Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 9. Метод Лагранжа, закон инерции, критерий Сильвестра

Теорема (метод Лагранжа). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L. *Тогда можно указать такой базис* e' *пространства* L, *что* $[A](e')$ *— диагональная матрица.*

Доказательство. **Докажем вспомогательное утверждение.** Пусть $N \geqslant 2$. Можно указать такой номер $k_0 = \overline{1,N}$ и такой базис e' пространства L, что: $[A]_{k_0,k}(e') = 0$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$.

Пусть: e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$, $x \in L$, $\tilde{x} = [x](e)$.

1. Пусть можно указать такой номер $k_0 = \overline{1,N}$, что $\tilde{A}_{k_0,k_0} \neq 0$. Тогда:

$$
\begin{gathered}
A(x,x) = \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
\tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\ m\neq k_0} \tilde{A}_{k_0,m}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^m + \sum_{k=\overline{1,N},\ k\neq k_0} \tilde{A}_{k,k_0}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{k_0} + \\
\sum_{k,m=\overline{1,N},\ k,m\neq k_0} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
\tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \overline{\tilde{x}^{k_0}} \sum_{m=\overline{1,N},\ m\neq k_0} \tilde{A}_{k_0,m}\tilde{x}^m + \overline{\left(\sum_{k=\overline{1,N},\ k\neq k_0} \tilde{A}_{k_0,k}\tilde{x}^k\right)}\tilde{x}^{k_0} + \\
\sum_{k,m=\overline{1,N},\ k,m\neq k_0} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
\tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \overline{\tilde{x}^{k_0}} \sum_{m=\overline{1,N},\ m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m + \overline{\left(\sum_{k=\overline{1,N},\ k\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)}\tilde{x}^{k_0}\right) + \\
\sum_{k,m=\overline{1,N},\ k,m\neq k_0} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
\tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\overline{\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{k=\overline{1,N},\ k\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)}\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\ m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\right) - \right. \\
\left. \sum_{k,m=\overline{1,N},\ k,m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{(\tilde{A}_{k_0,k_0})^2}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m \right) + \sum_{k,m=\overline{1,N},\ k,m\neq k_0} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
\tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{k=\overline{1,N},\ k\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)}\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\ m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\right) +
\end{gathered}
$$

$$\sum_{k,m=\overline{1,N},\ k,m\neq k_0}\left(\tilde{A}_{k,m}-\frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\right)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{x}}^{k_0}=\tilde{x}^{k_0}+\sum_{m=\overline{1,N},\ m\neq k_0}\frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m,$$
$$\tilde{\tilde{x}}^m=\tilde{x}^m \text{ при: } m=\overline{1,N},\ m\neq k_0.$$

Тогда:

$$A(x,x)=\tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}}\tilde{\tilde{x}}^{k_0}+\sum_{k,m=\overline{1,N},\ k,m\neq k_0}\left(\tilde{A}_{k,m}-\frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\right)\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\tilde{\tilde{x}}^m.$$

Очевидно, можно указать такую матрицу $\beta\in\mathbb{K}^{N\times N}$, что $\tilde{\tilde{x}}=\beta\tilde{x}$. Тогда: $\hat{\beta}\in\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N,\mathbb{K}^N)$, $\hat{\beta}$ — обратимый оператор. Следовательно, $\det(\beta)\neq 0$. Тогда можно указать такой базис e' пространства L, что $\alpha(e',e)=\beta$. Следовательно, $\tilde{\tilde{x}}=[x](e')$. Тогда: $[A]_{k_0,k}(e')=0$, $[A]_{k,k_0}(e')=0$ при: $k=\overline{1,N}$, $k\neq k_0$.

2. Пусть: $\tilde{A}_{k,k}=0$ при $k=\overline{1,N}$; можно указать такие номера k_0, m_0, что: $k_0,m_0=\overline{1,N}$, $k_0<m_0$, $\tilde{A}_{k_0,m_0}\neq 0$. Тогда:

$$A(x,x)=\tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m=$$
$$\tilde{A}_{k_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{m_0}+\tilde{A}_{m_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{k_0}+\sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\(k,m)\neq(k_0,k_0),(k_0,m_0),(m_0,k_0),(m_0,m_0)}}\tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m=$$
$$\tilde{A}_{k_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{m_0}+\overline{\tilde{A}_{k_0,m_0}}\cdot\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{k_0}+\sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\(k,m)\neq(k_0,k_0),(k_0,m_0),(m_0,k_0),(m_0,m_0)}}\tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m.$$

Очевидно, можно указать такой столбец $\tilde{\tilde{x}}\in\mathbb{K}^N$, что:

$$\tilde{x}^{k_0}=\frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0}-\tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right),$$
$$\tilde{x}^{m_0}=\tilde{\tilde{x}}^{k_0}+\tilde{\tilde{x}}^{m_0},$$
$$\tilde{x}^m=\tilde{\tilde{x}}^m \text{ при: } m=\overline{1,N},\ m\neq k_0,m_0.$$

