Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 11. Сопряжённый оператор

11.1. Связь между векторами и линейными формами в евклидовых пространствах

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $x_1, x_2 \in H$*,* $(x_1, y) = (x_2, y)$ *при* $y \in H$*. Тогда* $x_1 = x_2$*.*

Доказательство. Очевидно: $(x_1 - x_2, x_1 - x_2) = (x_1, x_1 - x_2) - (x_2, x_1 - x_2) = 0$. Тогда $x_1 - x_2 = \theta$. Следовательно, $x_1 = x_2$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $x \in H$. Обозначим: $\langle x|\, u = (x, u)$ при $u \in H$. Очевидно, $\langle x|$ — линейная форма в пространстве H. Линейные формы часто называют ковекторами. Обозначим, $|x\rangle = x$.

Пусть: $x_1, x_2 \in H$; $u \in H$. Тогда: $\langle x_1 + x_2|\, u = (x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = \langle x_1|\, u + \langle x_2|\, u = \big(\langle x_1| + \langle x_2|\big)u$. Следовательно, $\langle x_1 + x_2| = \langle x_1| + \langle x_2|$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$; $u \in H$. Тогда: $\langle \lambda x|\, u = (\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x, u) = \overline{\lambda}\,\langle x|\,(u) = \big(\overline{\lambda}\,\langle x|\big)u$. Следовательно, $\langle \lambda x| = \overline{\lambda}\,\langle x|$.

Пусть: $x_1, x_2 \in H$, $\langle x_1| = \langle x_2|$; $u \in H$. Тогда: $(x_1, u) = \langle x_1|\, u = \langle x_2|\, u = (x_2, u)$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Пусть $x, y \in H$. Тогда: $\langle x|\,|y\rangle = \langle x|\, y = (x, y)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $x \in H$*,* e *— базис пространства* H*.*

1. Пусть: $F(u) = (x, u)$ *при* $u \in H$*. Тогда:* F *— линейная форма в пространстве* H*,* $[F]_k(e) = \overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e)$ *при* $k = \overline{1, N}$ *(*$[F](e) = \overline{[x](e)^T}g(e)$*).*

2. Пусть: F *— линейная форма в пространстве* H*,* $[F]_k(e) = \overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e)$ *при* $k = \overline{1, N}$ *(*$[F](e) = \overline{[x](e)^T}g(e)$*). Тогда:* $F(u) = (x, u)$ *при* $u \in H$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, F — линейная форма в пространстве H. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда: $[F]_k(e) = F(e_k) = (x, e_k) = \Big([x]^m(e)e_m, e_k\Big) = \overline{[x]^m(e)}(e_m, e_k) = \overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e)$.

2. Пусть $u \in H$. Тогда: $F(u) = [F]_k(e)[u]^k(e) = \Big(\overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e)\Big)[u]^k(e) = (x, u)$.

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; F — линейная форма в пространстве H, e — базис пространства H.

Пусть: $x \in H$, $[x]^m(e) = \overline{[F]_n(e)g^{n,\overline{m}}(e)}$ при $m = \overline{1, N}$. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда: $\overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e) = \Big([F]_n(e)g^{n,\overline{m}}(e)\Big)g_{\overline{m},k}(e) = [F]_n(e)\delta^n_k = [F]_k(e)$. Следовательно: $F(u) = (x, u)$ при $u \in H$.

11.2. Связь между линейными операторами и полуторалинейными формами в евклидовых пространствах

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$. Обозначим: $F(x, y) = (x, Ay)$ при $x, y \in H$. Очевидно, F — полуторалинейная форма в пространстве H.

