Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 10. Евклидовы (унитарные) и псевдоевклидовы пространства

10.1. Евклидовы (унитарные) пространства

Определение. Пусть: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$); L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $F\colon L \times L \implies \mathbb{K}$. Далее будем писать (x, y) вместо $F(x, y)$. Пусть:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ при $x, y \in L$ (очевидно: $(x, x) = \overline{(x, x)}$ при $x \in L$);
2. $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ при $x, y_1, y_2 \in L$;
3. $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in L$;
4. $(x, x) > 0$ при: $x \in L$, $x \neq \theta$.

Будем говорить, что F — скалярное произведение в пространстве L. Будем говорить, что (L, F) — линейное евклидово (линейное унитарное) пространство над полем $\mathbb{K}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть F — скалярное произведение в пространстве L.
   Пусть $x_1, x_2, y \in L$. Тогда: $(x_1 + x_2, y) = \overline{(y, x_1 + x_2)} = \overline{(y, x_1) + (y, x_2)} = \overline{(y, x_1)} + \overline{(y, x_2)} = (x_1, y) + (x_2, y)$.
   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in L$. Тогда: $(\lambda x, y) = \overline{(y, \lambda x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y)$.
   Очевидно, F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L.
2. Пусть F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Очевидно, F — скалярное произведение в пространстве L.

Утверждение (неравенство Коши–Буняковского)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда:* $|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$ *при* $x, y \in H$.

Доказательство. Пусть: $x, y \in H$, $(x, y) = 0$. Тогда:

$$|(x, y)| = 0 \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

Пусть: $x, y \in H$, $(x, y) \neq 0$; $t \in \mathbb{R}$, $\lambda = t\frac{\overline{(x,y)}}{|(x,y)|}$. Тогда:

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqslant 0,$$
$$(x, x) + \lambda(x, y) + \overline{\lambda} \cdot \overline{(x, y)} + \lambda\overline{\lambda}(y, y) \geqslant 0,$$
$$(x, x) + 2\,|(x, y)|\,t + (y, y)t^2 \geqslant 0.$$

В силу произвольности выбора $t \in \mathbb{R}$:

$$4\,|(x, y)|^2 - 4(x, x)(y, y) \leqslant 0,$$
$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $x \in H$. Обозначим, $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Будем говорить, что $\|x\|$ — норма вектора x. Справедливы утверждения:

1.1. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ при $x, y \in H$ (неравенство треугольника);

1.2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$;

1.3. $\|x\| > 0$ при: $x \in H$, $x \neq \theta$ (очевидно: $\|\theta\| = \|0 \cdot \theta\| = 0 \cdot \|\theta\| = 0$).

Пусть $x, y \in H$. Тогда:

$$\|x+y\| = \sqrt{(x+y, x+y)} = \sqrt{(x,x) + 2\operatorname{Re}\big((x,y)\big) + (y,y)} \leqslant$$
$$\sqrt{(x,x) + 2\,|(x,y)| + (y,y)} \leqslant \sqrt{(x,x) + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + (y,y)} =$$
$$\sqrt{\|x\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2} = \sqrt{\big(\|x\| + \|y\|\big)^2} = \|x\| + \|y\|\,.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$. Тогда:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2\,(x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|\,.$$

Пусть: $x \in H$, $x \neq \theta$. Тогда:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} > 0.$$

2. Пусть: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $x, y \in H$, $x, y \neq \theta$. Тогда $\left|\frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}\right| \leqslant 1$. Обозначим: $\varphi(x,y) = \arccos\left(\frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$. Будем говорить, что $\varphi(x,y)$ — угол между векторами x, y. Очевидно: $\varphi(x,y) \in [0, \pi]$, $(x,y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\big(\varphi(x,y)\big)$.

3. Обозначим: $\rho(x,y) = \|x-y\|$ при $x, y \in H$. Очевидно, $\rho\colon H \times H \implies \mathbb{R}$. Будем говорить, что ρ — метрика в пространстве H. Справедливы утверждения:

3.1. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ при $x, y \in H$;

3.2. $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ при $x, y, z \in H$ (неравенство треугольника);

3.3. $\rho(x,y) = 0$ при: $x, y \in H$, $x = y$; $\rho(x,y) > 0$ при: $x, y \in H$, $x \neq y$.