Тогда:

$$A(x,x)=\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}}-\overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0}+\tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right)+\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}}+\overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0}-\tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right)+\left(\cdots\right)=$$
$$2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^1}\tilde{\tilde{x}}^1-\overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right)+\left(\cdots\right).$$

Очевидно, можно указать такую матрицу $\beta\in\mathbb{K}^{N\times N}$, что $\tilde{x}=\beta\tilde{\tilde{x}}$. Тогда: $\hat{\beta}\in\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N,\mathbb{K}^N)$, $\hat{\beta}$ — обратимый оператор. Следовательно, $\det\beta\neq 0$. Тогда можно указать такой базис e' пространства L, что $\alpha(e,e')=\beta$. Следовательно, $\tilde{\tilde{x}}=[x](e')$. Тогда $[A]_{k_0,k_0}(e')\neq 0$. Согласно предыдущему пункту, можно указать такой базис e'' пространства L, что: $[A]_{k_0,k}(e'')=0$, $[A]_{k,k_0}(e'')=0$ при: $k=\overline{1,N}$, $k\neq k_0$.

3. Пусть: $\tilde{A}_{k,k} = 0$ при $k = \overline{1,N}$; $\tilde{A}_{k,m} = 0$ при: $k, m = \overline{1,N}$, $k < m$. Тогда: $\tilde{A}_{k,m} = \overline{\tilde{A}_{m,k}} = \overline{0} = 0$ при: $k, m = \overline{1,N}$, $k > m$. Очевидно, e — искомый базис.

Рассуждая по индукции, нетрудно показать, что справедливо утверждение теоремы. $\square$

Теорема (закон инерции)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*.*

Пусть: e *— базис пространства* L*,* $[A](e)$ *— диагональная матрица,* p_1 *— количество положительных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e)$*,* n_1 *— количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e)$*;* e' *— базис пространства* L*,* $[A](e')$ *— диагональная матрица,* p_2 *— количество положительных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e')$*,* n_2 *— количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e')$*. Тогда:* $p_1 = p_2$*,* $n_1 = n_2$*.*

Доказательство. Обозначим: $\tilde{\lambda}_k = [A]_{k,k}(e)$ при $k = \overline{1,N}$; $\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} = [A]_{k',k'}(e')$ при $k' = \overline{1,N}$. Предположим, что $p_1 < p_2$. Тогда: $p_2 > p_1 \geqslant 0$, $p_1 < p_2 \leqslant N$. Без ограничения общности можно считать, что: $\tilde{\lambda}_k \leqslant 0$ при $k = \overline{p_1+1,N}$; $\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} > 0$ при $k' = \overline{1,p_2}$.

Пусть $p_1 > 0$. Покажем, что существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})$, $x \neq \theta$, $A(e_k, x) = 0$ при $k = \overline{1,p_1}$.

Пусть x — искомый вектор. Так как $x \in L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})$, то можно указать такой столбец $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^{p_2}$, что $x = \sum\limits_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}$. Так как $x \neq \theta$, то $\exists k' = \overline{1,p_2}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k'} \neq 0\Big)$. Пусть $k = \overline{1,p_1}$. Так как $A(e_k, x) = 0$, то:

$$0 = A(e_k, x) = A\bigg(e_k, \sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}\bigg) = \sum_{k'=\overline{1,p_2}} A(e_k, e'_{k'}) \tilde{\tilde{x}}^{k'}.$$

Так как $p_1 < p_2$, то можно указать такой столбец $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^{p_2}$, что: $\exists k' = \overline{1,p_2}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k'} \neq 0\Big)$, $\sum\limits_{k'=\overline{1,p_2}} A(e_k, e'_{k'}) \tilde{\tilde{x}}^{k'} = 0$ при $k = \overline{1,p_1}$. Обозначим, $x = \sum\limits_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}$. Тогда x — искомый вектор.

Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x,x) = A\bigg(\sum_{k=\overline{1,N}} \tilde{x}^k e_k, x\bigg) = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} A(e_k, x) \overline{\tilde{x}^k} =$$

$$\sum_{k=\overline{p_1+1,N}} A\bigg(e_k, \sum_{m=\overline{1,N}} \tilde{x}^m e_m\bigg) \overline{\tilde{x}^k} = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} \tilde{\lambda}_k \left|\tilde{x}^k\right|^2 \leqslant 0;$$

$$A(x,x) = A\bigg(\sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}, \sum_{m'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{m'} e'_{m'}\bigg) = \sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} \left|\tilde{\tilde{x}}^{k'}\right|^2 > 0.$$

Итак, $p_2 \leqslant p_1$.