Пусть: $A_1, A_2 \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $F_1(x, y) = (x, A_1 y)$, $F_2(x, y) = (x, A_2 y)$ при $x, y \in H$; $F_1 = F_2$; $x, y \in H$. Тогда: $(x, A_1 y) = F_1(x, y) = F_2(x, y) = (x, A_2 y)$. Следовательно, $A_1 y = A_2 y$. Тогда $A_1 = A_2$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* e *— базис пространства* H*.*

1. Пусть: $F(x, y) = (x, Ay)$ *при* $x, y \in H$*. Тогда:* F *— полуторалинейная форма в пространстве* H*,* $[F]_{\overline{k},m}(e) = g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)$ *при* $k, m = \overline{1, N}$ *(*$[F](e) = g(e)[A](e)$*).*

2. Пусть: F *— полуторалинейная форма в пространстве* H*,* $[F]_{\overline{k},m}(e) = g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)$ *при* $k, m = \overline{1, N}$ *(*$[F](e) = g(e)[A](e)$*). Тогда:* $F(x, y) = (x, Ay)$ *при* $x, y \in H$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, F — полуторалинейная форма в пространстве H. Пусть $k, m = \overline{1, N}$. Тогда: $[F]_{\overline{k},m}(e) = F(e_k, e_m) = (e_k, Ae_m) = (e_k, [A]^n_m(e)e_n) = [A]^n_m(e)(e_k, e_n) = g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)$.

2. Пусть $x, y \in H$. Тогда: $F(x, y) = [F]_{\overline{k},m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e) = \left(g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)\right)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e) = g_{\overline{k},n}(e)\overline{[x]^k(e)}[Ay]^n(e) = (x, Ay)$.

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; F — полуторалинейная форма в пространстве H.

Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $[A]^n_m(e) = g^{n,\overline{i}}(e)[F]_{\overline{i},m}(e)$ при $n, m = \overline{1, N}$. Пусть $k, m = \overline{1, N}$. Тогда: $g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e) = g_{\overline{k},n}(e)\left(g^{n,\overline{i}}(e)[F]_{\overline{i},m}(e)\right) = \delta^i_k[F]_{\overline{i},m}(e) = [F]_{\overline{k},m}(e)$. Следовательно: $F(x, y) = (x, Ay)$ при $x, y \in H$.

11.3. Сопряжённый оператор

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon H_1 \to H_2$.

1. Будем говорить, что B — формально сопряжённый оператор к оператору A, если: $B\colon H_2 \to H_1$, $(x, Ay) = (Bx, y)$ при: $x \in \mathrm{D}(B)$, $y \in \mathrm{D}(A)$.

2. Обозначим, $\mathrm{D}^*(A) = \left\{x\colon x \in H_2 \wedge \exists z \in H_1 \forall y \in \mathrm{D}(A)\left((x, Ay) = (z, y)\right)\right\}$. Будем говорить, что B — сопряжённый оператор к оператору A, если: $B\colon H_2 \to H_1$, $(x, Ay) = (Bx, y)$ при: $x \in \mathrm{D}(B)$, $y \in \mathrm{D}(A)$; $\mathrm{D}(B) = \mathrm{D}^*(A)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_1) = N_1$*;* H_2 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_2) = N_2$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$*,* e *— базис пространства* H_1*,* f *— базис пространства* H_2*. Тогда:*

1. существует единственный оператор B*, удовлетворяющий условию:* B *— сопряжённый оператор к оператору* A*;*

2. $B \in \mathrm{Lin}(H_2, H_1)$*,* $[B]^\alpha_k(e, f) = \overline{g_{\overline{k},m}(f)[A]^m_\beta(f, e)G^{\beta,\overline{\alpha}}(e)}$ *при:* $\alpha = \overline{1, N_1}$*,* $k = \overline{1, N_2}$ *(*$[B](e, f) = \overline{\left(g(f)[A](f, e)G(e)^{-1}\right)^T}$*).*

Доказательство. Пусть: $B \in \mathrm{Lin}(H_2, H_1)$, $[B]^\alpha_k(e, f) = \overline{g_{\overline{k},m}(f)[A]^m_\beta(f, e)G^{\beta,\overline{\alpha}}(e)}$ при: $\alpha = \overline{1, N_1}$, $k = \overline{1, N_2}$ ($[B](e, f) = \overline{\left(g(f)[A](f, e)G(e)^{-1}\right)^T}$); $x \in H_2$, $\tilde{x} = [x](f)$, $y \in H_1$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда:

$$(x, Ay) = g_{\overline{k},m}\overline{\tilde{x}^k}[Ay]^m = g_{\overline{k},m}\overline{\tilde{x}^k}\left([A]^m_\beta \tilde{y}^\beta\right) = g_{\overline{k},m}\overline{\tilde{x}^k}\left([A]^m_\beta \delta^\beta_\gamma \tilde{y}^\gamma\right) = g_{\overline{k},m}\overline{\tilde{x}^k}\left([A]^m_\beta G^{\beta,\overline{\alpha}} G_{\overline{\alpha},\gamma}\tilde{y}^\gamma\right) =$$

