Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 12. Линейный самосопряжённый оператор. Спектральная теория

12.1. Линейный самосопряжённый оператор

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; *$H$ — линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(H, H)$, *$A$ — формально самосопряжённый оператор.*

1. Пусть: Q — инвариантное подпространство оператора A, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$. Тогда $Q^\perp$ — инвариантное подпространство оператора A.

2. Справедливо утверждение: $S_A \subseteq \mathbb{R}$.

3. Пусть: λ_1, λ_2 — собственные значения оператора A, H_1, H_2 — соответствующие собственные подпространства, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $H_1 \perp H_2$.

Доказательство.

1. Очевидно, $Q^\perp$ — подпространство пространства H. Пусть: $x \in Q^\perp \cap \mathrm{D}(A)$; $u \in Q$. Тогда: $(u, Ax) = (Au, x) = 0$. Следовательно, $Ax \in Q^\perp$. Итак, $Q^\perp$ — инвариантное подпространство оператора A.

2. Пусть $\lambda \in S_A$. Тогда можно указать такой вектор x, что: $x \in \mathrm{D}(A)$, $x \neq \theta$, $Ax = \lambda x$. Следовательно:

$$(x, Ax) = (x, \lambda x) = \lambda(x, x);$$
$$(x, Ax) = (Ax, x) = (\lambda x, x) = \overline{\lambda}(x, x);$$
$$(\lambda - \overline{\lambda})(x, x) = 0.$$

Так как $x \neq \theta$, то $\lambda = \overline{\lambda}$. Тогда $\lambda \in \mathbb{R}$. Следовательно, $S_A \subseteq \mathbb{R}$.

3. Пусть: $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$. Тогда:

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2);$$
$$(x_1, Ax_2) = (Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \overline{\lambda_1}(x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2);$$
$$(\lambda_2 - \lambda_1)(x_1, x_2) = 0.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(x_1, x_2) = 0$. Тогда $H_1 \perp H_2$.

□

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; *$H$ — линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$, *$A$ — самосопряжённый оператор. Тогда* $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Тогда: $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{K}$. Так как A — самосопряжённый оператор, то: $\tilde{S}_A = \tilde{S}_A \cap \mathbb{K} = S_A \subseteq \mathbb{R}$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Очевидно, можно указать такие математические объекты $H_\mathbb{C}$, e, f, $A_\mathbb{C}$, что: $H_\mathbb{C}$ — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim(H_\mathbb{C}) = N$; e — ортонормированный базис пространства H, f — ортонормированный базис пространства $H_\mathbb{C}$, $A_\mathbb{C} \in \mathrm{Lin}(H_\mathbb{C}, H_\mathbb{C})$, $[A_\mathbb{C}](f) = [A](e)$. Так как $[A_\mathbb{C}](f) = [A](e)$, то $\tilde{F}_{A_\mathbb{C}} = \tilde{F}_A$. Так как: A — самосопряжённый оператор, e — ортонормированный базис пространства H, то $[A](e)$ — эрмитова матрица. Так как $[A_\mathbb{C}](f) = [A](e)$, то $[A_\mathbb{C}](f)$ — эрмитова матрица. Так как f — ортонормированный базис пространства $H_\mathbb{C}$, то $A_\mathbb{C}$ — самосопряжённый оператор.

Пусть $\lambda \in \tilde{S}_A$. Так как $\tilde{F}_{A_\mathbb{C}} = \tilde{F}_A$, то $\lambda \in \tilde{S}_{A_\mathbb{C}}$. Так как $A_\mathbb{C}$ — самосопряжённый оператор, то $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{R}$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор. Можно указать такие векторы* $e_1, \ldots, e_N$*, что:* $e_1, \ldots, e_N$ *— ортогональный базис пространства* H*,* $e_1, \ldots, e_N$ *— собственные векторы оператора* A*.*

Доказательство. Так как: $\dim(H) = N \in \mathbb{N}$, A — самосопряжённый оператор, то: $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$. Тогда: $S_A = \tilde{S}_A \cap \mathbb{K} = \tilde{S}_A \neq \varnothing$. Следовательно, существует такое число λ_1 и такой вектор e_1, что: $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, $e_1 \in H$, $e_1 \neq \theta$, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$.