Пусть $p_1 = 0$. Обозначим, $\tilde{x} = [e'_1](e)$. Тогда:

$$A(e'_1, e'_1) = \sum_{k=\overline{1,N}} \tilde{\lambda}_k \left|\tilde{x}^k\right|^2 \leqslant 0;$$

$$A(e'_1, e'_1) = \tilde{\tilde{\lambda}}_1 > 0.$$

Итак, $p_2 \leqslant p_1$.

Аналогично получаем, что $p_1 \leqslant p_2$. Тогда $p_1 = p_2$. Аналогично получаем, что $n_1 = n_2$. $\square$

Теорема (критерий Сильвестра). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*,* e *— базис пространства* L*,* $\tilde{A} = [A](e)$*.*

1. Справедливо утверждение: $A > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ *при* $k = \overline{1, N}$*.*

2. Справедливо утверждение: $A < 0$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{sgn}\Big(\Delta_k(\tilde{A})\Big) = (-1)^k$ *при* $k = \overline{1, N}$*.*

3. Пусть: $\det(\tilde{A}) \neq 0$*,* $\neg(A > 0)$*,* $\neg(A < 0)$*. Тогда* A *— знакопеременная форма.*

Доказательство. **Докажем вспомогательное утверждение.** Пусть: $N \geqslant 2$, $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})$, $x \neq \theta$. Тогда можно указать такой базис e' пространства L, что: $e'_k = e_k$, $[A]_{k,N}(e') = 0$, $[A]_{N,k}(e') = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$.

Покажем, что существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in L$, $x \neq \theta$, $A(e_k, x) = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$.

Пусть x — искомый вектор. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Так как $x \neq \theta$, то $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}$. Пусть $k = \overline{1, N-1}$. Так как $A(e_k, x) = 0$, то:

$$0 = A(e_k, x) = A\bigg(e_k, \sum_{m=\overline{1,N}} \tilde{x}^m e_m\bigg) = \sum_{m=\overline{1,N}} A(e_k, e_m)\tilde{x}^m.$$

Так как $N - 1 < N$, то можно указать такой столбец $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, что: $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}$, $\sum\limits_{m=\overline{1,N}} A(e_k, e_m)\tilde{x}^m = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$. Обозначим, $x = \sum\limits_{k=\overline{1,N}} \tilde{x}^k e_k$. Тогда x — искомый вектор.

Предположим, что $e_1, \ldots, e_{N-1}, x$ — линейно зависимые векторы. Так как $e_1, \ldots, e_{N-1}$ — линейно независимые векторы, то можно указать такой столбец $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N-1}$, что $x = \sum\limits_{k=\overline{1,N-1}} \tilde{x}^k e_k$. Тогда $x \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})$. Так как $x \neq \theta$, то $A(x, x) > 0$. Очевидно:

$$A(x, x) = A\bigg(\sum_{k=\overline{1,N-1}} \tilde{x}^k e_k, x\bigg) = 0.$$

Итак, $e_1, \ldots, e_{N-1}, x$ — линейно независимые векторы. Обозначим: $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N-1}$; $e'_N = x$. Тогда e' — искомый базис.

1. **Пусть** $A > 0$**. Покажем, что:** $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ **при** $k = \overline{1, N}$**.**

Пусть $N = 1$. Тогда: $\Delta_1(\tilde{A}) = \tilde{A}_{1,1} = A(e_1, e_1) > 0$.

Пусть: $N \geqslant 2$, утверждение справедливо для любого линейного пространства размерности $N - 1$. Так как: $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})$, $x \neq \theta$, то: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N-1}$; можно указать такой базис e' пространства L, что: $e'_k = e_k$, $[A]_{k,N}(e') = 0$, $[A]_{N,k}(e') = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$. Тогда:

$$\Delta_N(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}) = \det\Big(\overline{\big(\alpha(e', e)\big)^T}[A](e')\alpha(e', e)\Big) = \Big|\det\Big(\alpha(e', e)\Big)\Big|^2 \det\Big([A](e')\Big) =$$

$$\Big|\det\Big(\alpha(e', e)\Big)\Big|^2 \Delta_{N-1}\Big([A](e')\Big)[A]_{N,N}(e') = \Big|\det\Big(\alpha(e', e)\Big)\Big|^2 \Delta_{N-1}(\tilde{A})A(e'_N, e'_N) > 0.$$

Пусть: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ **при** $k = \overline{1, N}$**. Покажем, что** $A > 0$**.**

Пусть: $N = 1$; $x \in L$, $x \neq \theta$, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда: $A(x, x) = \tilde{A}_{1,1}\,|\tilde{x}^1|^2 = \Delta_1(\tilde{A})\,|\tilde{x}^1|^2 > 0$.