Пусть $x, y \in H$. Тогда:

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = \|y-x\| = \rho(y,x).$$

Пусть $x, y, z \in H$. Тогда:

$$\rho(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y) + (y-z)\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| =$$
$$\rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Пусть: $x, y \in H$, $x = y$. Тогда:

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \|\theta\| = 0.$$

Пусть: $x, y \in H$, $x \neq y$. Тогда:

$$\rho(x,y) = \|x-y\| > 0.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $x, y \in H$. Будем писать $x \perp y$, если $(x,y) = 0$.

Пусть: $x, y \in H$, $x \perp y$. Тогда $(x,y) = 0$. Следовательно: $(y,x) = \overline{(x,y)} = \overline{0} = 0$. Тогда $y \perp x$.

2. Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$. Будем писать $x \perp Q$, если $\forall u \in Q (x \perp u)$.

3. Пусть $Q_1, Q_2 \subseteq H$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$, если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2 (x_1 \perp x_2)$.

Пусть: $Q_1, Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Покажем, что $Q_2 \perp Q_1$. Пусть: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$. Тогда $x_1 \perp x_2$. Следовательно, $x_2 \perp x_1$. Тогда $Q_2 \perp Q_1$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in H$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — ортогональная последовательность векторов пространства H, если: $x_k \perp x_m$ при: $k, m = \overline{1, r}$, $k \neq m$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — ортонормированная последовательность векторов пространства H, если: $x_k \perp x_m$ при: $k, m = \overline{1, r}$, $k \neq m$; $\|x_k\| = 1$ при $k = \overline{1, r}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — ортогональная последовательность векторов пространства H, $x_1, \ldots, x_r \neq \theta$. Тогда $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $C \in \mathbb{K}^r$, $\sum\limits_{m=1}^{r} C^m x_m = \theta$; $k = \overline{1, r}$. Тогда:

$$\left(x_k, \sum_{m=1}^{r} C^m x_m\right) = (x_k, \theta) = 0,$$
$$C^k (x_k, x_k) = 0,$$
$$C^k = 0.$$

Итак, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

5. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq H$. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональная последовательность подмножеств пространства H, если: $Q_k \perp Q_m$ при: $k, m = \overline{1, r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональная последовательность подпространств пространства H. Тогда $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $\sum\limits_{m=1}^{r} x_m = \theta$; $k = \overline{1, r}$. Тогда:

$$\left(x_k, \sum_{m=1}^{r} x_m\right) = (x_k, \theta) = \theta,$$
$$(x_k, x_k) = 0,$$
$$x_k = \theta.$$

Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

6. Пусть $Q \subseteq H$. Обозначим, $Q^\perp = \{x \colon x \in H \wedge x \perp Q\}$. Множество $Q^\perp$ называют ортогональным дополнением к множеству Q.

Пусть $Q \subseteq H$. Покажем, что $Q^\perp$ — подпространство пространства H. Очевидно: $Q^\perp \subseteq H$, $\theta \in Q^\perp$.

Пусть: $x_1, x_2 \in Q^\perp$; $u \in Q$. Тогда: $(x_1, u) = 0$, $(x_2, u) = 0$. Следовательно: $(x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = 0$. Тогда $x_1 + x_2 \in Q^\perp$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q^\perp$; $u \in Q$. Тогда $(x, u) = 0$. Следовательно: $(\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x, u) = 0$. Тогда $\lambda x \in Q^\perp$. Итак, $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Пусть $Q \subseteq H$. Покажем, что $Q^\perp \perp Q$. Пусть: $x_1 \in Q^\perp$, $x_2 \in Q$. Тогда $x_1 \perp x_2$. Следовательно, $Q^\perp \perp Q$.

Пусть: $Q_1, Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Покажем, что $Q_1 \subseteq Q_2^\perp$. Пусть: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$. Тогда $x_1 \perp x_2$. Следовательно, $x_1 \in Q_2^\perp$. Тогда $Q_1 \subseteq Q_2^\perp$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть e — базис пространства H. Обозначим: $g_{\overline{k}, m}(e) = (e_k, e_m)$ при $k, m = \overline{1, N}$. Тогда $g(e)$ — матрица скалярного произведения как полуторалинейной формы в линейном пространстве. Так как скалярное произведение есть эрмитова полуторалинейная форма, то $g(e)$ — эрмитова матрица. Так как скалярное произведение есть положительная эрмитова полуторалинейная форма, то (согласно критерию Сильвестра) $\det\Bigl(g(e)\Bigr) > 0$.

Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда: $g_{\overline{k'}, m'}(e') = g_{\overline{k}, m}(e) \overline{\alpha^k_{k'}(e, e')} \alpha^m_{m'}(e, e')$ при $k', m' = \overline{1, N}$. Геометрический объект g называют ковариантным метрическим тензором пространства H.

2. Пусть e — базис пространства H. Обозначим, $\Bigl\{g^{k, \overline{m}}(e)\Bigr\}^{k, m = \overline{1, N}} = g(e)^{-1}$. Так как $g(e)$ — эрмитова матрица, то $g(e)^{-1}$ — эрмитова матрица. Так как $\det\Bigl(g(e)\Bigr) > 0$, то $\det\Bigl(g(e)^{-1}\Bigr) > 0$.

Пусть e, e' — базисы пространства H. Покажем, что: $g^{k',\overline{m'}}(e') = g^{k,\overline{m}}(e)\alpha_k^{k'}(e',e)\overline{\alpha_m^{m'}(e',e)}$ при $k',m' = \overline{1,N}$. Пусть $k',n' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\left(g^{k,\overline{m}}\alpha_k^{k'}\overline{\alpha_m^{m'}}\right)g_{\overline{m'},n'} = \left(g^{k,\overline{m}}\alpha_k^{k'}\overline{\alpha_m^{m'}}\right)g_{\overline{m'},i'}\delta_{n'}^{i'} = \left(g^{k,\overline{m}}\alpha_k^{k'}\overline{\alpha_m^{m'}}\right)g_{\overline{m'},i'}\alpha_n^{i'}\alpha_{n'}^{n} =$$
$$\alpha_k^{k'}g^{k,\overline{m}}\left(g_{\overline{m'},i'}\overline{\alpha_m^{m'}}\alpha_n^{i'}\right)\alpha_{n'}^{n} = \alpha_k^{k'}g^{k,\overline{m}}g_{\overline{m},n}\alpha_{n'}^{n} = \alpha_k^{k'}\delta_n^k\alpha_{n'}^{n} = \alpha_n^{k'}\alpha_{n'}^{n} = \delta_{n'}^{k'}.$$

Следовательно:

$$\left\{g^{k,\overline{m}}(e)\alpha_k^{k'}(e',e)\overline{\alpha_m^{m'}(e',e)}\right\}^{k',m'=\overline{1,N}} = g(e')^{-1} = \left\{g^{k',\overline{m'}}(e')\right\}^{k',m'=\overline{1,N}}.$$

Геометрический объект $\{g(e)^{-1}\}_e$ называют контравариантным метрическим тензором пространства H.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть e — базис пространства H.

Пусть e — ортогональный базис. Тогда: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{\overline{k},k} = (e_k,e_k)$ при $k = \overline{1,N}$; $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,\overline{k}}(e) = \frac{1}{(e_k,e_k)}$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис.

Пусть $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис.

Согласно теореме Лагранжа, можно указать такой базис e пространства H, что $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис.

Пусть e — базис пространства H.

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда: $g_{\overline{k},m}(e) = \delta_m^k$ при $k,m = \overline{1,N}$; $g^{k,\overline{m}}(e) = \delta_m^k$ при $k,m = \overline{1,N}$.

Пусть: $g_{\overline{k},m}(e) = \delta_m^k$ при $k,m = \overline{1,N}$. Тогда e — ортонормированный базис.

Пусть: $g^{k,\overline{m}}(e) = \delta_m^k$ при $k,m = \overline{1,N}$. Тогда e — ортонормированный базис.

Согласно теореме Лагранжа, можно указать такой базис e пространства H, что $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис. Следовательно, $\frac{1}{\|e_1\|}e_1,\ldots,\frac{1}{\|e_N\|}e_N$ — ортонормированный базис.

2. Пусть: e — базис пространства H, $x,y \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда $(x,y) = g_{\overline{k},m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^m$. Пусть e — ортогональный базис. Тогда $(x,y) = g_{\overline{k},k}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k$. Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{N}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k$.