Пусть: $k = \overline{1, N-1}$; существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и такие векторы $e_1, \ldots, e_k$, что: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_k \in H$, $e_1, \ldots, e_k$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_k \neq \theta$, $Ae_j = \lambda_j e_j$ при $j = \overline{1, k}$. Обозначим, $Q_k = L(e_1, \ldots, e_k)$. Тогда Q_k — подпространство пространства H. Так как: $e_1, \ldots, e_k$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_k \neq \theta$, то $\dim(Q_k) = k$. Так как: $Ae_j = \lambda_j e_j$ при $j = \overline{1, k}$, то Q_k — инвариантное подпространство оператора A.

Очевидно, $Q_k^\perp$ — подпространство пространства H. Так как $\dim(Q_k) = k$, то $\dim(Q_k^\perp) = N - k$. Так как: Q_k — инвариантное подпространство оператора A, A — самосопряжённый оператор, то $Q_k^\perp$ — инвариантное подпространство оператора A. Тогда: $A|_{Q_k^\perp} \in \mathrm{Lin}(Q_k^\perp, Q_k^\perp)$, $A|_{Q_k^\perp}$ — самосопряжённый оператор. Так как: $\dim(Q_k^\perp) = N - k \in \mathbb{N}$, $A|_{Q_k^\perp}$ — самосопряжённый оператор, то: $\tilde{S}_{A|_{Q_k^\perp}} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$. Тогда: $S_{A|_{Q_k^\perp}} = \tilde{S}_{A|_{Q_k^\perp}} \cap \mathbb{K} = \tilde{S}_{A|_{Q_k^\perp}} \neq \varnothing$. Следовательно, существует такое число λ_{k+1} и такой вектор e_{k+1}, что: $\lambda_{k+1} \in \mathbb{K}$, $e_{k+1} \in Q_k^\perp$, $e_{k+1} \neq \theta$, $A|_{Q_k^\perp} e_{k+1} = \lambda_{k+1} e_{k+1}$. Тогда: $\lambda_{k+1} \in \mathbb{K}$, $e_{k+1} \in Q_k^\perp$, $e_{k+1} \neq \theta$, $Ae_{k+1} = \lambda_{k+1} e_{k+1}$. Следовательно: $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_{k+1} \in H$, $e_1, \ldots, e_{k+1}$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_{k+1} \neq \theta$, $Ae_j = \lambda_j e_j$ при $j = \overline{1, k+1}$.

Рассуждая по индукции, получаем, что существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ и такие векторы $e_1, \ldots, e_N$, что: $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_N \in H$, $e_1, \ldots, e_N$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_N \neq \theta$, $Ae_j = \lambda_j e_j$ при $j = \overline{1, N}$. Очевидно: $e_1, \ldots, e_N$ — ортогональный базис пространства H, $e_1, \ldots, e_N$ — собственные векторы оператора A. □

Теорема (спектральная теорема)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор. Тогда:* $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{R}$*,* $\forall \lambda \in S_A \big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$*.*

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональные подпространства пространства H, $H = \sum\limits_{k=1}^{r} H_k$. Обозначим: $P_k = P_{H_k}$ при $k = \overline{1, r}$. Пусть $x \in H$. Так как $H = \sum\limits_{k=1}^{r} H_k$, то можно указать такие векторы $x_1, \ldots, x_r$, что: $x_k \in H_k$ при $k = \overline{1,r}$; $x = \sum\limits_{k=1}^{r} x_k$. Так как $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональные подпространства, то: $x_k = P_k x$ при $k = \overline{1,r}$. Тогда: $x = \sum\limits_{k=1}^{r} x_k = \sum\limits_{k=1}^{r} P_k x = \left(\sum\limits_{k=1}^{r} P_k\right) x$. Следовательно, $I = \sum\limits_{k=1}^{r} P_k$.

Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор; $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все различные собственные значения оператора A, $H_1, \ldots, H_r$ — соответствующие собственные подпространства. Тогда: $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональные подпространства пространства H, $H = \sum\limits_{k=1}^{r} H_k$. Обозначим: $P_k = P_{H_k}$ при $k = \overline{1,r}$. Пусть $x \in H$. Тогда:

$$Ax = A \sum_{k=1}^{r} P_k x = \sum_{k=1}^{r} A(P_k x) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k(x) = \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k\right) x.$$

Следовательно, $A = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k P_k$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональные подпространства пространства H, $H = \sum\limits_{k=1}^{r} H_k$. Обозначим: $P_k = P_{H_k}$ при $k = \overline{1,r}$. Пусть: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, $A = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k P_k$.