$$G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{\Big(\overline{\big(g_{\overline{k},m}[A]^m_\beta G^{\beta,\overline{\alpha}}\big)}\tilde{x}^k\Big)}\tilde{y}^\gamma = G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{\big([B]^\alpha_k\tilde{x}^k\big)}\tilde{y}^\gamma = G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{[Bx]^\alpha}\tilde{y}^\gamma = (Bx,y).$$

Так как $\mathrm{D}(B) = H_2$, то B — сопряжённый оператор к оператору A.

Пусть B_1, B_2 — сопряжённые операторы к оператору A. Тогда: $\mathrm{D}(B_1) = \mathrm{D}^*(A)$, $\mathrm{D}(B_2) = \mathrm{D}^*(A)$. Пусть: $x \in \mathrm{D}^*(A)$, $y \in H_1$. Тогда: $(B_1x,y) = (x,Ay) = (B_2x,y)$. Следовательно, $B_1x = B_2x$. Тогда $B_1 = B_2$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H_1 — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(H_1) = N_1$; H_2 — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(H_2) = N_2$; e — базис пространства H_1, f — базис пространства H_2.

Пусть $A \in \mathrm{Lin}(H_1,H_2)$. Обозначим через A^* сопряжённый оператор к оператору A. Тогда $[A^*](e,f) = \overline{\big(g(f)[A](f,e)G(e)^{-1}\big)^T}$. Пусть: e — ортонормированный базис пространства H_1, f — ортонормированный базис пространства H_2. Тогда $[A^*](e,f) = \overline{[A](f,e)^T}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H_1 — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(H_1) = N_1$; H_2 — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(H_2) = N_2$; H_3 — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_3 \in \mathbb{N}$, $\dim(H_3) = N_3$.

Пусть: $A_1, A_2 \in \mathrm{Lin}(H_1,H_2)$; $x \in H_2$, $y \in H_1$. Тогда: $\big(x,(A_1+A_2)y\big) = (x, A_1y + A_2y) = (x,A_1y) + (x,A_2y) = (A_1^*x,y) + (A_2^*x,y) = (A_1^*x + A_2^*x, y) = \big((A_1^*+A_2^*)x,y\big)$. Так как $\mathrm{D}(A_1^*+A_2^*) = H_2$, то $A_1^*+A_2^* = (A_1+A_2)^*$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{Lin}(H_1,H_2)$; $x \in H_2$, $y \in H_1$. Тогда: $\big(x,(\lambda A)y\big) = \big(x,\lambda A(y)\big) = \lambda(x,Ay) = \lambda(A^*x,y) = \big(\overline{\lambda}A^*(x),y\big) = \big((\overline{\lambda}A^*)x,y\big)$. Так как $\mathrm{D}(\overline{\lambda}A^*) = H_2$, то $\overline{\lambda}A^* = (\lambda A)^*$.

Пусть $A \in \mathrm{Lin}(H_1,H_2)$. Тогда $A^* \in \mathrm{Lin}(H_2,H_1)$. Пусть: $x \in H_1$, $y \in H_2$. Тогда: $(x,A^*y) = \overline{(A^*y,x)} = \overline{(y,Ax)} = (Ax,y)$. Так как $\mathrm{D}(A) = H_1$, то $A = (A^*)^*$.

Пусть: $A_1 \in \mathrm{Lin}(H_1,H_2)$, $A_2 \in \mathrm{Lin}(H_2,H_3)$; $x \in H_3$, $y \in H_1$. Тогда: $\big(x,(A_2A_1)y\big) = \big(x,A_2(A_1y)\big) = (A_2^*x, A_1y) = \big(A_1^*(A_2^*x),y\big) = \big((A_1^*A_2^*)x,y\big)$. Так как $\mathrm{D}(A_1^*A_2^*) = H_3$, то $A_1^*A_2^* = (A_1A_2)^*$.