3. Пусть: e — базис пространства H, $x \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$; $k,m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$(e_m,x) = (e_m,\tilde{x}^n e_n) = \tilde{x}^n(e_m,e_n) = g_{\overline{m},n}\tilde{x}^n;$$
$$g^{k,\overline{m}}(e_m,x) = g^{k,\overline{m}}(g_{\overline{m},n}\tilde{x}^n) = \delta_n^k\tilde{x}^n = \tilde{x}^k.$$

Итак: $\tilde{x}^k = g^{k,\overline{m}}(e_m,x)$ при $k = \overline{1,N}$; $x = g^{k,\overline{m}}(e_m,x)e_k$. Пусть e — ортогональный базис. Тогда: $\tilde{x}^k = \frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)}$ при $k = \overline{1,N}$; $x = \sum\limits_{k=1}^{N}\frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)}e_k$. Пусть e — ортонормированный базис. Тогда: $\tilde{x}^k = (e_k,x)$ при $k = \overline{1,N}$; $x = \sum\limits_{k=1}^{N}(e_k,x)e_k$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H.

1. Пусть: $x \in H$, $x_1 \in Q$, $x - x_1 \perp Q$. Будем говорить, что: x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q, $x - x_1$ — перпендикуляр вектора x к подпространству Q.

2. Пусть: $x \in H$, x_1', x_1'' — ортогональные проекции вектора x на подпространство Q. Тогда: $x_1', x_1'' \in Q$, $x - x_1', x - x_1'' \in Q^\perp$, $x_1' + (x - x_1') = x = x_1'' + (x - x_1'')$. Так как Q, $Q^\perp$ — линейно независимые подпространства, то $x_1' = x_1''$.

3. Пусть: $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $x_1 \in Q$, $x - x_1 \in Q^\perp$. Следовательно: $x - x_1 \in Q^\perp$, $x - (x - x_1) = x_1 \in Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$. Тогда $x - x_1$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство $Q^\perp$.

4. Пусть: $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q; $y \in H$, y_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $x_1 \in Q$, $x - x_1 \in Q^\perp$; $y_1 \in Q$, $y - y_1 \in Q^\perp$. Следовательно: $x_1 + y_1 \in Q$, $(x + y) - (x_1 + y_1) = (x - x_1) + (y - y_1) \in Q^\perp$. Тогда $x_1 + y_1$ — ортогональная проекция вектора $x + y$ на подпространство Q.

5. Пусть: $\lambda \in K$, $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $x_1 \in Q$, $x - x_1 \in Q^\perp$. Следовательно: $\lambda x_1 \in Q$, $\lambda x - \lambda x_1 = \lambda(x - x_1) \in Q^\perp$. Тогда λx_1 — ортогональная проекция вектора λx на подпространство Q.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \wedge x - x_1 \perp Q)$.

1. Очевидно, $\forall x \in H \exists x_2 (x_2 \in Q^\perp \wedge x - x_2 \perp Q^\perp)$.

2. Пусть: $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Обозначим, $P_Q x = x_1$. Оператор P_Q называют оператором ортогонального проектирования на подпространство Q.

Очевидно: $P_Q x \in Q$ при $x \in H$; $P_Q x = x$ при $x \in Q$; $P_Q \in \mathrm{Lin}(H, H)$.

Покажем, что $\mathrm{R}(P_Q) = Q$. Пусть $y \in \mathrm{R}(P_Q)$. Тогда можно указать такой вектор x, что: $x \in H$, $y = P_Q x$. Следовательно, $y \in Q$. Пусть $y \in Q$. Тогда: $y \in H$, $y = P_Q y$. Следовательно, $y \in \mathrm{R}(P_Q)$. Итак, $\mathrm{R}(P_Q) = Q$.

Очевидно: $(P_Q P_Q)x = P_Q\Big(P_Q x\Big) = P_Q x$ при $x \in H$. Тогда $P_Q P_Q = P_Q$.

3. Очевидно: $P_{Q^\perp} x = x - P_Q x = (I - P_Q)x$ при $x \in H$. Тогда $P_{Q^\perp} = I - P_Q$.

4. Очевидно, Q, $Q^\perp$ — линейно независимые подпространства. Покажем, что $H = Q + Q^\perp$. Пусть $x \in H$. Тогда: $P_Q x \in Q$, $x - P_Q x \in Q^\perp$, $x = P_Q x + (x - P_Q x)$. Следовательно, $x \in Q + Q^\perp$. Тогда $H \subseteq Q + Q^\perp$. Очевидно, $Q + Q^\perp \subseteq H$. Тогда $H = Q + Q^\perp$.

