,m}.$$

3. Пусть $x, y \in L$. Тогда:

$$A(x, y) = A\Big([x]^k(e)e_k, [y]^m(e)e_m\Big) = \overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e).$$

4. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть $k, m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{i,j}\overline{[e_k]^i(e)}[e_m]^j(e) = \tilde{A}_{i,j}\overline{\delta^i_k}\delta^j_m = \tilde{A}_{i,j}\delta^i_k\delta^j_m = \tilde{A}_{k,m}.$$

□

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e*,* e' *— базисы пространства* L*.*

1. Пусть A *— билинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e')$ *при* $k', m' = \overline{1, N}$*.*

2. Пусть A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ *при* $k', m' = \overline{1, N}$*.*

Доказательство.

1. Пусть $k', m' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k',m'}(e') = A(e'_{k'}, e'_{m'}) = A\Big(\alpha^k_{k'}(e, e')e_k, \alpha^m_{m'}(e, e')e_m\Big) = \alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e')A(e_k, e_m) = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e').$$

2. Пусть $k', m' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k',m'}(e') = A(e'_{k'}, e'_{m'}) = A\Big(\alpha^k_{k'}(e, e')e_k, \alpha^m_{m'}(e, e')e_m\Big) = \overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')A(e_k, e_m) = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e').$$

□

Замечание.

1. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$; $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Обозначим: $\Delta_0(\tilde{A}) = 1$, $\Delta_k(\tilde{A}) = \det\Big(\{\tilde{A}_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,k}}\Big)$ при $k = \overline{1,N}$. Числа $\Delta_1(\tilde{A}), \ldots, \Delta_N(\tilde{A})$ называют угловыми минорами матрицы $\tilde{A}$.

Пусть $\tilde{A}$ — эрмитова матрица (т. е. $\tilde{A} = \overline{\tilde{A}^T}$). Очевидно: $\tilde{A}_{k,k} = \overline{\tilde{A}_{k,k}}$, $\Delta_k(\tilde{A}) = \Delta_k\left(\overline{\tilde{A}^T}\right) = \overline{\Delta_k(\tilde{A})}$ при $k = \overline{1,N}$.

2. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$. Очевидно: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — симметричная матрица, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при $x, y \in L$.

Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — симметричная матрица, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при $x, y \in L$. Очевидно: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Пусть: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$. Очевидно: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — эрмитова матрица, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при $x, y \in L$.

Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — эрмитова матрица, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при $x, y \in L$. Очевидно: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

1. Пусть: Q — квадратичная форма в пространстве L; A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Обозначим, $[Q](e) = [A](e)$.

2. Пусть: Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Обозначим, $[Q](e) = [A](e)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e *— базис пространства* L*.*

1. Пусть: Q *— квадратичная форма в пространстве* L*,* $\tilde{Q} = [Q](e)$*. Тогда:* $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $\tilde{Q}$ *— симметричная матрица,* $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)$ *при* $x \in L$*.*

2. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $\tilde{Q}$ *— симметричная матрица,* $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)$ *при* $x \in L$*. Тогда:* Q *— квадратичная форма в пространстве* L*,* $\tilde{Q} = [Q](e)$*.*

3. Пусть: Q *— эрмитова квадратичная форма в пространстве* L*,* $\tilde{Q} = [Q](e)$*. Тогда:* $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $\tilde{Q}$ *— эрмитова матрица,* $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ *при* $x \in L$*.*

4. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $\tilde{Q}$ *— эрмитова матрица,* $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ *при* $x \in L$*. Тогда:* Q *— эрмитова квадратичная форма в пространстве* L*,* $\tilde{Q} = [Q](e)$*.*

Доказательство.

1. Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $\tilde{Q} = [Q](e) = [A](e)$. Следовательно: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — симметричная матрица, $Q(x) = A(x,x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Обозначим: $A(x,y) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при $x, y \in L$. Тогда: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $\tilde{Q} = [A](e)$. Очевидно: $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда Q — квадратичная форма в пространстве L. Следовательно: $[Q](e) = [A](e) = \tilde{Q}$.

3. Пусть: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $\tilde{Q} = [Q](e) = [A](e)$. Следовательно: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — эрмитова матрица, $Q(x) = A(x,x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$.

4. Обозначим: $A(x,y) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при $x, y \in L$. Тогда: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $\tilde{Q} = [A](e)$. Очевидно: $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e) =$

$A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L. Следовательно: $[Q](e) = [A](e) = \tilde{Q}$.

$\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$*;* e, e' *— базисы пространства* L.

1. Пусть Q *— квадратичная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[Q]_{k',m'}(e') = [Q]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e')$ *при* $k', m' = \overline{1,N}$.

2. Пусть Q *— эрмитова квадратичная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[Q]_{k',m'}(e') = [Q]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e')$ *при* $k', m' = \overline{1,N}$.

Доказательство.

1. Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $[Q]_{k',m'}(e') = [A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e') = [Q]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e')$ при $k', m' = \overline{1,N}$.

2. Пусть: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $[Q]_{k',m'}(e') = [A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e') = [Q]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e')$ при $k', m' = \overline{1,N}$.

$\square$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.