Теорема (2-я теорема Фредгольма). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$*;* H_1 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_1) = N_1$*;* H_2 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_2) = N_2$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1,H_2)$*. Тогда* $\mathrm{R}(A) = \ker(A^*)^\perp$.

Доказательство. Покажем, что $\ker(A^*) = \mathrm{R}(A)^\perp$. Пусть: $x \in \ker(A^*)$; $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда: $x \in H_2$, $A^*x = \theta_1$; можно указать такой вектор u, что: $u \in H_1$, $y = Au$. Следовательно: $(x,y) = (x,Au) = (A^*x,u) = (\theta_1,u) = 0$. Тогда $x \in \mathrm{R}(A)^\perp$.

Пусть $x \in \mathrm{R}(A)^\perp$. Тогда:

$$(A^*x, A^*x) = \big(x, A(A^*x)\big) = 0;$$
$$A^*x = \theta_1;$$
$$x \in \ker(A^*).$$

Итак, $\ker(A^*) = \mathrm{R}(A)^\perp$.

Так как: $\dim(H_2) = N_2 \neq +\infty$, то: $\mathrm{R}(A) = \big(\mathrm{R}(A)^\perp\big)^\perp = \ker(A^*)^\perp$. □

11.4. Самосопряжённый оператор

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $A\colon H \to H$.

1. Будем говорить, что A — формально самосопряжённый оператор, если: $(x,Ay) = (Ax,y)$ при $x,y \in \mathrm{D}(A)$.

2. Будем говорить, что A — самосопряжённый оператор, если: $(x,Ay) = (Ax,y)$ при $x,y \in \mathrm{D}(A)$; $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}^*(A)$ ($\mathrm{D}^*(A) = \Big\{x\colon x \in H \land \exists z \in H \forall y \in \mathrm{D}(A)\big((x,Ay) = (z,y)\big)\Big\}$).

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$*,* $F(x, y) = (x, Ay)$ *при* $x, y \in H$*. Оператор* A *является самосопряжённым тогда и только тогда, когда* F *— эрмитова форма.*

Доказательство. Пусть: A — самосопряжённый оператор; $x, y \in H$. Тогда: $F(x, y) = (x, Ay) = (Ax, y) = \overline{(y, Ax)} = \overline{F(y, x)}$. Итак, F — эрмитова форма.

Пусть: F — эрмитова форма; $x, y \in H$. Тогда: $(x, Ay) = F(x, y) = \overline{F(y, x)} = \overline{(y, Ax)} = (Ax, y)$. Так как $\mathrm{D}(A) = H$, то A — самосопряжённый оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$*,* e *— базис пространства* H*. Оператор* A *является самосопряжённым тогда и только тогда, когда* $g(e)[A](e)$ *— эрмитова матрица.*

Доказательство. Обозначим: $F(x, y) = (x, Ay)$ при $x, y \in H$. Тогда: F — полуторалинейная форма в пространстве H, $[F](e) = g(e)[A](e)$.

Пусть A — самосопряжённый оператор. Тогда F — эрмитова форма. Следовательно, $[F](e)$ — эрмитова матрица. Тогда $g(e)[A](e)$ — эрмитова матрица.

Пусть $g(e)[A](e)$ — эрмитова матрица. Тогда $[F](e)$ — эрмитова матрица. Следовательно, F — эрмитова форма. Тогда A — самосопряжённый оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$*. Оператор* A *является самосопряжённым тогда и только тогда, когда* $A = A^*$*.*

Доказательство. Пусть: A — самосопряжённый оператор; $x, y \in H$. Тогда $(x, Ay) = (Ax, y)$. Так как $\mathrm{D}(A) = H$, то $A = A^*$.