Покажем, что $Q = (Q^\perp)^\perp$. Очевидно, $Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$. Пусть $x \in (Q^\perp)^\perp$. Тогда: $x \in (Q^\perp)^\perp$, $P_Q x \in Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$. Следовательно, $x - P_Q x \in (Q^\perp)^\perp$. Так как $x - P_Q x \in Q^\perp$, то:

$$(x - P_Q x, x - P_Q x) = 0,$$
$$x - P_Q x = \theta,$$
$$x = P_Q x \in Q.$$

Тогда $(Q^\perp)^\perp \subseteq Q$. Следовательно, $Q = (Q^\perp)^\perp$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, $\dim(Q) = 0$; $x \in H$.

1. Пусть x_1 — проекция вектора x на подпространство Q. Очевидно, $x_1 = \theta$.

2. Пусть $x_1 = \theta$. Очевидно, x_1 — проекция вектора x на подпространство Q.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q *— подпространство пространства* H*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(Q) = N_1$*;* e *— базис подпространства* Q*,* $x \in H$*.*

1. Пусть x_1 *— проекция вектора* x *на подпространство* Q*. Тогда* $x_1 = G^{\alpha,\overline{\beta}}(e_\beta, x)e_\alpha$*.*

2. Пусть $x_1 = G^{\alpha,\overline{\beta}}(e_\beta, x)e_\alpha$*. Тогда* x_1 *— проекция вектора* x *на подпространство* Q*.*

Доказательство.

1. Так как: $x_1 \in Q$, $x - x_1 \perp Q$, то:

$$x_1 = G^{\alpha,\overline{\beta}}(e_\beta, x_1)e_\alpha = G^{\alpha,\overline{\beta}}\Big(e_\beta, x - (x - x_1)\Big)e_\alpha = G^{\alpha,\overline{\beta}}(e_\beta, x)e_\alpha.$$

2. Очевидно, $x_1 \in Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда:

$$(u, x - x_1) = (u, x) - (u, x_1) = (u, x) - \Big(u, G^{\alpha,\overline{\beta}}(e_\beta, x)e_\alpha\Big) = (u, x) - G^{\alpha,\overline{\beta}}(e_\beta, x)(u, e_\alpha) =$$
$$(u, x) - \overline{G^{\beta,\overline{\alpha}}(e_\alpha, u)}(e_\beta, x) = (u, x) - \Big(G^{\beta,\overline{\alpha}}(e_\alpha, u)e_\beta, x\Big) = (u, x) - (u, x) = 0.$$

Следовательно, $x_1 \perp Q$.

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, $\dim(Q) \neq +\infty$.

1. Очевидно: $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \wedge x - x_1 \perp Q)$, $\forall x \in H \exists x_2 (x_2 \in Q^\perp \wedge x - x_2 \perp Q^\perp)$.
2. Пусть $\dim(Q) = 0$. Очевидно: $P_Q x = \theta$ при $x \in H$. Тогда $P_Q = \Theta$.

   Пусть: $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N_1$; e — базис подпространства Q. Тогда: $P_Q x = G^{\alpha,\overline{\beta}}(e_\beta, x)e_\alpha$ при $x \in H$. Пусть e — ортогональный базис. Тогда: $P_Q x = \sum\limits_{\alpha=1}^{N_1} \frac{(e_\alpha, x)}{(e_\alpha, e_\alpha)} e_\alpha$ при $x \in H$. Пусть e — ортонормированный базис. Тогда: $P_Q x = \sum\limits_{\alpha=1}^{N_1} (e_\alpha, x)e_\alpha$ при $x \in H$.

Теорема (процесс ортогонализации Грама–Шмидта)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы пространства* H*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$.

Существует последовательность векторов $y_1, \ldots, y_r$*, удовлетворяющая условиям:* $y_1, \ldots, y_k$ *— ортогональный базис линейной оболочки* $L(x_1, \ldots, x_k)$ *при* $k = \overline{1, r}$*;* $y_1 = \lambda_1 x_1$*,* $y_k = \lambda_k\Big(x_k - \sum\limits_{m=1}^{k-1} \frac{(y_m, x_k)}{(y_m, y_m)} y_m\Big)$ *при* $k = \overline{2, r}$.

Доказательство. Пусть $r = 1$. Обозначим, $y_1 = \lambda_1 x_1$. Тогда y_1 — искомая последовательность.