Пусть $n = 0$. Тогда:

$$A^n = I = \sum_{k=1}^{r} P_k = \sum_{k=1}^{r} (\lambda_k)^n P_k.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$A^n = \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k\right)^n = \sum_{k_1, \ldots, k_n = \overline{1,r}} \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_n} P_{k_1} \cdots P_{k_n} = \sum_{k=1}^{r} (\lambda_k)^n P_k.$$

Пусть: $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $F(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ при $x \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$\hat{F}(A) = \sum_{j=0}^{n} a_j A^j = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=1}^{r} (\lambda_k)^j P_k = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j (\lambda_k)^j\right) P_k = \sum_{k=1}^{r} F(\lambda_k) P_k.$$

Пусть: $F\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathrm{D}(F)$. Обозначим, $\hat{F}(A) = \sum\limits_{k=1}^{r} F(\lambda_k) P_k$.

12.2. Эрмитовы полуторалинейные формы в евклидовом пространстве

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве H. Покажем, что существуют такие векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, что: e' — ортонормированный базис пространства H, $[A](e')$ — диагональная матрица.

Можно указать такой оператор $\hat{A}$, что: $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $A(x, y) = (x, \hat{A}y)$ при $x, y \in H$. Так как A — эрмитова форма, то $\hat{A}$ — самосопряжённый оператор. Тогда существуют такие векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, что: e' — ортонормированный базис пространства H, $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора A. Следовательно, $[\hat{A}](e')$ — диагональная матрица. Так как e' — ортонормированный базис, то: $[A](e') = g(e')[\hat{A}](e') = \tilde{I}[\hat{A}](e') = [\hat{A}](e')$. Тогда $[A](e')$ — диагональная матрица.

Пусть e — ортонормированный базис пространства H. Тогда: $[A](e) = g(e)[\hat{A}](e) = \tilde{I}[\hat{A}](e) = [\hat{A}](e)$.

Пусть e — базис пространства H. Запишем уравнение, которое используют для получения координат собственных векторов оператора $\hat{A}$:

$$\Big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\Big)\tilde{x} = \tilde{\theta},$$

$$g(e)\Big(\Big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\Big)\tilde{x}\Big) = g(e)\tilde{\theta},$$

$$\Big([A](e) - \lambda g(e)\Big)\tilde{x} = \tilde{\theta}.$$

Здесь: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A, B — эрмитовы полуторалинейные формы в пространстве L, $B > 0$. Покажем, что существуют такие векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, что: e' — базис пространства L, $[A](e')$ — диагональная матрица, $[B](e') = \tilde{I}$.

Так как: B — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $B > 0$, то B — скалярное произведение в пространстве L. Обозначим, $H = (L, B)$. Тогда H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Можно указать такой оператор $\hat{A}$, что: $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $A(x, y) = (x, \hat{A}y)$ при $x, y \in H$. Так как A — эрмитова форма, то $\hat{A}$ — самосопряжённый оператор. Тогда существуют такие векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, что: e' — ортонормированный базис пространства H, $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора A. Следовательно, $[\hat{A}](e')$ — диагональная матрица. Так как e' — ортонормированный базис, то: $[A](e') = g(e')[\hat{A}](e') = \tilde{I}[\hat{A}](e') = [\hat{A}](e')$. Тогда $[A](e')$ — диагональная матрица. Так как e' — ортонормированный базис, то $[B](e') = \tilde{I}$.

Пусть e — базис пространства H. Запишем уравнение, которое используют для получения координат собственных векторов оператора $\hat{A}$:

$$\Big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\Big)\tilde{x} = \tilde{\theta},$$

$$[B](e)\Big(\Big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\Big)\tilde{x}\Big) = [B](e)\tilde{\theta},$$

$$\Big([A](e) - \lambda[B](e)\Big)\tilde{x} = \tilde{\theta}.$$

Здесь: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.