Пусть: $N \geqslant 2$, утверждение справедливо для любого линейного пространства размерности $N - 1$. Так как: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N-1}$, то: $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})$,

$x \neq \theta$. Тогда можно указать такой базис e' пространства L, что: $e'_k = e_k$, $[A]_{k,N}(e') = 0$, $[A]_{N,k}(e') = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$. Следовательно:

$$\det\Big([A](e')\Big) = \Delta_{N-1}\Big([A](e')\Big)[A]_{N,N}(e') = \Delta_{N-1}(\tilde{A})A(e'_N, e'_N);$$
$$A(e'_N, e'_N) = \frac{\det\Big([A](e')\Big)}{\Delta_{N-1}(\tilde{A})} = \frac{1}{\Delta_{N-1}(\tilde{A})}\det\Big(\overline{\Big(\alpha(e,e')\Big)^T}\tilde{A}\alpha(e,e')\Big) =$$
$$\frac{1}{\Delta_{N-1}(\tilde{A})}\left|\det\Big(\alpha(e,e')\Big)\right|^2\det(\tilde{A}) = \frac{1}{\Delta_{N-1}(\tilde{A})}\left|\det\Big(\alpha(e,e')\Big)\right|^2\Delta_N(\tilde{A}) > 0.$$

Пусть: $x \in L$, $x \neq \theta$, $\tilde{\tilde{x}} = [x](e')$. Тогда:

$$A(x,x) = A\Big(\sum_{k=\overline{1,N}}\tilde{\tilde{x}}^k e'_k, \sum_{m=\overline{1,N}}\tilde{\tilde{x}}^m e'_m\Big) =$$
$$A\Big(\sum_{k=\overline{1,N-1}}\tilde{\tilde{x}}^k e'_k, \sum_{m=\overline{1,N-1}}\tilde{\tilde{x}}^m e'_m\Big) + A(e'_N, e'_N)\left|\tilde{\tilde{x}}^N\right|^2 > 0.$$

2. Обозначим: $B(x,y) = -A(x,y)$ при $x, y \in L$. Тогда B — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Обозначим, $\tilde{B} = [B](e)$. Тогда: $\tilde{B} = -\tilde{A}$; $\Delta_k(\tilde{B}) = \Delta_k(-\tilde{A}) = (-1)^k\Delta_k(\tilde{A})$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть $A < 0$. Тогда $B > 0$. Следовательно: $\operatorname{sgn}\Big(\Delta_k(\tilde{A})\Big) = \operatorname{sgn}\Big((-1)^k\Delta_k(\tilde{B})\Big) = (-1)^k$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть: $\operatorname{sgn}\Big(\Delta_k(\tilde{A})\Big) = (-1)^k$ при $k = \overline{1,N}$. Тогда: $\Delta_k(\tilde{B}) = (-1)^k\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1,N}$. Следовательно, $B > 0$. Тогда $A < 0$.

3. Согласно теореме Лагранжа, можно указать такой базис e' пространства L, что $[A](e')$ — диагональная матрица. Обозначим: $\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} = [A]_{k',k'}(e')$ при $k' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\tilde{\tilde{\lambda}}_1 \ldots \tilde{\tilde{\lambda}}_N = \det\Big([A](e')\Big) = \det\Big(\overline{\Big(\alpha(e,e')\Big)^T}\tilde{A}\alpha(e,e')\Big) = \left|\det\Big(\alpha(e,e')\Big)\right|^2\det(\tilde{A}) \neq 0.$$

Следовательно: $\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} \neq 0$ при $k' = \overline{1,N}$.

Предположим, что: $\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} > 0$ при $k' = \overline{1,N}$. Тогда: $\Delta_{k'}\Big([A](e')\Big) = \tilde{\tilde{\lambda}}_1 \ldots \tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} > 0$ при $k' = \overline{1,N}$. Следовательно, $A > 0$. Итак, $\exists k' = \overline{1,N}\Big(\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} < 0\Big)$.

Предположим, что: $\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} < 0$ при $k' = \overline{1,N}$. Тогда: $\operatorname{sgn}\Big(\Delta_{k'}\Big([A](e')\Big)\Big) = \operatorname{sgn}\Big(\tilde{\tilde{\lambda}}_1 \ldots \tilde{\tilde{\lambda}}_{k'}\Big) = (-1)^{k'}$ при $k' = \overline{1,N}$. Следовательно, $A < 0$. Итак, $\exists k' = \overline{1,N}\Big(\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} > 0\Big)$. Так как: $\exists k' = \overline{1,N}\Big(\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} < 0\Big)$, $\exists k' = \overline{1,N}\Big(\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} > 0\Big)$, то A — знакопеременная форма.

□

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.