Пусть: $r \geqslant 2$, существует последовательность векторов $y_1, \ldots, y_{r-1}$, удовлетворяющая условиям: $y_1, \ldots, y_k$ — ортогональный базис линейной оболочки $L(x_1, \ldots, x_k)$ при $k = \overline{1, r-1}$; $y_1 = \lambda_1 x_1$, $y_k = \lambda_k\Big(x_k - \sum\limits_{m=1}^{k-1} \frac{(y_m, x_k)}{(y_m, y_m)} y_m\Big)$ при $k = \overline{2, r-1}$. Обозначим, $y_r = \lambda_r\Big(x_r - \sum\limits_{m=1}^{r-1} \frac{(y_m, x_r)}{(y_m, y_m)} y_m\Big)$. Тогда $y_r \in L(x_1, \ldots, x_r)$.

Пусть $k = \overline{1, r-1}$. Тогда:

$$(y_k, y_r) = \left(y_k, \lambda_r\left(x_r - \sum_{m=1}^{r-1} \frac{(y_m, x_r)}{(y_m, y_m)} y_m\right)\right) = \lambda_r\left((y_k, x_r) - \frac{(y_k, x_r)}{(y_k, y_k)}(y_k, y_k)\right) = 0.$$

Предположим, что $y_r = \theta$. Тогда:

$$x_r = \sum_{m=1}^{r-1} \frac{(y_m, x_r)}{(y_m, y_m)} y_m \in L(x_1, \ldots, x_{r-1}).$$

Следовательно, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Итак, $y_r \neq \theta$. Очевидно, $y_1, \ldots, y_r$ — искомая последовательность. □

10.2. Псевдоевклидовы пространства

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

Пусть: F — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, удовлетворяющая условию: $\det\Big([F](e)\Big) \neq 0$ при: e — базис пространства L. Далее будем писать (x, y) вместо $F(x, y)$. Будем говорить, что F — псевдоскалярное произведение в пространстве L. Будем говорить, что (L, F) — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть $x, y \in H$. Будем писать $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.

Пусть: $x, y \in H$, $x \perp y$. Тогда $(x, y) = 0$. Следовательно: $(y, x) = \overline{(x, y)} = \overline{0} = 0$. Тогда $y \perp x$.

2. Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$. Будем писать $x \perp Q$, если $\forall u \in Q (x \perp u)$.

3. Пусть $Q_1, Q_2 \subseteq H$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$, если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2 (x_1 \perp x_2)$.

Пусть: $Q_1, Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Покажем, что $Q_2 \perp Q_1$. Пусть: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$. Тогда $x_1 \perp x_2$. Следовательно, $x_2 \perp x_1$. Тогда $Q_2 \perp Q_1$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in H$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортогональная последовательность векторов пространства H, если: $x_k \perp x_m$ при: $k, m = \overline{1, r}$, $k \neq m$.

5. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq H$. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — псевдоортогональная последовательность подмножеств пространства H, если: $Q_k \perp Q_m$ при: $k, m = \overline{1, r}$, $k \neq m$.

6. Пусть $Q \subseteq H$. Обозначим, $Q^{\perp} = \{x \colon x \in H \wedge x \perp Q\}$. Множество $Q^{\perp}$ называют псевдоортогональным дополнением к множеству Q.

Пусть $Q \subseteq H$. Покажем, что $Q^{\perp}$ — подпространство пространства H. Очевидно: $Q^{\perp} \subseteq H$, $\theta \in Q^{\perp}$.

Пусть: $x_1, x_2 \in Q^{\perp}$; $u \in Q$. Тогда $(x_1, u), (x_2, u) = 0$. Следовательно: $(x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = 0$. Тогда $x_1 + x_2 \in Q^{\perp}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q^{\perp}$; $u \in Q$. Тогда $(x, u) = 0$. Следовательно: $(\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x, u) = 0$. Тогда $\lambda x \in Q^{\perp}$. Итак, $Q^{\perp}$ — подпространство пространства H.

Пусть $Q \subseteq H$. Покажем, что $Q^{\perp} \perp Q$. Пусть: $x_1 \in Q^{\perp}$, $x_2 \in Q$. Тогда $x_1 \perp x_2$. Следовательно, $Q^{\perp} \perp Q$.