Пусть: $A = A^*$; $x, y \in H$. Тогда: $(x, Ay) = (A^* x, y) = (Ax, y)$. Так как $\mathrm{D}(A) = H$, то A — самосопряжённый оператор. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $A, B \colon H \to H$, A, B — формально самосопряжённые операторы; $x, y \in \mathrm{D}(A + B)$. Тогда: $\big(x, (A + B)y\big) = (x, Ay + By) = (x, Ay) + (x, By) = (Ax, y) + (Bx, y) = (Ax + Bx, y) = \big((A + B)x, y\big)$. Следовательно, $A + B$ — формально самосопряжённый оператор.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda = \overline{\lambda}$, $A \colon H \to H$, A — формально самосопряжённый оператор; $x, y \in \mathrm{D}(\lambda A)$. Тогда: $\big(x, (\lambda A)y\big) = \big(x, \lambda A(y)\big) = \lambda(x, Ay) = \overline{\lambda}(Ax, y) = \big(\lambda A(x), y\big) = \big((\lambda A)x, y\big)$. Следовательно, λA — формально самосопряжённый оператор.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. Пусть: Q *— подпространство пространства* H*,* $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \wedge x - x_1 \perp Q)$*. Тогда:* $P_Q \in \operatorname{Lin}(H, H)$*,* $\mathrm{R}(P_Q) = Q$*,* $P_Q^2 = P_Q$*,* P_Q *— самосопряжённый оператор.*

2. Пусть: $P \in \operatorname{Lin}(H, H)$*,* $P^2 = P$*,* P *— самосопряжённый оператор. Тогда:* $\mathrm{R}(P)$ *— подпространство пространства* H*,* $\forall x \in H \exists x_1 \Big(x_1 \in \mathrm{R}(P) \wedge x - x_1 \perp \mathrm{R}(P)\Big)$*,* $P = P_{\mathrm{R}(P)}$*.*

Доказательство.

1. Очевидно: $P_Q \in \operatorname{Lin}(H, H)$, $\mathrm{R}(P_Q) = Q$, $P_Q^2 = P_Q$. Пусть $x, y \in H$. Тогда: $(x, P_Q y) = \Big(P_Q x + (x - P_Q x), P_Q y\Big) = (P_Q x, P_Q y) = \Big(P_Q x, P_Q y + (y - P_Q y)\Big) = (P_Q x, y)$. Так как $\mathrm{D}(P_Q) = H$, то P_Q — самосопряжённый оператор.

2. Очевидно, $\mathrm{R}(P)$ — подпространство пространства H. Пусть $x \in H$. Тогда $Px \in \mathrm{R}(P)$. Пусть $v \in \mathrm{R}(P)$. Тогда можно указать такой вектор u, что: $u \in H$, $v = Pu$. Следовательно: $(v, x - Px) = (Pu, x - Px) = \Big(u, P(x - Px)\Big) = \Big(u, Px - P(Px)\Big) = (u, Px - Px) = (u, \theta) = 0$. Тогда $x - Px \perp \mathrm{R}(P)$. В силу произвольности выбора вектора $x \in H$: $\forall x \in H \exists x_1 \Big(x_1 \in \mathrm{R}(P) \wedge x - x_1 \perp \mathrm{R}(P)\Big)$, $Px = P_{\mathrm{R}(P)} x$ при $x \in H$. Тогда: $\forall x \in H \exists x_1 \Big(x_1 \in \mathrm{R}(P) \wedge x - x_1 \perp \mathrm{R}(P)\Big)$, $P = P_{\mathrm{R}(P)}$.

□

11.5. Ортогональный (унитарный) оператор

Определение. Пусть: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$); H_1, H_2 — линейные евклидовы (линейные унитарные) пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{Lin}(H_1, H_2)$. Будем говорить, что A — ортогональный (унитарный) оператор, если: $(Ax, Ay) = (x, y)$ при $x, y \in H_1$.

Утверждение. *Пусть: H_1, H_2 — линейные унитарные пространства над полем $\mathbb{C}$; $A \in \operatorname{Lin}(H_1, H_2)$. Оператор A является унитарным тогда и только тогда, когда: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H_1$.*

Доказательство. Пусть: A — унитарный оператор; $x \in H_1$. Тогда: $\|Ax\| = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|$.