Пусть: $Q_1, Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Покажем, что $Q_1 \subseteq Q_2^{\perp}$. Пусть: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$. Тогда $x_1 \perp x_2$. Следовательно, $x_1 \in Q_2^{\perp}$. Тогда $Q_1 \subseteq Q_2^{\perp}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть e — базис пространства H. Обозначим: $g_{\overline{k}, m}(e) = (e_k, e_m)$ при $k, m = \overline{1, N}$. Тогда $g(e)$ — матрица псевдоскалярного произведения как полуторалинейной формы в линейном пространстве. Так как псевдоскалярное произведение есть эрмитова полуторалинейная форма, то $g(e)$ — эрмитова матрица. По определению псевдоскалярного произведения, $\det\Big(g(e)\Big) \neq 0$.

Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда: $g_{\overline{k'}, m'}(e') = g_{\overline{k}, m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ при $k', m' = \overline{1, N}$. Геометрический объект g называют ковариантным метрическим тензором пространства H.

2. Пусть e — базис пространства H. Обозначим, $\Big\{g^{k, \overline{m}}(e)\Big\}^{k, m = \overline{1, N}} = g(e)^{-1}$. Так как $g(e)$ — эрмитова матрица, то $g(e)^{-1}$ — эрмитова матрица. Так как $\det\Big(g(e)\Big) \neq 0$, то $\det\Big(g(e)^{-1}\Big) \neq 0$.

Пусть e, e' — базисы пространства H. Покажем, что: $g^{k', \overline{m'}}(e') = g^{k, \overline{m}}(e)\alpha^{k'}_k(e', e)\overline{\alpha^{m'}_m(e', e)}$ при $k', m' = \overline{1, N}$. Пусть $k', n' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\Big(g^{k, \overline{m}}\alpha^{k'}_k\overline{\alpha^{m'}_m}\Big)g_{\overline{m'}, n'} = \Big(g^{k, \overline{m}}\alpha^{k'}_k\overline{\alpha^{m'}_m}\Big)g_{\overline{m'}, i'}\delta^{i'}_{n'} = \Big(g^{k, \overline{m}}\alpha^{k'}_k\overline{\alpha^{m'}_m}\Big)g_{\overline{m'}, i'}\alpha^{i'}_n\alpha^n_{n'} =$$
$$\alpha^{k'}_k g^{k, \overline{m}}\Big(g_{\overline{m'}, i'}\overline{\alpha^{m'}_m}\alpha^{i'}_n\Big)\alpha^n_{n'} = \alpha^{k'}_k g^{k, \overline{m}} g_{\overline{m}, n}\alpha^n_{n'} = \alpha^{k'}_k\delta^k_n\alpha^n_{n'} = \alpha^{k'}_n\alpha^n_{n'} = \delta^{k'}_{n'}.$$

Следовательно:

$$\Big\{g^{k, \overline{m}}(e)\alpha^{k'}_k(e', e)\overline{\alpha^{m'}_m(e', e)}\Big\}^{k', m' = \overline{1, N}} = g(e')^{-1} = \Big\{g^{k', \overline{m'}}(e')\Big\}^{k', m' = \overline{1, N}}.$$

Геометрический объект $\{g(e)^{-1}\}_e$ называют контравариантным метрическим тензором пространства H.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть e — базис пространства H.

   Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{\overline{k},k} = (e_k, e_k)$ при $k = \overline{1,N}$ (так как $\det\Big(g(e)\Big) \neq 0$, то: $(e_k, e_k) \neq 0$ при $k = \overline{1,N}$); $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,\overline{k}}(e) = \frac{1}{(e_k,e_k)}$ при $k = \overline{1,N}$.

   Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис.

   Пусть $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис.

   Согласно теореме Лагранжа, можно указать такой базис e пространства H, что $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис.

2. Пусть: e — базис пространства H, $x, y \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда $(x, y) = g_{\overline{k},m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^m$. Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда $(x, y) = g_{\overline{k},k}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k$.

3. Пусть: e — базис пространства H, $x \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$; $k, m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$(e_m, x) = (e_m, \tilde{x}^n e_n) = \tilde{x}^n (e_m, e_n) = g_{\overline{m},n}\tilde{x}^n;$$
$$g^{k,\overline{m}}(e_m, x) = g^{k,\overline{m}}(g_{\overline{m},n}\tilde{x}^n) = \delta^k_n \tilde{x}^n = \tilde{x}^k.$$

Итак: $\tilde{x}^k = g^{k,\overline{m}}(e_m, x)$ при $k = \overline{1,N}$; $x = g^{k,\overline{m}}(e_m, x)e_k$. Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда: $\tilde{x}^k = \frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)}$ при $k = \overline{1,N}$; $x = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)} e_k$.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.