Пусть: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H_1$. Обозначим: $F_1(x, y) = (x, y)$, $F_2(x, y) = (Ax, Ay)$ при $x, y \in H_1$; $Q_1(x) = (x, x)$, $Q_2(x) = (Ax, Ax)$ при $x \in H_1$. Тогда: F_1, F_2 — эрмитовы полуторалинейные формы в пространстве H_1; Q_1, Q_2 — эрмитовы квадратичные формы в пространстве H_1; $Q_1(x) = F_1(x, x)$, $Q_2(x) = F_2(x, x)$ при $x \in H_1$. Пусть $x, y \in H_1$. Тогда:

$$(Ax, Ay) = \frac{1}{2}\Big(\big(A(x+y), A(x+y)\big) - (Ax, Ax) - (Ay, Ay)\Big) + \\ \frac{i}{2}\Big(\big(A(x-iy), A(x-iy)\big) - (Ax, Ax) - (Ay, Ay)\Big) = \\ \frac{1}{2}\big((x+y, x+y) - (x, x) - (y, y)\big) + \frac{i}{2}\big((x-iy, x-iy) - (x, x) - (y, y)\big) = (x, y).$$

Итак, A — унитарный оператор. □

Утверждение. *Пусть: H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{R}$; $A \in \operatorname{Lin}(H_1, H_2)$. Оператор A является ортогональным тогда и только тогда, когда: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H_1$.*

Доказательство. Пусть: A — ортогональный оператор; $x \in H_1$. Тогда: $\|Ax\| = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|$.

Пусть: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H_1$. Обозначим: $F_1(x, y) = (x, y)$, $F_2(x, y) = (Ax, Ay)$ при $x, y \in H_1$; $Q_1(x) = (x, x)$, $Q_2(x) = (Ax, Ax)$ при $x \in H_1$. Тогда: F_1, F_2 — симметричные билинейные формы в пространстве H_1; Q_1, Q_2 — квадратичные формы в пространстве H_1; $Q_1(x) = F_1(x, x)$, $Q_2(x) = F_2(x, x)$ при $x \in H_1$. Пусть $x, y \in H_1$. Тогда:

$$(Ax, Ay) = \frac{1}{2}\Big(\big(A(x+y), A(x+y)\big) - (Ax, Ax) - (Ay, Ay)\Big) = \\ \frac{1}{2}\big((x+y, x+y) - (x, x) - (y, y)\big) = (x, y).$$

Итак, A — ортогональный оператор. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H_1), \dim(H_2) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(H_1, H_2)$. Оператор A является ортогональным тогда и только тогда, когда: A — обратимый оператор, $A^{-1} = A^*$.*

Доказательство. Пусть A — ортогональный оператор. Очевидно, $\theta_1 \in \ker(A)$. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда:

$$(x, x) = (Ax, Ax) = (\theta_2, \theta_2) = 0; \\ x = \theta_1.$$

Итак, $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Тогда A — обратимый оператор. Так как: $\dim(H_1) = N = \dim(H_2)$, $\dim(H_2) = N \neq +\infty$, $\ker(A) = \{\theta_1\}$, то (согласно первой теореме Фредгольма) $\mathrm{R}(A) = H_2$.

Пусть $x, y \in H_1$. Тогда: $\big(A^*(Ax), y\big) = (Ax, Ay) = (x, y)$. Следовательно, $A^*(Ax) = x$. Так как: $\mathrm{D}(A^*) = H_2 = \mathrm{R}(A)$, то $A^* = A^{-1}$.

Пусть: A — обратимый оператор, $A^{-1} = A^*$; $x, y \in H_1$. Тогда: $(Ax, Ay) = \big(A^*(Ax), y\big) = \big(A^{-1}(Ax), y\big) = (x, y)$. Итак, A — ортогональный оператор. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2, H_3 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = 1$, $A \in \operatorname{Lin}(H_1, H_2)$, A — ортогональный оператор; $x, y \in H_1$. Тогда: $\big((\lambda A)x, (\lambda A)y\big) = \big(\lambda A(x), \lambda A(y)\big) = |\lambda|^2 (Ax, Ay) = (x, y)$. Следовательно, λA — ортогональный оператор.

Пусть: $A_1 \in \operatorname{Lin}(H_1, H_2)$, A_1 — ортогональный оператор, $A_2 \in \operatorname{Lin}(H_2, H_3)$, A_2 — ортогональный оператор; $x, y \in H_1$. Тогда: $\big((A_2A_1)x, (A_2A_1)y\big) = \big(A_2(A_1x), A_2(A_1y)\big) = (A_1x, A_1y) = (x, y)$. Следовательно, A_2A_1 — ортогональный оператор.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.